

ПРИМЕНЕНИЕ R-ФУНКЦИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Одним из методов решения проблемы задания информации для 3D-печати является применение теории R-функций, при помощи которой нами построена математическая и компьютерная модель дома для последующей реализации на 3D-принтере. Для построения искомых уравнений использована система R_0 , а в случае наличия симметрии трансляции вдоль прямой или точечной симметрией циклического типа – суперпозиции с соответствующими периодическими функциями. Поэтапно построены уравнения конструктивных строительных элементов. Аналитическая идентификация проектируемых объектов дала возможность использовать буквенные геометрические параметры, что, в свою очередь, позволило оперативно изменять конструктивные элементы дома.

Введение. В настоящее время для создания трёхмерных физических объектов весьма перспективны 3D-принтеры. В основе технологии 3D-печати лежит принцип послойного создания твердой модели. Подобные устройства в сравнении с обычными способами создания моделей обладают высокой скоростью, просты и дешевы. В Амстердаме команда архитекторов из разных стран, нанятая нидерландской студией DUS Architects, работает над проектом, призванным освоить одно из самых важных направлений развития 3D-печати – строительство зданий. Ее руководители намерены возвести здание в северной части Амстердама на канале *Buiksloter*, которое будет функционировать в качестве образца и исследовательского центра для технологий 3D-печати (рис. 1а) [6]. Если проект окажется успешным, то трёхмерная печать может стать основным методом производства стройматериалов любых размеров и состава. Это позволит не только перевернуть строительный бизнес, но и существенно улучшить экологию. Очередным шагом к реализации будущего трехмерной печати является проект самого большого трехмерного принтера, способного "напечатать" двухэтажный дом в течение всего 24 часов, Бехроха Хошневиса (Behrokh Khoshnevis) — профессора из университета Южной Калифорнии (University of Southern California).

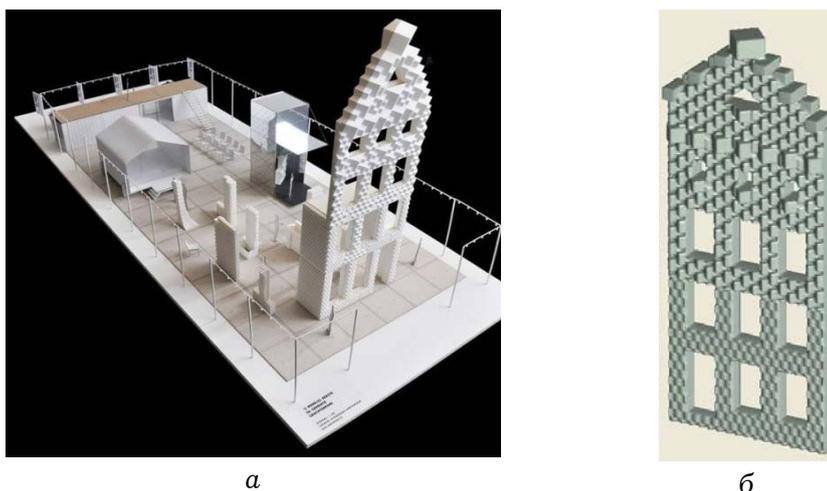


Рис. 1. Тренировочный макет DUS Architects [6] в масштабе 1:20 (а) и фасадная стена, реализованная [1] с помощью R-функций (б).

Кроме этого, благодаря возможностям такой технологий люди смогут избавиться от навевающих скуку пейзажей кварталов, застроенных домами типовых проектов. Ведь с помощью компьютера каждый более-менее грамотный человек сможет составить проект своего будущего дома из набора готовых компонентов. Однако здесь необходимо задать информацию для печати, т.е. математическую и компьютерную модели проектируемого объекта. Одним из методов решения этой проблемы является применение теории R -функций [3, 4, 5, 7], которая позволяет описывать геометрические объекты сложной формы единым аналитическим выражением (рис. 1б).

Цель данной работы – создать на основе теории R -функций математическую и компьютерную модели дачного домика.

Основная часть. Для построения искомым уравнений геометрических объектов используем следующие конструктивные средства этой теории: наиболее простую и поэтому наиболее часто применяемую систему R_0 [4, 5]:

$$\begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases},$$

где $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ – символы R -конъюнкции, R -дизъюнкции и R -отрицания соответственно. Кроме того, для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема 1. Пусть трансляционная область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$ симметрична к оси Oy и может быть размещена в вертикальной полосе $-a < x < a$, а области $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y, z) \geq 0]$ получены в результате преобразования переноса области Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины, кратные $h > 2a$. Тогда уравнение границы $\partial\Omega$ области $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Sigma_i$ имеет вид

$$\omega(x, y, z) \equiv \sigma_0(\mu(x, h), y, z) = 0, \text{ где } \mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}.$$

Для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема 2. Пусть трансляционная область $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$ симметрична относительно оси абсцисс, а область $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$ может быть размещена внутри сектора $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{n}$. Области $\Sigma_k = [\sigma_0(r \cos(\theta - 2\pi k/n) - r_0, r \sin(\theta - 2\pi k/n), z) \geq 0]$ получены в результате поворота области $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$ в плоскости xOy вокруг начала координат на углы $2\pi k/n$. Тогда уравнение границы $\partial\Omega$ области $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ имеет вид

$$\omega(x, y) \equiv \sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n), z) = 0, \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x} \right),$$

где

$$\mu(\theta, n) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n\theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Построим уравнение дачного дома (рис. 2).

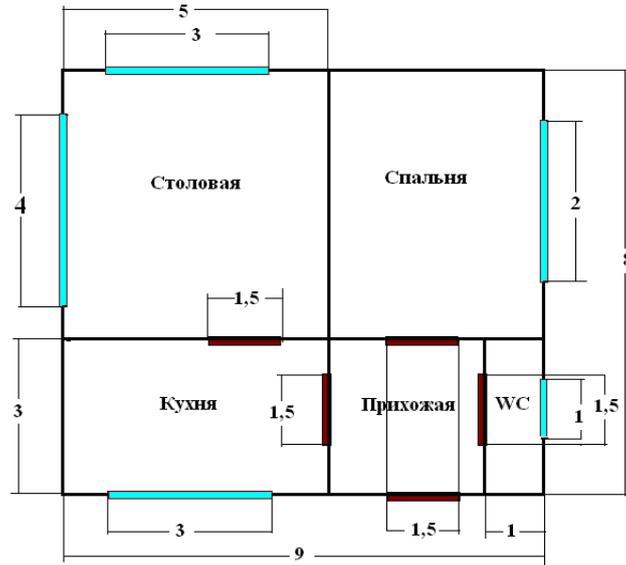


Рис. 2. Схема дачного дома.

Уравнение фундамента имеет вид

$$f_{fun} = ((0.4 + x)(9.4 - x) \wedge_0 (0.4 + y)(8.4 - y)) \wedge_0 ((0.6 + z)(-z)) \geq 0, \text{ а уравнение внешних стен } - f_c = f_{11} \wedge_0 ((0.4 + z)(H - z)) \geq 0, \text{ где } f_{11} = \delta_1 - |f_1| \geq 0, 2\delta_1 = 1.6 - \text{толщина внешних стен, } H = 7 - \text{их высота,}$$

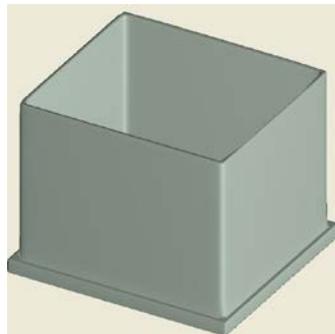
$$f_1 = \left(\frac{x(9-x)}{9}\right) \wedge_0 \left(\frac{y(8-y)}{8}\right) \geq 0.$$

Соединяем стены с фундаментом (рис. 3а): $f_d = f_c \vee_0 f_{fun} \geq 0$.

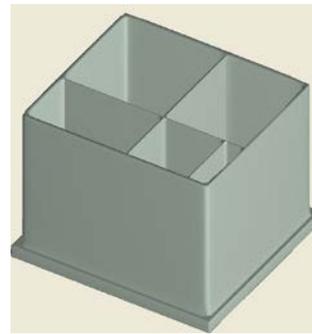
Строим уравнения внутренних перегородок (рис. 3б):

$$f_{b1} = 0.05 - |a - y| \geq 0, f_{b2} = \delta_2 - |b - x| \geq 0, f_{b3} = (\delta_2 - |c - x|) \wedge_0 (3 - y) \geq 0, a = 3, b = 5, c = 8, 2\delta_2 = 0.1 - \text{толщина внутренних перегородок,}$$

$$f_{fb} = ((f_{b1} \vee_0 f_{b2} \vee_0 f_{b3}) \wedge_0 ((0.4 + z)(7 - z))) \wedge_0 f_1 \geq 0, kor = f_d \vee_0 f_{fb} \geq 0.$$



а



б

Рис. 3. Внешние стены с фундаментом (а) и с внутренними перегородками (б).

Уравнения дверных проемов (рис. 4а):

$$dv_1 = ((8.5 - x)(x - 4.5) \wedge_0 (2.5 - y)(y - 1)) \wedge_0 z(h_1 - z) \geq 0;$$

$$dv_2 = ((4.5 - x)(x - 3) \wedge_0 (4 - y)(y - 2)) \wedge_0 z(h_1 - z) \geq 0;$$

$$dv_3 = ((7.5 - x)(x - 6) \wedge_0 (7 - y)(y + 1)) \wedge_0 z(h_1 - z) \geq 0;$$

$$dv_{123} = (dv_1 \vee_0 dv_2) \vee_0 dv_3 \geq 0; \quad dom = kor \wedge_0 (-dv_{123} \geq 0).$$

Уравнения оконных проемов (рис. 4б):

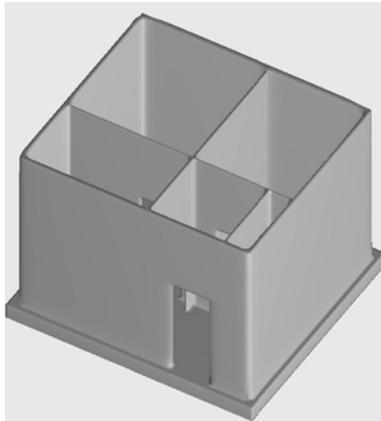
$$ok_1 = ((4 - x)(x - 1) \wedge_0 (2 - y)(7 - y)) \wedge_0 (z - h_2)(h_1 - z) \geq 0;$$

$$ok_2 = ((6 - y)(y - 4) \wedge_0 (x - 8)) \wedge_0 (z - h_2)(h_1 - z) \geq 0;$$

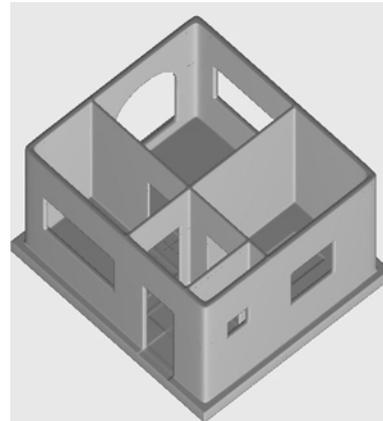
$$ok_3 = ((2 - y)(y - 1) \wedge_0 (x - 8.5)) \wedge_0 (z - h_3)(h_1 - z) \geq 0; \quad h_1 = 5, \quad h_2 = 2, \quad h_3 = 4,$$

$$ok_4 = (((7 - y)(y - 4) \wedge_0 (z - 0.5)(3 - z)) \vee_0 (2.25 - (y - 5.5)^2 - (z - 3)^2)) \wedge_0 (1 - x) \geq 0;$$

$$ok_{1234} = ((ok_1 \vee_0 ok_2) \vee_0 ok_3) \vee_0 ok_4 \geq 0; \quad dom_3 = dom \wedge_0 (-ok_{1234}) \geq 0.$$



а



б

Рис. 4. Прорезаны двери (а) и оконные проёмы (б).

Уравнение крыши:

$$f_{kr1} = (x_1(9 - x_1) \wedge_0 y_1(8 - y_1)) \wedge_0 (z_0 - z_1)(z_1 + 0.5) \geq 0; \quad z_2 = z - (H + \delta_{kr}),$$

где $\delta_{kr} = 0.4$ — толщина крыши, $z_0 = 4$; $z_1 = z - H$; $x_1 = 4.5 - z_0 \frac{x - 4.5}{z_1 - z_0}$;

$$y_1 = 4 - z_0 \frac{y - 4}{z_1 - z_0}; \quad x_2 = 4.5 - z_0 \frac{x - 4.5}{z_2 - z_0}; \quad y_2 = 4 - z_0 \frac{y - 4}{z_2 - z_0};$$

$$f_{kr2} = (x_2(9 - x_2) \wedge_0 y_2(8 - y_2)) \wedge_0 (z_0 - z_2)(z_1 + 0.5) \geq 0;$$

$$f_{kr} = f_{kr2} \wedge_0 (-f_{kr1}) \geq 0.$$

Уравнение перекрытия:

$$f_{per} = f_1 \wedge_0 (7.15 - z)(z - 7) \geq 0; \quad f_{krper} = f_{kr} \vee_0 f_{per} \geq 0.$$

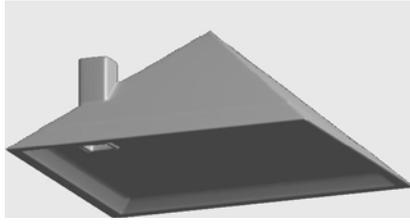
Уравнение трубы-воздуховода: $f_{tr1} = (2 - x)(x - 1) \wedge_0 (2 - y)(y - 1) \geq 0$;

$$f_{krpertr1} = f_{krper} \wedge_0 (-f_{tr1}) \geq 0; \quad f_{tr} = (0.05 - |f_{tr1}|) \wedge_0 (10 - z)(z - 6.9) \geq 0.$$

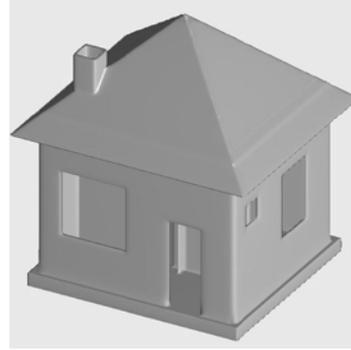
Уравнение крыши, перекрытия и воздуховода (рис. 5а):

$$f_{krpertr} = f_{krpertr1} \vee_0 f_{tr} \geq 0.$$

Уравнение дачного дома (рис. 5б): $f_{fin} = f_{krpertr} \vee_0 dom_3 \geq 0.$



a



б

Рис. 5. Крыша с перекрытием и трубой (a) и дом в общей сборке (б).

Фасад дома может быть украшен орнаментом по выбору заказчика (рис. 6 и 7).

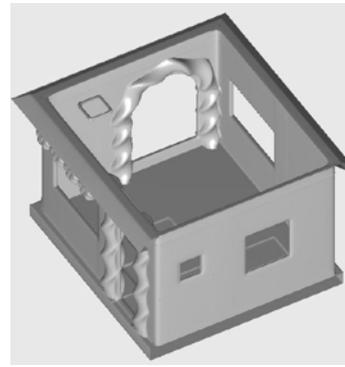
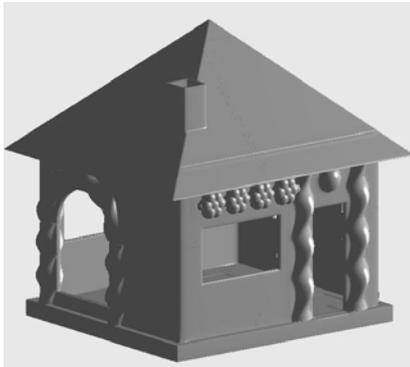


Рис. 6. Дом с орнаментом.

Уравнение оформления французского окна (рис. 6 и 7) построено следующим образом: $W = wt \vee_0 fk \geq 0$, где уравнение скрученного тора

$$wt = wt_1 \vee_0 wt_2 \geq 0, (wt = wt_1 \geq 0);$$

$$wt_1 = \left(1 - \frac{yy^2}{0.25} - \frac{zz^2}{0.09} \right) \wedge_0 z - 3 \geq 0;$$

$$\begin{cases} yy = ro \cos alt + x \sin alt \\ zz = -ro \sin alt + x \cos alt \end{cases}; ro = \sqrt{zt^2 + y^2} - r, alt = n \arctg \frac{y}{zt};$$

$$r = 1.5; n = 4; zt = z - 3.$$

$$wt_2 = wt_1(-alt).$$

Уравнение боковых колонн:

$$fk = fk_1 \vee_0 fk_2 \geq 0, (fk = fk_1 \geq 0);$$

$$fk_1 = (f_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 z(3 - z) \geq 0;$$

$$f_1 = 1 - \frac{xk_1^2}{0.25} - \frac{yk_1^2}{0.09} \geq 0; f_2 = 1 - \frac{xk_2^2}{0.25} - \frac{yk_2^2}{0.09} \geq 0;$$

$$\begin{cases} xk_1 = x \cos al - (y - 1.5) \sin al \\ yk_1 = -x \sin al + (y - 1.5) \cos al \end{cases}; \begin{cases} xk_2 = x \cos al - (y + 1.5) \sin al \\ yk_2 = -x \sin al + (y + 1.5) \cos al \end{cases};$$

$$al = \frac{2\pi z}{2.42}; fk_2 = fk_1(-al) \geq 0.$$

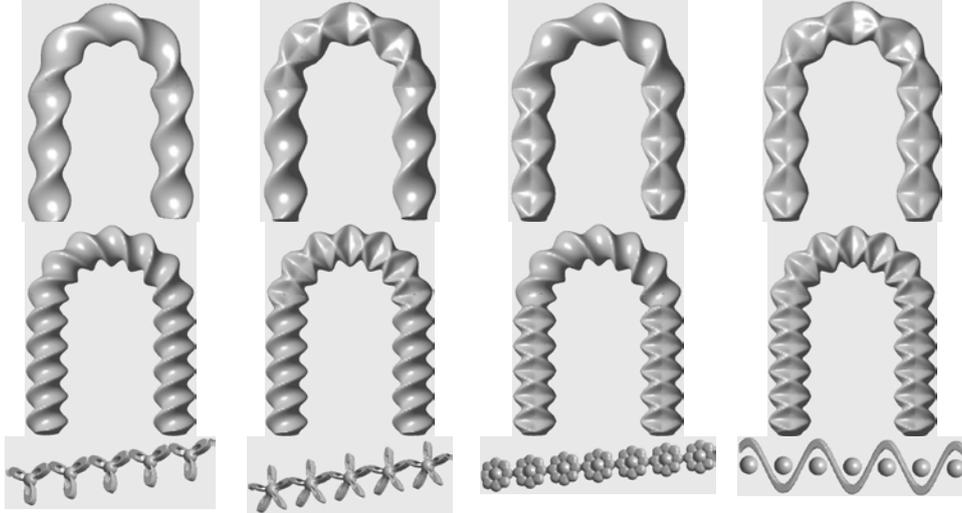


Рис. 7. Виды орнаментов.

Построим уравнение многопрофильной крыши (рис. 8):

$$f_{kr} = (((f_{kr1} \vee_0 f_{kr2}) \vee_0 f_{kr3}) \vee_0 f_{kr4}) \vee_0 f_{kr5} \geq 0$$

$$f_{kr1} = (x_{11}(9 - x_{11}) \wedge_0 y_{11}(8 - y_{11})) \wedge_0 (z_{01} - z_1)(z_1 + 0.5) \geq 0$$

$$x_{11} = x_{01} - \frac{z_0(x - x_{01})}{z_1 - z_{01}}; \quad y_{11} = y_{01} - \frac{z_0(y - y_{01})}{z_1 - z_{01}};$$

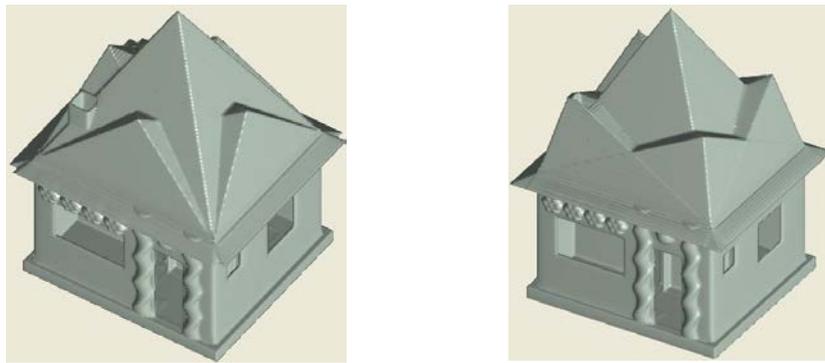
$$x_{01} = 4.5, y_{01} = 4, z_{01} = 8, z_1 = z - hc.$$

$$f_{kri} = (x_{1i}(9 - x_{1i}) \wedge_0 y_{1i}(8 - y_{1i})) \wedge_0 (z_0 - z_1)(z_1 + 0.5) \geq 0,$$

$$x_{1i} = x_{0i} - \frac{z_0(x - x_{0i})}{z_1 - z_0}; \quad y_{1i} = y_{0i} - \frac{z_0(y - y_{0i})}{z_1 - z_0}, \quad i = 2, 3, 4, 5,$$

$$x_{02} = 1, (x_{02} = 4.5), y_{02} = 1, z_0 = 4. \quad x_{03} = 8, (x_{03} = 1), y_{03} = 1, (y_{03} = 4),$$

$$x_{04} = 1, (x_{04} = 4.5), y_{04} = 7. \quad x_{05} = 8, y_{05} = 7, (y_{05} = 4).$$

Рис. 8. Дом с многопрофильной крышей при различных значениях x_{0i}, y_{0i} .

Потолок в гостиной также можно украсить лепниной (рис. 9):

$$wl = wpl \vee_0 wpar \geq 0; \quad wpl = wk \vee_0 wt \geq 0; \quad wpar = (f_4 \wedge_0 f_5) \wedge_0 f_6, \quad f_6 = f_3 \wedge_0 \overline{f_e}.$$

Ниже построено уравнение цветочного орнамента, в котором, меняя значения параметров n_{o1}, n_{o2} , получим разное количество элементов на окружности и количество лепестков цветка:

$$wk = w1 \vee_0 (rk^2 - x_1^2 - y_1^2 - z^2) \geq 0, \quad rk = \frac{0.5}{3.6},$$

$$\begin{cases} x_1 = r_{o1} \cos mu_1 - 2 / 1.2; \\ y_1 = r_{o1} \sin mu_1 \end{cases}; \quad mu_1 = \frac{8}{n_{o1}\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ff_1}{(2k-1)^2}; \quad ff_1 = \frac{\theta_1 n_{o1}}{2};$$

$$r_{o1} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta_1 = \arctg \frac{y}{x}; \quad n_{o1} = 14; \quad w_1 = (rk^2 - x_2^2 - y_2^2 - z^2) \geq 0,$$

$$\begin{cases} x_2 = r_{o2} \cos mu_2 - 1 / 3.6; \\ y_2 = r_{o2} \sin mu_2 \end{cases}; \quad mu_2 = \frac{8}{n_{o2}\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ff_2}{(2k-1)^2}; \quad ff_2 = \frac{\theta_2 n_{o2}}{2};$$

$$r_{o2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{y_1}{x_1}; \quad n_{o2} = 8.$$

Уравнение внешнего тора имеет вид

$$wt = rk^2 - \frac{xx_t^2}{0.25} - zz_t^2,$$

$$\begin{cases} zz_t = ro \cos alt + z \sin alt \\ xx_t = -ro \sin alt + z \cos alt \end{cases}, \quad ro = \sqrt{x^2 + y^2} - 8 / 3.6, \quad alt = n \arctg \frac{y}{x}, \quad n = 20.$$

(При $alt = 0$ получаем уравнение нескрученного тора.)

Центральную часть лепнины с подложкой и центральным отверстием описывает уравнение

$$f_{1l} = [(1 - x^2 - y^2 - 2z) \wedge_0 z] \vee_0 [((8 / 3.6)^2 - x^2 - y^2) \wedge_0 ((0.2 / 3.6)^2 - z^2)] \geq 0,$$

$$f_{2l} = x^2 + y^2 - 0.01 \geq 0, \quad f_r = r^2 - f_{1l}^2 - f_{2l}^2 \geq 0, \quad r = 0.3,$$

$$f_{3l} = f_{1l} + f_{2l} - \sqrt{f_{1l}^2 + f_{2l}^2} + \frac{f_r}{8r^2} (|f_r| + f_r) \geq 0.$$

Первая линия обрамления центрального отверстия:

$$f_4 = x_{e1}^2 + y_{e1}^2 - 0.06^2 \geq 0, \quad \begin{cases} x_{e1} = roe \cos mu_{e1} - 0.3 \\ y_{e1} = roe \sin mu_{e1} \end{cases},$$

$$mu_{e1} = \frac{8}{n_{oe1}\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ff_{e1}}{(2k-1)^2},$$

$$ff_{e1} = \frac{\theta e \cdot n_{oe1}}{2}, \quad n_{oe1} = 8, \quad roe = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta e = \arctg \frac{y}{x}.$$

Вторая линия этого обрамления:

$$f_5 = x_{e2}^2 + y_{e2}^2 - 0.01 \geq 0, \quad \begin{cases} x_{e2} = roe \cos mu_{e2} - 0.7 \\ y_{e2} = roe \sin mu_{e2} \end{cases},$$

$$mu_{e2} = \frac{8}{n_{oe2}\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ff_{e2}}{(2k-1)^2},$$

$$ff_{e2} = \frac{(\theta e - \pi / n_{oe}) \cdot n_{oe}}{2}, \quad n_{oe} = 10, (n_{oe} = 6).$$

Третья линия обрамления центрального отверстия с эллипсоидальными отверстиями:

$$f_e = \left(1 - \frac{xe^2}{0.5^2} - \frac{ye^2}{0.1^2} - \frac{z^2}{0.9^2}\right) \wedge_0 (1 - x^2 - y^2) \geq 0, \quad \begin{cases} xe = roe \cos mue - 1 \\ ye = roe \sin mue \end{cases},$$

$$mue = \frac{8}{n_{oe3}\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin ffe}{(2k-1)^2}, \quad ffe = \frac{\theta e \cdot n_{oe}}{2}.$$

Виды лепнины проиллюстрированы на рис. 9.

Изменяя значения буквенных параметров, можно оперативно менять толщину стен, расположение перегородок, размеры и форму окон и дверей, вид крыши, орнамент и др. Здесь для удобства чтения приведены лишь

некоторые из них с соответствующей иллюстрацией. Кроме того, авторы стремились показать возможности метода R -функций, поэтому фасад несколько перегружен декоративными элементами.

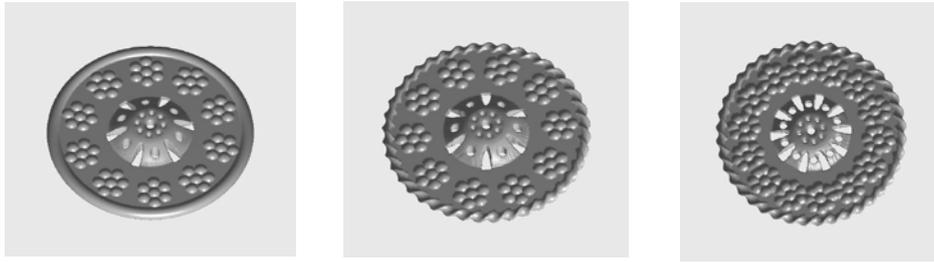


Рис. 9. Виды лепнины в зависимости от значений n_{01}, n_{02}, n .

Заключение. Теория R -функций впервые применена к математическому и компьютерному моделированию строительных конструкций. Аналитическая идентификация проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные геометрические параметры, что позволяет оперативно изменять конструктивные элементы проектируемого объекта. При реализации построенных моделей на 3D-принтере заполнение материалом происходит при $w \geq 0 (f_{fin} \geq 0)$. Заметим, что может возникнуть техническая проблема из-за неодносвязности рассматриваемых объектов. Решить ее весьма просто: оконные и дверные проемы можно выполнять из другого материала, вставив в программу соответствующие дополнения, что легко осуществить с помощью R -функций; либо проводить построение в три этапа: при $z \leq h_1$, $h_1 \leq z \leq H$, $z > H$.

1. Литвинова Ю. С., Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. R -функции в математическом моделировании 3D-дома для реализации технологий 3D-печати // Вісник Харк. нац. ун-ту. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2014. – Вип. 24. – С. 122–128.
2. Лисін Д. О. Комп'ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об'єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R -функцій «RFPreview» // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. – 2012. – № 45951.
3. R -функції в комп'ютерному моделюванні дизайну автомобіля / Д. А. Лисин, К. В. Максименко-Шейко, А. В. Толлок, Т. И. Шейко // Прикл. інформатика. – 2011. – № 6 (36). – С. 78–85.
4. Максименко-Шейко К. В. R -функції в математическом моделюванні геометрических объектов и физических полей. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.
5. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. http://www.bbc.co.uk/ukrainian/ukraine_in_russian/2013/04/130416_ru_s_3d_building_amsterdam.shtml
7. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R -functions in boundary value problems in mechanics // Appl. Mech. Rev. – 1995. – 48, № 4. – P. 151–188.

ЗАСТОСУВАННЯ R -ФУНКЦІЙ В МОДЕЛЮВАННІ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Одним з методів вирішення проблеми завдання інформації для тривимірного друку є застосування теорії R -функцій, за допомогою якої побудовано математичну і комп'ютерну моделі будинку для подальшої їх реалізації на 3D-прин-

тері. Для побудови шуканих рівнянь використано систему R_0 , а за наявності симетрії трансляції уздовж прямої чи точкової симетрії циклічного типу – суперпозиції із відповідними періодичними функціями. Поетапно побудовано рівняння конструктивних будівельних елементів. Аналітична ідентифікація проєктованих об'єктів дала можливість використати буквенні геометричні параметри, а також оперативно змінювати конструктивні елементи будинку.

THE R-FUNCTIONS USING AT BUILDING CONSTRUCTIONS MODELING

The one of methods of the decision of a problem of the printing information task is the R-functions theory application. The mathematical and computer model of a house are created on the R-functions theory basis for their subsequent realization on the 3D-printer. The most simple system R_0 is used for the required equations construction. In case of presence of translation along direct symmetry or cyclic type dot symmetry the superposition with corresponding periodic functions is used. Stage-by-stage construction of the constructive building elements' equations is carried out. The analytical identification of the projected objects has enabled to use alphabetic geometrical parameters, that, in turn, has allowed to change operatively constructive elements of a house.

¹Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, Харьков:

²Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Получено
11.08.14