УДК 514

Д. О. Дзякович

ПРО СИМЕТРІЇ УНІВЕРСАЛЬНИХ БАГАТОТОЧКОВИХ ІНВАРІАНТІВ, ЩО ЛЕЖАТЬ В ОСНОВІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ГЕОМЕТРІЙ

Запроваджено поняття універсальних багатоточкових інваріантів n-вимірного метричного простору. Визначено властивості їх симетрії в однорідних та ізотропних рімановому просторах і знайдено їх явний вигляд для кожного типу кривини. Показано, що просторам сталої кривини відповідають максимально симетричні інваріанти. Існування в просторі таких універсальних інваріантів забезпечує виконання метричних співвідношень, які задають відповідну елементарну геометрію. Використаний багатоточковий підхід залишає багато можливостей для розвитку і подальших досліджень.

Вступ. Якщо в n-вимірному евклідовому просторі обрати $n+1$ довільних точок і поставити їм у відповідність об'єм побудованого на цих точках n-вимірного тетраедра, то отримаємо простий приклад багатоточкової величини, яка не змінюється за певних перетворень системи обраних точок (тобто за певних змін їх положень у просторі). Тому об'єм тетраедра V_{n+1} можна назвати багатоточковим інваріантом n-вимірного евклідового простору відносно відповідних перетворень системи $n+1$ точок, що визначають положення його вершин. У той же час систему з $n+2$ довільно обраних точок можна розглядати як вершини $(n+1)$-вимірного тетраедра з об'ємом $V_{n+2}=0$. Значення V_{n+2} не змінюється за будь-яких перетворень системи обраних $n+2$ точок (у n-вимірному евклідовому просторі), тому назвемо об'єм V_{n+2} універсальним багатоточковим інваріантом простору $\mathbb{E}^n$.

Подібні інваріанти досить зручні для аналізу окремих задач метричної геометрії. Якщо в метричному просторі існує універсальний багатоточковий інваріант, який можна подати як функцію відстаней між заданими m точками, і відомий його явний вигляд, то, записавши рівність цього інваріанта значенню, яке він набуває, отримаємо універсальне співвідношення між відстанями для будь-якої системи m точок. Такі співвідношення зустрічаються в так званій геометрії відстаней [5], де їх використовують для визначення умов конгруентного вкладання напівметричних множин у відповідний метричний простір. Універсальні співвідношення в багатоточкових системах достатньо ефективні і для розв'язування деяких практичних задач [6].

Встановити явний вигляд універсального багатоточкового інваріанта та відповідного рівняння, що пов'язує відстані, доволі складно. Цю задачу можна вважати розв'язаною тільки для найпростіших та симетричних випадків метричної геометрії. Для простору сталої кривини, який описує евклідова, гіперболічна або сферична (еліптична) геометрії, відомі також як елементарні, універсальні метричні співвідношення записують у вигляді рівності нулю визначників відповідних матриць [5, 1]. Елементи цих матриць залежать від відстаней між довільними $n+2$ точками. При цьому кожному типу кривини відповідає аналітичний зв'язок між відстанями, характерний саме для цього простору.

Проблема, яку прагнемо дослідити, полягає ось у чому. Універсальні співвідношення для відстаней, очевидно, тісно пов'язані з метричними властивостями простору. А в однорідному та ізотропному просторі сталої кривини вони мають бути максимально симетричні. Тому необхідно ідентифікувати властивості симетрії універсальних багатоточкових інваріантів, які відповідають симетріям однорідних та ізотропних просторів, та з'ясувати, які обмеження на геометрію накладає сам факт існування у просторі таких максимально симетричних інваріантів. Також спробуємо вивести

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2015. – Вип. 13. – С. 195–206.

універсальні співвідношення для відстаней у просторі сталої кривини безпосередньо з властивостей їх симетрії та звичайних аксіом метрики. Розв'язання цієї задачі дасть можливість виявити нові фундаментальні властивості метричного простору, які можна покласти в основу елементарних (евклідової та неевклідових) геометрій, а також сприятиме формуванню альтернативних підходів до знаходження універсальних інваріантів у загальному випадку.

Такі питання досліджував Г. Г. Михайличенко [2], поставивши за мету знайти всі можливі "метрики", сумісні з вимогою існування аналітичного зв'язку для сукупності всіх "відстаней" у системі довільних $n+2$ точок. Але проблему знаходження відповідних універсальних співвідношень при цьому майже не розглядають, обмежившись аналізом залежності двоточкових інваріантів від координат, тобто звів аналіз проблеми знову до методів координатного підходу. Крім того, у [2] не врахував додаткові умови, які зазвичай накладаються на метрику (нерівність трикутника тощо). Тому отримані результати стосуються не метрики і відстаней, а деяких абстрактних метрикоподібних виразів взагалі, які самі по собі мають стосуватися справжньої метричної геометрії дуже умовно. Водночас через математичні труднощі точному аналізу піддаються лише простори з обмеженою кількістю вимірів ($n \leq 3$), через що не вдається розв'язати задачу загалом.

Серед досліджень у суміжних напрямках можна навести працю [3], де також введено та використано багатоточкові величини (т. зв. "метрики").

Виходячи з аналізу попередніх досліджень, сформулюємо мету цієї статті так: знайти явний вигляд максимально симетричних багатоточкових інваріантів у метричному просторі, враховуючи лише загальні властивості цих інваріантів, та вивести відповідні універсальні співвідношення для відстаней, беручи до уваги умови метричності (аксіоми метрики); показати, що властивості симетрії універсальних багатоточкових інваріантів разом з класичними аксіомами метрики повністю визначають геометрію просторів сталої кривини.

Симетрії універсальних інваріантів. Спочатку дамо визначення основних використовуваних понять.

Означення 1. Під універсальним багатоточковим інваріантом (даного метричного простору) розумітимемо функцію від сукупності відстаней у багатоточковій системі з фіксованою кількістю точок, яка не залежить від вибору цих точок у межах цього простору.

Очевидно, що існування таких інваріантів накладає на відстані у просторі (метрику) певні обмеження (в'язи) у вигляді універсальних співвідношень.

Означення 2. Співвідношення, що пов'язує міжточкові відстані в будь-якій багатоточковій системі з певною кількістю точок, називатимемо законом метричної в'язі (для даного простору).

Існування залежності між відстанями метричного простору, яка відповідає визначенню 2, випливає з таких міркувань. Системі довільних m точок відповідає сукупність $u = m(m-1)/2$ міжточкових відстаней, які визначаються $p = mn$ координатами цих точок за допомогою системи метричних співвідношень. За наявності у просторі певних симетрій можливі відповідні перетворення (або рухи) системи точок, що залишають всі відстані між ними незмінними. При цьому частина координат виконує функції параметрів перетворення, тобто не впливає на сукупність відстаней і може обиратися довільно. За однорідного та ізотропного простору кількість координат, які визначають сукупність відстаней у багатоточковій системі, скорочується на кількість параметрів руху цього простору (на кількість ступенів вільності твердого тіла), тобто $p = mn - n(n+1)/2$. У результаті при $m = n+2$ кількість всіх відстаней (і координатних виразів для них) перевищує кількість координат, від яких вони залежать, на одиницю:

$u = p+1$. Вирази для міжточкових відстаней утворюють систему з u параметричних рівнянь, у які як параметри входять p координатних змінних. Починаючи з $m = n+2$, кількість цих параметрів стає недостатньою, щоб забезпечити незалежність відстаней у багатоточковій системі ($p < u$). В разі виключення з параметричної системи $p+1$ рівнянь усіх p параметрів можна отримати єдине співвідношення, що пов'язує всі відстані в системі $n+2$ точок.

Отже, найпростіші багатоточкові системи, для яких можна сформулювати закон метричної в'язі та знайти відповідні універсальні інваріанти, мають складатися з $n+2$ точок. Така їх кількість для найпростішої метрично пов'язаної системи відповідає геометрії однорідного та ізотропного простору, оскільки зумовлена його симетріями.

Спробуємо знайти можливі вирази для закону метричної в'язі, використовуючи замість метрики та координат універсальні багатоточкові інваріанти та їх властивості згідно зі зробленими нижче припущеннями.

Припущення 1. Нехай у метричному просторі розмірності n існує універсальний багатоточковий інваріант V_{n+2} для системи $n+2$ точок, який залежить від усіх міжточкових відстаней.

Пронумеруємо ці точки цілими числами від 1 до $n+2$ та позначимо їх $P_1, P_2, \dots P_{n+2}$. Тоді парі точок $\{P_i, P_k\}$ для $\forall i,k = 1,2,\dots(n+2)$ відповідає відстань r_{ik}. Сукупність всіх відстаней багатоточкової системи утворює матрицю $R = \|r_{ik}\|$. На відстані r_{ik} накладаються аксіоми метрики:

$$r_{ik} = 0 \Leftrightarrow P_i = P_k, \tag{1}$$

$$r_{ik} = r_{ki}, \tag{2}$$

$$r_{ik} \le r_{ij} + r_{jk}, \tag{3}$$

з яких, зокрема, випливає невід'ємність цих величин. Крім того, аксіома (2) означає симетричність матриці R.

Згідно з припущенням 1 багатоточковий інваріант V_{n+2} є функція матриці відстаней r_{ik} (або залежних від них елементів). Нехай $\Lambda(A)$, $\Lambda'(A)$, ... $\Lambda^{(s)}(A)$ − лінійні функції рядків A_i або стовпців A^k матриці A. Найбільш загальну залежність інваріанта V_{n+2} від елементів матриці відстаней подамо у вигляді

$$V_{n+2}(R) = F(\Lambda(A), \Lambda'(A'), \dots \Lambda^{(s)}(A^{(s)})),$$

$$A^{(l)} = \|a_{ik}^{(l)}\| = \|f_{ik}^{(l)}(r_{ik})\|, \quad \forall l = 0,1,\dots s, \tag{4}$$

де F − довільна функція від s аргументів (кількість аргументів F не обмежується); $f_{ik}(r_{ik})$, $f'_{ik}(r_{ik})$, ... $f_{ik}^{(s)}(r_{ik})$ − довільні функції відстаней.

Залежність (4) можна значно спростити, якщо врахувати симетрії універсальних багатоточкових інваріантів, закладені в означенні 1. Візьмемо замість точок $\{P_1, P_2, \dots P_{n+2}\}$ іншу сукупність точок $\{P'_1, P'_2, \dots P'_{n+2}\}$, що $P'_i = P_k$ і $P'_k = P_i$ для деякої пари індексів $\{i,k\}$, а $P'_j = P_j$ − для $\forall j \ne i,k$. Універсальний інваріант V_{n+2} від цього не змінюється, а в матриці відстаней відбувається перестановка рядків та стовпців з індексами $\{i,k\}$, тобто

$$V_{n+2}(R_{i\leftrightarrow k}^{i\leftrightarrow k}) = V_{n+2}(R). \tag{5}$$

Рівність (5) описує переставлювальну симетрію інваріанта V_{n+2}, що виконується для будь-якої пари точок $\{P_i, P_k\}$ багатоточкової системи. З умови (5) випливає симетрія рядків та стовпців функцій $f_{ik}^{(l)}$ для всіх l, а також переставлювальна симетрія лінійних функцій $\Lambda^{(l)}(A^{(l)})$:

$$f_{ik}^{(l)} = f_{jk}^{(l)} = f_{jp}^{(l)} = f^{(l)}, \quad \forall i, j, k, p;$$

$$\Lambda(A_{i\leftrightarrow k}^{i\leftrightarrow k}) = \Lambda(A), \quad \Lambda'(A'^{i\leftrightarrow k}_{i\leftrightarrow k}) = \Lambda'(A'), \ \dots . \tag{6}$$

Останній результат дає можливість перейти до значно простішої залежності $V_{n+2}(R)$, для якої

$$A = \|a_{ik}\| = \|f(r_{ik})\|, \quad A' = \|a'_{ik}\| = \|f'(r_{ik})\|, \ \dots; \tag{7}$$

$$\Lambda(A_i, A_k) = \pm\Lambda(A_k, A_i), \quad \Lambda'(A'_i, A'_k) = \pm\Lambda'(A'_k, A'_i), \ \dots . \tag{8}$$

Для симетричних матриць (7) залежність функції $\Lambda^{(l)}$ від рядків та стовпців $A^{(l)}$ буде однакова. Під час перестановки лише рядків A_j або лише стовпців A^j допускається зміна знака $\Lambda(A)$ (8), яка компенсується за одночасної їх перестановки у виразах (6).

Припущення 2. Нехай інваріант V_{n+2} є елементарним, тобто відповідає мінімальній кількості точок і відстаней між ними, для яких існує універсальний багатоточковий інваріант.

Користуючись цим припущенням, розглянемо випадок, коли будь-які дві точки зі системи $\{P_1, P_2, \dots P_{n+2}\}$ збігаються. Нехай $P_k = P_i$ для довільних індексів i та k (якщо $i \neq k$). Тоді кількість точок скорочується на одиницю (а кількість відстаней − на $n+1$). Згідно з припущенням 2 універсально-інваріантна функція відстаней для такої системи точок існувати не може, але інваріант (4) повинен зберігати своє значення для будь-якого вибору точок. Це можливо тільки тоді, коли функція V_{n+2} вироджується в константу, якщо будь-які дві точки системи $\{P_1, P_2, \dots P_{n+2}\}$ збігаються. При $P_k = P_i$ i-ий та k-ий рядки (і стовпці) в матрицях R та (7) стають однаковими, отже, умова виродження V_{n+2} матиме вигляд

$$F(\Lambda(A), \Lambda'(A'), \dots \Lambda^{(s)}(A^{(s)})) \equiv C_{n+2},$$

$$\text{якщо } {A^{(l)}}_k = {A^{(l)}}_i, \ A^{(l)k} = A^{(l)i} \ (\forall l), \tag{9}$$

де C_{n+2} − константа, яка збігається зі значенням універсального інваріанта V_{n+2}. З умови (9) для різних $f^{(l)}$ отримуємо:

$$\Lambda^{(l)}(A^{(l)}) \equiv \Lambda_0^{(l)} = const, \qquad \text{якщо } {A^{(l)}}_k = {A^{(l)}}_i. \tag{10}$$

З умов (8) та (10) можна визначити функції $\Lambda^{(l)}(A^{(l)})$. Для довільної матриці B з двома однаковими рядками $B_k = B_i = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, фіксуючи всі інші рядки, можна записати:

$$\Lambda(B_i, B_k) = \Lambda(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{p} + \mathbf{q}) = \Lambda(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \Lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{q}),$$

де $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ − вектор-рядки. Ана0логічно для всіх інших $\Lambda^{(l)}$. З умови (10) маємо $\Lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \Lambda(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\Lambda_0$. Враховуючи властивість (8) і обираючи у всіх виразах знак «+», приходимо до тривіального результату $\Lambda(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \Lambda(B') = \mathrm{const}$. Тобто нетривіальні функції $\Lambda^{(l)}$ не можуть бути симетричними. Обираючи у виразах (8) знак «−», знаходимо для Λ умову сумісності $\Lambda_0 = 0$. Лінійна функція рядків матриці $\Lambda(B)$ з властивістю $\Lambda(\ldots\mathbf{p},\ldots\mathbf{p},\ldots) = \Lambda_0 = 0$ (або з властивістю антисиметричності) відрізняється від визначника цієї матриці ([4]) лише сталим множником $\Lambda(I)$. Останній поглинає функція F, тому як $\Lambda^{(l)}(A^{(l)})$ у виразі (4) залишаються тільки визначники $|A^{(l)}|$. Отже, маємо для V_{n+2} такі остаточні вирази:

$$V_{n+2}(R) = F(\Lambda(A), \Lambda(A'), \ldots\Lambda(A^{(s)})),$$

$$\Lambda(A^{(l)}) = \det(A^{(l)}), \quad \forall l = 0,1,\ldots s, \tag{11}$$

де функція F обмежується умовою $F(0,0,\ldots) \equiv C_{n+2}$ (9), оскільки при $P_k = P_i$ визначники перетворюють всі аргументи F на нулі.

Результат (11) має все ще досить загальний вигляд. Але в нашому дослідженні розглядатимемо лише найбільш симетричний випадок. Для цього зробимо додаткове припущення.

Припущення 3. Нехай інваріант V_{n+2}, записаний у формі (11), має такі додаткові симетрії, що визначники всіх матриць $A^{(l)}$, від яких він залежить, рівні між собою: $\det(A) = \det(A') = \ldots = \det(A^{(s)})$.

Останнє припущення дає можливість визначити загальний вигляд максимально симетричного інваріанта. Якщо всі аргументи функції F стають однаковими, то вона знову перетворюється на функцію одного аргументу Φ:

$$V_{n+2}(R) = \Phi(|A|) = C_{n+2}, \tag{12}$$

де $\Phi(x) = F(x, x, \ldots)$, а елементи матриць R та A пов'язані співвідношенням $a_{ik} = f(r_{ik})$. Зі співвідношення (12) очевидно, що $|A| = const$ для всіх $\Phi(|A|)$. Причому, якщо допускаються лише неперервні залежності елементів A від відстаней, то визначник $|A|$ може набувати тільки одне значення незалежно від кількості коренів рівняння (12). Це значення має бути нулем, оскільки при $P_k = P_i$ існують тотожності $|A| \equiv 0$, $\Phi(0) \equiv C_{n+2}$. Отже, рівний нулю визначник $|A|$ є еквівалентною формою запису інваріанта (12):

$$V'_{n+2}(R) = \det(A) = 0, \tag{13}$$

$$V_{n+2}(R) \leftrightarrow V'_{n+2}(R).$$

Таким чином, знайшли найпростішу форму запису для найсиметричнішого універсального інваріанта. Спробуємо тепер з'ясувати, яка неперервна залежність $a_{ik} = f(r_{ik})$ можлива в метричному просторі.

Отримання метричних співвідношень. Співвідношення для відстаней (13) можна також подати у вигляді

$$\begin{vmatrix} a'_{ik} & 1 \\ 1 & K \end{vmatrix} = 0, \quad \text{де } K = const \neq 0. \tag{14}$$

Щоб повернутися до форми (13), достатньо поділити останній стовпець (рядок) на K та відняти його від решти стовпців (рядків). Константа K може бути довільною, але відмінною від нуля. Однак очевидно, що вираз (14) задовольняє зроблені припущення і тоді, коли $K = 0$. Тому рівняння

(14) можна узагальнити, додавши до нього випадок $K = 0$. Отже, треба розглянути два випадки:

$$\text{a)} \quad |a_{ik}| = 0, \quad a_{ik} = f_K(r_{ik}); \tag{15}$$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} b_{ik} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad b_{ik} = f_0(r_{ik}). \tag{16}$$

Для подальшого аналізу знадобиться поняття геодезичної лінії, яку означимо як лінію мінімальної довжини. Таке означення придатне для використання у просторі зі заданими міжточковими відстанями і не потребує запровадження координат та зв'язності. Крім того, вважатимемо, що у просторі можлива звичайна процедура вимірювання відстаней, за якої відстань між двома точками знаходять як довжину найкоротшої кривої, що з'єднує ці точки (довжина геодезичної), і подають як суму довжин її відтинків.

У метричному просторі діють аксіоми (1)–(3). При цьому для точок на одній геодезичній лінії нерівність трикутника (3) переходить у рівність, забезпечуючи адитивний зв'язок між відстанями. Закон метричної в'язі (означення 2), який шукатимемо у формі (15) та (16), має виконуватись і для точок геодезичної, тобто за умови адитивного зв'язку міжточкових відстаней, що накладає дуже сильні обмеження на функції $f_K(r_{ik})$ та $f_0(r_{ik})$. Розберемо обмеження, які накладають аксіоми метрики на вирази (15) та (16), на прикладі одновимірного простору (точки якого лежать на його єдиній геодезичній).

В одновимірному просторі елементарний багатоточковий інваріант $V_{n+2}(R)$ та закон метричної в'язі $V_{n+2}(R) = 0$ запишемо для трьох точок ($n + 2 = 3$). Відстані між цими точками пов'язані адитивним законом (вимога метричності). Нехай P_1, P_2 та P_3 – довільні точки одновимірного метричного простору, пронумеровані в порядку їхнього розташування, тоді $r_{13} = r_{12} + r_{23}$. Запишемо вирази (15) та (16) для трьох точок, враховуючи цю умову:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_K(0) & f_K(r_{12}) & f_K(r_{12}+r_{23}) \\ f_K(r_{12}) & f_K(0) & f_K(r_{23}) \\ f_K(r_{12}+r_{23}) & f_K(r_{23}) & f_K(0) \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 1 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_0(0) & f_0(r_{12}) & f_0(r_{12}+r_{23}) & 1 \\ f_0(r_{12}) & f_0(0) & f_0(r_{23}) & 1 \\ f_0(r_{12}+r_{23}) & f_0(r_{23}) & f_0(0) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{18}$$

де також взято до уваги аксіоми (1) та (2). Якщо припустити, що $f_K(0) = 0$, то з рівняння (17) одразу ж знаходимо, що $f_K(r_{ik}) = 0$ для довільного r_{ik} (або $f_K(r_{ik}) \equiv 0$). Тобто відповідної залежності $f_K(r_{ik})$, сумісної з рівнянням (17), тут не існує. Тому рівняння (17) має сенс лише за умови $f_K(0) \neq 0$.

Якщо діагональні елементи $f_K(0)$ та $f_0(0)$ відмінні від нуля, то рівняння (17) та (18) легко звести до вигляду, де $f_K(0) = 1$, $f_0(0) = 0$ (у нових позначеннях). Розкриваючи утворені після цього визначники, отримуємо такі рівняння:

$$\text{a)} \quad f_K^2(r_{12}) + f_K^2(r_{23}) + f_K^2(r_{12}+r_{23}) - 2f_K(r_{12})f_K(r_{23})f_K(r_{12}+r_{23}) - 1 = 0, \tag{19}$$

$$\text{b)} \quad f_0^2(r_{12}) + f_0^2(r_{23}) + f_0^2(r_{12}+r_{23}) - 2f_0(r_{12})f_0(r_{23}) - \\ - 2f_0(r_{12})f_0(r_{12}+r_{23}) - 2f_0(r_{23})f_0(r_{12}+r_{23}) = 0. \tag{20}$$

Останні два вирази можна також записати як формули для функцій f_K та f_0 від суми аргументів:

$$\text{a)}\qquad f_K(r_{12}+r_{23}) = f_K(r_{12})f_K(r_{23}) \pm \sqrt{\left(f_K^2(r_{12})-1\right)\left(f_K^2(r_{23})-1\right)}\,, \tag{21}$$

$$\text{b)}\qquad f_0(r_{12}+r_{23}) = f_0(r_{12}) + f_0(r_{23}) \pm 2\sqrt{f_0(r_{12})f_0(r_{23})}\,. \tag{22}$$

Рівняння (19) та (20) або (21) та (22) є функціональними для функцій f_K та f_0 відповідно. Їх розв'язки визначають можливі залежності матричних елементів a_{ik} та b_{ik} від відстаней для відповідних триточкових інваріантів в одновимірному просторі.

Розглянемо спочатку функціональне рівняння для випадку (а). Функції $f_K(r_{ik})$ та $f_0(r_{ik})$ вважатимемо неперервними та гладкими. Щоб знайти загальний розв'язок функціонального рівняння (21), продиференціюємо його окремо за r_{12} та r_{23}:

$$f_K'(r_{12}+r_{23}) = \frac{f_K'(r_{12})}{\sqrt{f_K^2(r_{12})-1}}\left(f_K(r_{23})\sqrt{f_K^2(r_{12})-1} \pm f_K(r_{12})\sqrt{f_K^2(r_{23})-1}\right), \tag{23}$$

$$f_K'(r_{12}+r_{23}) = \frac{\pm f_K'(r_{23})}{\sqrt{f_K^2(r_{23})-1}}\left(f_K(r_{23})\sqrt{f_K^2(r_{12})-1} \pm f_K(r_{12})\sqrt{f_K^2(r_{23})-1}\right), \tag{24}$$

де штрих − похідна за аргументом функції f_K. Порівнюючи вирази (23) та (24) і обираючи в них знак "+", приходимо до диференційного рівняння для $f_K(r_{ik})$:

$$\frac{f_K'(r_{12})}{\sqrt{f_K^2(r_{12})-1}} = \frac{f_K'(r_{23})}{\sqrt{f_K^2(r_{23})-1}} = \frac{f_K'(r_{ik})}{\sqrt{f_K^2(r_{ik})-1}} = C_1\,. \tag{25}$$

Залежно від знака підкореневого виразу константа C_1 може бути дійсною або уявною. Значення $C_1 = 0$ відповідає виродженому розв'язку $f_K(r_{ik}) = const$ і тому відкидається. Вибір знака "−" не призводить до змістовного результату під час аналізу (23) та (24). У цьому випадку $f_K'(r_{ik}) = -f_K'(r_{ik}) = 0$ (для довільних r_{12} та r_{23}), тобто $f_K(r_{ik}) = const$.

Інтегруючи (25), знаходимо загальний вигляд функції $f_K(r_{ik})$:

$$f_K(r_{ik}) = ch(C_1 r_{ik} + C_0)\,. \tag{26}$$

З урахуванням крайової умови $f_K(0) = 1$ та області значень C_1 розв'язок (26) можна записати так:

$$a_{ik} = \mathrm{ch}(\kappa r_{ik}), \qquad \text{якщо } C_1 = \kappa\,; \tag{27}$$

$$a_{ik} = \cos(\kappa r_{ik}), \qquad \text{якщо } C_1 = i\kappa\,, \tag{28}$$

де κ − ненульова константа з множини дійсних чисел ($\kappa^2 > 0$).

Функціональне рівняння для випадку (b) розв'язуємо аналогічно. Диференціюємо (22) за незалежними змінними r_{12} та r_{23}:

$$f_0'(r_{12}+r_{23}) = \frac{f_0'(r_{12})}{\sqrt{f_0(r_{12})}}\left(\sqrt{f_0(r_{12})} \pm \sqrt{f_0(r_{23})}\right),$$

$$f_0'(r_{12}+r_{23}) = \pm\frac{f_0'(r_{23})}{\sqrt{f_0(r_{23})}}\left(\sqrt{f_0(r_{12})} \pm \sqrt{f_0(r_{23})}\right).$$

З отриманих виразів виводимо диференційне рівняння

$$\frac{f_0'(r_{12})}{\sqrt{f_0(r_{12})}} = \frac{f_0'(r_{23})}{\sqrt{f_0(r_{23})}} = \frac{f_0'(r_{ik})}{\sqrt{f_0(r_{ik})}} = C_1, \tag{29}$$

інтегруючи яке, знаходимо загальний вигляд функції $f_0(r_{ik})$:

$$f_0(r_{ik}) = \frac{1}{4}\left(C_1 r_{ik} + C_0\right)^2.$$

З урахуванням умови $f_0(0) = 0$, накладеної на діагональні елементи, одержаний результат можна записати так:

$$b_{ik} = \frac{1}{4}\left(C_1 r_{ik}\right)^2 = \pm\frac{1}{4}\kappa^2 r_{ik}^2, \tag{30}$$

де врахована можливість уявних та дійсних значень константи C_1 (κ або $i\kappa$, якщо $\kappa^2 > 0$). Множник перед r_{ik}^2 після підстановки (30) в (16) можна скоротити, тобто розв'язок (30) звести до виразу $b_{ik} = r_{ik}^2$.

Розв'язки (27), (28) та (30) дають можливість записати закон метричної в'язі для одновимірного простору у формі (15) та (16). При цьому всі три рівняння насправді виражають одне й те саме − адитивний зв'язок між відстанями, але в явному симетричному вигляді. Водночас не всі вони повністю рівноцінні. Розв'язок (28) на відміну від двох інших допускає два типи зв'язку між відстанями: $r_{13} = r_{12} + r_{23} + 2\pi l/\kappa$ та $r_{13} = 2\pi(l+1)/\kappa - r_{12} - r_{23}$, де $l = 0, 1, 2, \ldots$. Така взаємозалежність відстаней відповідає простору з топологією кола довжиною $2\pi/\kappa$, але за умови, що $r_{ik} \le \pi/\kappa$ (тобто, якщо покласти $l = 0$). Два інші розв'язки відповідають звичайній прямій.

Приклад одновимірного простору засвідчує, що вимога метричності дає можливість визначити залежність матричних елементів від відстаней у виразах (15) та (16). Цей висновок зроблено з аналізу триточкових інваріантів, але його можна поширити і на складніші випадки. Зі збільшенням розмірності кількість точок та незалежних змінних зростає і задача суттєво ускладнюється, але критерій пошуку розв'язків залишається той самий. На закон метричної в'язі (15) або (16) накладається умова адитивного зв'язку між відстанями, яка відповідає вибору точок простору на геодезичній, і шука.ють таку залежність матричних елементів від r_{ik}, яка задовольняє це рівняння. Знайдений так універсальний багатоточковий інваріант, що стоїть у лівій частині (15) або (16), зберігатиме своє значення на довільній геодезичній, тобто буде також інваріантом в одновимірному метричному просторі. Таким чином, у n-вимірному метричному просторі можливі лише такі універсальні інваріанти, які існують в одновимірному (тобто на прямій або колі).

Задача пошуку всіх можливих інваріантів пов'язана зі значними математичними труднощами. Але існує відносно простий спосіб знайти окремі інваріанти $V_{n+2}(R)$ для кожного n, спираючись на відомі результати. Розглянемо рівняння (15) та (16) для чотирьох точок ($i, k = 1, 2, 3, 4$; $n = 2$) і накладемо на них умови адитивного зв'язку відстаней $r_{13} = r_{12} + r_{23}$, $r_{24} = r_{23} + r_{34}$ та $r_{14} = r_{12} + r_{23} + r_{34}$. Підставляючи (27), (28) та (30) у вирази (15) та (16), не важко перевірити, що одержані раніше розв'язки задовольняють ці рівняння і тут. Відповідно закони (15) та (16) зі знайденими матричними елементами можна застосувати і до двовимірного простору, але з визначниками на одиницю більшого порядку (для чотирьох точок).

З іншого погляду, відповідні чотириточкові інваріанти доповнюють в одновимірному просторі аналогічні інваріанти для трьох точок, причому останні входять у чотириточкові інваріанти як мінори на одиницю меншого порядку. Можна піти далі і записати аналогічні визначники для п'яти точок, куди три- та чотириточкові інваріанти увійдуть як відповідні мінори. Рівність нулю цих мінорів в одновимірному просторі ($V_4 = V_3 = 0$) означає лінійну залежність їхніх рядків та стовпців і дає можливість перетворити п'ятиточковий визначник до вигляду, з якого стає очевидним, що він теж обертається в нуль:

$$\text{a)}\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15} \\ \vdots & \boxed{V_3} & \vdots \\ a_{51} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a'_{15} \\ \vdots & \boxed{V_3} & 0 \\ 0 & & \vdots \\ a'_{51} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -a'_{15}a'_{51}V_3 = 0\,. \qquad (31)$$

Аналогічний результат отримуємо і для випадку (b). Цей результат не залежить від порядку визначника і його можна записти як рекурсивне співвідношення $V_{n+2}(V_{n+1} = V_n = 0) = 0$ для будь-якого n. Як наслідок, в одновимірному метричному просторі існує ціла система універсальних багатоточкових інваріантів, які узагальнюють знайдені триточкові за довільної кількості точок:

$$\text{a)}\qquad V_{n+2} = \left|a_{ik}\right|_{i,k=1}^{n+2} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,; \qquad (32)$$

$$\text{b)}\qquad V_{n+2} = \begin{vmatrix} b_{ik} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{i,k=1}^{n+2} = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad (33)$$

де матричні елементи a_{ik} та b_{ik} визначають вирази (27), (28) та (30). Ці ж інваріанти можна застосовувати у n-вимірному метричному просторі, для якого співвідношення (32) та (33) у кожному конкретному випадку задають нетривіальний закон метричної в'язі.

Вирази (32) та (33), записані для багатовимірних просторів, розкривають ще один вид симетрій універсальних багатоточкових інваріантів: матричні елементи інваріантних визначників можуть бути однаковими для просторів всіх можливих розмірностей. З урахуванням цієї властивості інваріанти (32) та (33) можна отримати як наслідок існування певного набору симетрій. Для цього достатньо додатково зажадати, щоб у визначниках інваріантів для просторів різних розмірностей збігались провідні головні мінори третього порядку (*припущення 4*): $V_{n+2}\left[\begin{smallmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{smallmatrix}\right] = V_3\left[\begin{smallmatrix}1,2,3\\1,2,3\end{smallmatrix}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тоді універсальні інваріанти, що відповідають всім зробленим припущенням, матимуть вигляд (32) та (33).

Окрім елементарного інваріанта V_{n+2}, в n-вимірному просторі можуть існувати і складніші універсальні інваріанти. Якщо вони незалежні, то закон метричної в'язі доповниться додатковими співвідношеннями. Наприклад, можна припустити, що в n-вимірному просторі існує також інваріант V_{n+3}, аналогічний елементарному (визначник з такими ж матричними елементами). Цей інваріант має ті самі симетрії, що і V_{n+2}, та забезпечує можливість вкладення даного n-вимірного простору в простір розмірності $n+1$ з елементарним інваріантом V_{n+3}. Крім того, за допомогою тих самих міркувань, що і під час виведення співвідношення (31), можна довести існування в цьому просторі системи інваріантів V_{k+2} для $\forall k \geq n$ ($k \in \mathbb{N}$).

Отримані співвідношення залежно від вигляду матричних елементів діляться на три групи і збігаються з відомими виразами для однорідних та ізотропних просторів [5]. Співвідношення (32) відповідає просторам сталої ненульової кривини, рівної $\pm\kappa^2$. Матричні елементи a_{ik} задає формула (27), якщо кривина позитивна, і формулою (28), якщо негативна. Співвідношення (33), де матричні елементи мають вигляд $b_{ik} = r_{ik}^2$, відповідає евклідовим просторам.

Висновки

Виходячи лише з припущень про існування та властивості симетрії універсальних багатоточкових інваріантів і враховуючи аксіоми метрики, вдається знайти явний вигляд цих інваріантів у n-вимірному метричному просторі та вивести відповідні співвідношення для відстаней, названі законами метричної в'язі. Але зроблені тут припущення надто обмежують загальний вигляд багатоточкових інваріантів і відповідають (у сукупності) лише просторам сталої кривини ріманової геометрії.

Припущення про існування у просторі універсального інваріанта V_{n+2} (саме для $n+2$ точок) вже саме по собі накладає на геометрію дуже сильні обмеження, оскільки передбачає просторову однорідність та ізотропію. Застосовуючи додаткові умови і симетрії, можна визначити явний вигляд інваріанта V_{n+2} і ще більше конкретизувати відповідні властивості простору. Для цього початковий вираз для V_{n+2}, на який накладають обмежувальні умови, обирають у зручному, але достатньо загальному для подальшого аналізу вигляді.

Перелічимо всі використані симетрії універсальних інваріантів, а також властивості простору, яким вони відповідають.

Перше припущення накладає на інваріант $V_{n+2}(R)$ переставляльні симетрії (5) для всіх пар точок. Ці симетрії відповідають однорідним та ізотропним просторам і виникають через те, що універсальні інваріанти для $n+2$ точок, існування яких допускають ці простори, залежать від усіх міжточкових відстаней.

Друге припущення доповнює перше і відповідає елементарному інваріанту в однорідному та ізотропному просторі. Воно передбачає достатньо симетричну структуру $V_{n+2}(R)$ для виконання умови виродження (9). З урахуванням переставляльних симетрій це означає залежність V_{n+2} лише від визначників типу $|f(r_{ik})|$.

Першими двома припущеннями природні для універсальних інваріантів симетрії повністю вичерпуються. Але вказаних симетрій виявилось недостатньо, щоб визначити явний вигляд $V_{n+2}(R)$. Цю невизначеність можна пов'язати з можливістю використання в метричному просторі більш загальної форми метрики, ніж квадратична (для останньої геометрія ізотропного простору повністю визначена). Невизначеність, що залишилась, усувають після накладання додаткових умов, які забезпечують максимальну симетризацію інваріантів V_{n+2}.

Симетрії третього припущення щодо структурних елементів загальної залежності $V_{n+2}(R)$ дають можливість подати універсальні інваріанти як визначники і застосувати умови метричності для знаходження триточкових інваріантів в одновимірному просторі. Симетричніший вигляд багатоточкових інваріантів відповідає вужчому колу ізотропних метричних просторів, проте не обов'язково просторам сталої кривини.

Ще одна додаткова умова (четверте припущення) встановлює симетрії для структурних елементів інваріантів V_{n+2}, що відповідають просторам різних розмірностей. Це дає можливість поширити результати, отримані для одновимірного простору, на простори всіх інших розмірностей. Три групи отриманих інваріантів відповідають багатовимірним просторам сталої кривини трьох можливих типів.

Одержані результати дають можливість поглянути на елементарні геометрії, які описують простори сталої кривини, з іншого боку. Існування в даному просторі закону метричної в'язі у вигляді (32) або (33) для кількості точок $n+2$ і більше означає його повну геометричну конгруентність відповідному простору сталої кривини, ([5]), тобто ці співвідношення тягнуть за собою всю систему елементарної геометрії. У свою чергу в основі цих співвідношень лежать перелічені симетрії універсальних багатоточкових інваріантів і аксіоми метрики. Таким чином, вимога існування в метричному просторі максимально симетричних універсальних інваріантів для $n+2$ та $n+3$ точок автоматично задає в цьому просторі елементарну геометрію, тип якої визначає вигляд конкретного інваріанта. Отже, симетрії багатоточкових інваріантів, визначені під час дослідження, еквівалентні за наслідками груповим симетріям однорідного та ізотропного простору з квадратичною формою метрики.

Наостанок варто зазначити, що підхід універсальних багатоточкових інваріантів залишає багато місця для розвитку. Сформулюємо перелік перспективних питань.

1) Побудова для даного ізотропного простору повної системи універсальних інваріантів і визначення серед них фундаментальних.

2) Побудова повної системи універсальних інваріантів для однорідних та ізотропних метричних просторів (не тільки ріманових).

3) Знаходження метрики, що відповідає даній системі інваріантів.

4) Визначення симетрій багатоточкових інваріантів, що відповідають всім можливим груповим симетріям метричного простору.

5) Знаходження універсальних інваріантів у довільному метричному просторі ріманової геометрії.

6) Визначення максимально симетричних інваріантів для простору псевдовідстаней з неадитивною умовою їх зв'язку в одновимірному випадку.

Цим переліком коло можливих задач не обмежується. Багатоточковий підхід ставить питання про існування і знаходження універсальних інваріантів для будь-якого метричного, напівметричного або іншого простору, для якого задана функція "відстаней", у тому числі і тоді, коли неперервність множини точок цього простору не передбачається.

1. *Владимиров Ю. С.* Основания физики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 456 с.
2. *Михайличенко Г. Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012. – 146 с.
3. *Пелых В. А., Скоробогатько В. Я.* Многоточечная геометрия в кристаллографии // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1992. – № 5. – С. 64–73.
4. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: МЦНМО, 2015. – 576 с.
5. *Blumenthal L. M.* Theory and applications of distance geometry. – New York: Chelsea Publishing Company, 1970. – 347 p.
6. *Liberti L., Lavor C., Maculan N., and Mucherino A.* Euclidean Distance Geometry and Applications // SIAM Review. – 2014. – **56**, № 1. – P. 3–69 (arXiv:1205.0349)

О СИММЕТРИЯХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ МНОГОТОЧЕЧНЫХ ИНВАРИАНТОВ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВАНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Введено понятие универсальных многоточечных инвариантов n-мерного метрического пространства. Определены свойства симметрии этих инвариантов в однородных и изотропных римановых пространствах и найден их явный вид для *каждого типа кривизны. Показано, что пространствам постоянной кривизны соответствуют максимально симметричные инварианты. Существование в пространстве таких универсальных инвариантов обеспечивает выполнение метрических соотношений, которые задают соответствующую элементарную геометрию. Использованный многоточечный подход оставляет много возможностей для развития и дальнейших исследований.*

ON SYMMETRIES OF UNIVERSAL MULTIPOINT INVARIANTS UNDERLYING ELEMENTARY GEOMETRIES

The notion of universal multipoint invariants of n-dimensional metric space is introduced. The symmetry properties of these invariants in homogeneous and isotropic Riemann spaces are determined and their explicit form for each type of curvature is found. It is shown that invariants, which correspond to spaces of constant curvature, are maximally symmetric. The existence of such universal invariants in the space provides fulfillment of metric relations which define the corresponding elementary geometry. Used multipoint approach suggests much case for development and further research.

ТОВ «ДДЗ «Енергоавтоматика»,
Дніпропетровськ

Одержано
24.06.15