УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

ПРО НЕОСОБЛИВІ РОЗВ’ЯЗКИ ОДНОГО ТИПУ СИСТЕМ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто системи матричних рівнянь з трьома невідомими. Знайдено умови існування розв’язків цих систем з неособливими двома компонентами. Вказано метод їх побудови.

Розв’язування матричних рівнянь має давню історію. Різні їх типи та системи виникають у багатьох галузях математики. Їх широко застосовують в окремих прикладних задачах, особливо в задачах оптимізації режимів керування лінійних динамічних систем з оберненим зв’язком. Одним з напрямків у дослідженні матричних рівнянь є пошук умов існування та знаходження спеціальних їх розв’язків, тобто таких, які мають певні специфічні властивості. Наприклад, у праці [4] розглядали задачу існування ермітових невід’ємно визначених розв’язків систем одночленних матричних рівнянь над полем комплексних чисел. Трикутним розв’язкам рівняння $X^2 = 0$ над скінченним полем присвячена праця [3]. Запропоновано [2] метод побудови розв’язків мінімальних степенів матричних односторонніх діофантових поліноміальних рівнянь над довільним полем. В працях Ванга подано спільні розв’язки декількох одночленних матричних рівнянь над деякими класами кілець. (див., наприклад, [5]).

Нижче для одного типу систем матричних лінійних рівнянь над нескінченним полем наведено необхідні та достатні умови існування розв’язків з неособливими двома компонентами. Вказано метод їх побудови.

Нехай F − нескінченне поле. Використовуємо стандартні позначення: $M(k, F)$ − множина квадратних матриць порядку k над F; $GL(k, F)$ − повна лінійна група порядку k над F; E − одинична матриця порядку k. Введемо до розгляду деяку функцію f, визначену на множині блочних матриць $H = \left\| H_{ij} \right\|_1^p \in M(kp, F)$, де $H_{ij} \in M(k, F)$, із значеннями у множині $M(k, F)$. Назвемо цю функцію *псевдовизначником індексу* k і позначимо $f(H) = \operatorname{pdet}_k H$. Для $(2k \times 2k)$-матриці $\left\| H_{ij} \right\|_1^2$ за означенням $\operatorname{pdet}_k \left\| H_{ij} \right\|_1^2 = H_{11}H_{22} - H_{21}H_{12}$. Якщо задано матрицю $\left\| H_{ij} \right\|_1^3$ з блоками H_{ij} порядку k, то за означенням

$$\operatorname{pdet}_k \left\| H_{ij} \right\|_1^3 = H_{11} \operatorname{pdet}_k \begin{Vmatrix} H_{22} & H_{23} \\ H_{32} & H_{33} \end{Vmatrix} - H_{21} \operatorname{pdet}_k \begin{Vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{32} & H_{33} \end{Vmatrix} + H_{31} \operatorname{pdet}_k \begin{Vmatrix} H_{12} & H_{13} \\ H_{22} & H_{23} \end{Vmatrix}.$$

За індукцією визначаємо $\operatorname{pdet}_k \left\| H_{ij} \right\|_1^p$, $H_{ij} \in M(k, F)$, за формулою

$$\operatorname{pdet}_k \left\| H_{ij} \right\|_1^p = H_{11}M_{11} - H_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{p-1} H_{p1}M_{p1},$$

де M_{i1} − блочна матриця порядку $k(p-1)$, одержана з $\left\| H_{ij} \right\|_1^p$ викресленням її першого блочного стовпця та i-го блочного рядка.

Очевидно, що $\operatorname{pdet}_1 H = \det H$ для довільної матриці $H \in M(p, F)$. Неважко показати також, що від перестановки блочних рядків матриці знак її псевдовизначника змінюється на протилежний. Збігаються також і деякі інші властивості визначника. Однак це не стосується, наприклад, перестановки блочних стовпців або операцій транспонування чи блочного транспонування матриці. Разом з тим зауважимо, що введена тут функція f є лише допоміжним засобом для викладу основного результату. Вона хоч і успадковує деякі риси визначника, але не має нічого спільного з відомою задачею побудови аналога визначника для матриць над некомутативним кільцем [1].

Далі розглянемо систему матричних рівнянь вигляду

$$\left.\begin{array}{l} XA_{i0} - B_{i0}Y = 0, \\ XA_{i1} - B_{i1}Y = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ XA_{i,\, m_i-1} - B_{i,\, m_i-1}Y = 0, \\ XA_{i,\, m_i} - B_{i,\, m_i}Y - B_{i0}ZA_{i0} = 0, \\ XA_{i,\, m_i+1} - B_{i,\, m_i+1}Y - (B_{i1}ZA_{i0} + B_{i0}ZA_{i1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ XA_{i,\, m_i+l_i} - B_{i,\, m_i+l_i}Y - \sum\limits_{u=0}^{l_i} B_{i,\, l_i-u}ZA_{iu} = 0, \\ i = 1, \dots, s, \quad l_i \ge 1. \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Тут $A_{ij}, B_{ij} \in M(k, F)$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, m_i + l_i$, $A_{i0}, B_{i0} \in GL(k, F)$ − відомі матриці; X, Y, Z − невідомі $(k \times k)$-матриці. Ставиться задача про існування та знаходження такого розв'язку $(X, Y, Z) = (X_0, Y_0, Z_0)$ системи (1), що $X_0, Y_0 \in GL(k, F)$.

Теорема. *Щоб система* (1), *де* $A_{i0}, B_{i0} \in GL(k, F)$, *мала розв'язок* $(X, Y, Z) = (X_0, Y_0, Z_0)$, *де* $X_0, Y_0 \in GL(k, F)$, *необхідно і достатньо, щоб були подібні набори матриць*

$$D(A) = (D_{i1}(A), \dots, D_{i,\, m_i-1}(A), D_{i,\, m_i+1}(A), \dots, D_{i,\, m_i+l_i}(A), D_i(A)),$$

$$D(B) = (D_{i1}(B), \dots, D_{i,\, m_i-1}(B), D_{i,\, m_i+1}(B), \dots, D_{i,\, m_i+l_i}(B), D_i(B)),$$

де

$$D_{ij}(A) = \mathrm{pdet}_k \begin{Vmatrix} A'_{i1} & A'_{i2} & \dots & A'_{i,\, j-1} & A'_{ij} \\ E & A'_{i1} & \dots & A'_{i,\, j-2} & A'_{i,\, j-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & A'_{i1} & A'_{i2} \\ \mathbf{0} & & & E & A'_{i1} \end{Vmatrix},$$

$$D_{ij}(B) = \mathrm{pdet}_k \begin{Vmatrix} B'_{i1} & B'_{i2} & \dots & B'_{i,\, j-1} & B'_{ij} \\ E & B'_{i1} & \dots & B'_{i,\, j-2} & B'_{i,\, j-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & B'_{i1} & B'_{i2} \\ \mathbf{0} & & & E & B'_{i1} \end{Vmatrix},$$

$A'_{ij} = A_{ij}A_{i0}^{-1}$, $B'_{ij} = B_{ij}B_{i0}^{-1}$, $D_i(A) = A'_{1,\, m_1} - A_{10}A_{i0}^{-1}A'_{i,\, m_i}$, $D_i(B) = B'_{1,\, m_1} - B_{10}B_{i0}^{-1}B'_{i,\, m_i}$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, m_i + l_i$. *Якщо вказані умови виконані, тобто*

$$D(A) = P^{-1}D(B)P \tag{2}$$

для деякої матриці $P \in GL(k, F)$, *то шуканий розв'язок* (X_0, Y_0, Z_0) *можна знайти за формулами*

$$X_0 = P, \quad Y_0 = B_{i0}^{-1}PA_{i0}, \quad Z_0 = B_{i0}^{-1}(PA'_{i,\,m_i} - B'_{i,\,m_i}P).$$

Доведення. Необхідність. Нехай потрібний розв'язок (X_0, Y_0, Z_0) системи (1) існує. Тоді з рівностей

$$\left.\begin{array}{l} X_0A_{i0} - B_{i0}Y_0 = 0, \\ X_0A_{i1} - B_{i1}Y_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_0A_{i,\,m_i-1} - B_{i,\,m_i-1}Y_0 = 0, \\ i = 1, \dots, s \end{array}\right\} \tag{3}$$

отримуємо:

$$B_{i0}^{-1}X_0 - Y_0A_{i0}^{-1} = 0, \tag{4}$$

$$X_0A'_{ij} - B'_{ij}B_{i0}Y_0A_{i0}^{-1} = 0, \tag{5}$$

де $A'_{ij} = A_{ij}A_{i0}^{-1}$, $B'_{ij} = B_{ij}B_{i0}^{-1}$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, m_i - 1$. Оскільки, як видно з (4), $B_{i0}^{-1}X_0 = Y_0A_{i0}^{-1}$, то з рівностей (5) маємо:

$$A'_{ij} = X_0^{-1}B'_{ij}X_0, \; i = 1, \dots, s, \; j = 1, \dots, m_i - 1.$$

На основі цього індукцією за індексом j дістаємо, що $D_{ij}(A) = X_0^{-1}D_{ij}(B)X_0$ для всіх $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, m_i - 1$.

З рівностей

$$X_0A_{i,\,m_i} - B_{i,\,m_i}Y_0 - B_{i0}Z_0A_{i0} = 0, \tag{6}$$

$$X_0A_{i,\,m_i+1} - B_{i,\,m_i+1}Y_0 - (B_{i1}Z_0A_{i0} + B_{i0}Z_0A_{i1}) = 0$$

виключенням Z_0, враховуючи співвідношення (4) і

$$X_0A_{i1} = B_{i1}Y_0, \tag{7}$$

якщо $m_i > 1$, отримуємо:

$$X_0(A_{i,\,m_i+1} - A_{i1}A_{i0}^{-1}A_{i,\,m_i} - A_{i,\,m_i}A_{i0}^{-1}A_{i1}) = (B_{i,\,m_i+1} - B_{i1}B_{i0}^{-1}B_{i,\,m_i} - B_{i,\,m_i}B_{i0}^{-1}B_{i1})Y_0.$$

Звідси, помноживши справа обидві частини рівності на A_{i0}^{-1} і враховуючи $Y_0A_{i0}^{-1} = B_{i0}^{-1}X_0$, приходимо до співвідношення

$$A'_{i,\,m_i+1} - A'_{i1}A'_{i,\,m_i} - A'_{i,\,m_i}A'_{i1} = X_0^{-1}(B'_{i,\,m_i+1} - B'_{i1}B'_{i,\,m_i} - B'_{i,\,m_i}B'_{i1})X_0, \tag{8}$$

де $A'_{i,\,m_i} = A_{i,\,m_i}A_{i0}^{-1}$, $B'_{i,\,m_i} = B_{i,\,m_i}B_{i0}^{-1}$, $A'_{i,\,m_i+1} = A_{i,\,m_i+1}A_{i0}^{-1}$, $B'_{i,\,m_i+1} = B_{i,\,m_i+1}B_{i0}^{-1}$. Нескладно обчислити

$$D_{i,\,m_i}(A) = A'_{i1}D_{i,\,m_i-1}(A) - A'_{i2}D_{i,\,m_i-2}(A) + \dots + (-1)^{m_i-2}A'_{i,\,m_i-1}D_{i1}(A) + \\ +(-1)^{m_i-1}A'_{i,\,m_i}, \tag{9}$$

$$D_{i,\,m_i}(B) = B'_{i1}D_{i,\,m_i-1}(B) - B'_{i2}D_{i,\,m_i-2}(B) + \dots + (-1)^{m_i-2}B'_{i,\,m_i-1}D_{i1}(B) + \\ +(-1)^{m_i-1}B'_{i,\,m_i}, \tag{10}$$

$$D_{i,\,m_i+1}(A) = A'_{i1}D_{i,\,m_i}(A) - A'_{i2}D_{i,\,m_i-1}(A) + \dots + (-1)^{m_i-1}A'_{i,\,m_i}D_{i1}(A) +$$

$$+(-1)^{m_i} A'_{i,\, m_i+1}\,, \qquad (11)$$

$$D_{i,\, m_i+1}(B) = B'_{i1} D_{i,\, m_i}(B) - B'_{i2} D_{i,\, m_i-1}(B) + \cdots + (-1)^{m_i-1} B'_{i,\, m_i} D_{i1}(B) +$$
$$+(-1)^{m_i} B'_{i,\, m_i+1}\,. \qquad (12)$$

Підставляючи (9) і (10) відповідно у (11) і (12) та враховуючи, що $D_{i1}(A) = A'_{i1}$, $D_{i1}(B) = B'_{i1}$, запишемо отримані рівності у вигляді

$$D_{i,\, m_i+1}(A) = (-1)^{m_i-1}(A'_{i1} A'_{i,\, m_i} + A'_{i,\, m_i} A'_{i1} - A'_{i,\, m_i+1}) + C_1(A)\,,$$

$$D_{i,\, m_i+1}(B) = (-1)^{m_i-1}(B'_{i1} B'_{i,\, m_i} + B'_{i,\, m_i} B'_{i1} - B'_{i,\, m_i+1}) + C_1(B)\,,$$

де в доданках $C_1(A)$, $C_1(B)$ фігурують A'_{ij}, $D_{ij}(A)$, B'_{ij}, $D_{ij}(B)$ з індексами $j < m_i$. Оскільки за доведеним $C_1(A) = X_0^{-1} C_1(B) X_0$, то, беручи до уваги (8), маємо:

$$D_{i,\, m_i+1}(A) = X_0^{-1} D_{i,\, m_i+1}(B) X_0\,.$$

Зі співвідношень (6) і

$$X_0 A_{i,\, m_i+2} - B_{i,\, m_i+2} Y_0 - (B_{i2} Z_0 A_{i0} + B_{i1} Z_0 A_{i1} + B_{i0} Z_0 A_{i2}) = 0$$

виключенням Z_0 приходимо до співвідношення

$$X_0 A_{i,\, m_i+2} - B_{i,\, m_i+2} Y_0 - B_{i2} B_{i0}^{-1} X_0 A_{i,\, m_i} + B_{i2} B_{i0}^{-1} B_{i,\, m_i} Y_0 -$$
$$-B_{i1} B_{i0}^{-1} X_0 A_{i,\, m_i} A_{i0}^{-1} A_{i1} + B_{i1} B_{i0}^{-1} Y_0 A_{i0}^{-1} A_{i1} - X_0 A_{i,\, m_i} A_{i0}^{-1} A_{i2} + B_{i,\, m_i} Y_0 A_{i0}^{-1} A_{i2} = 0\,.$$

З останнього, враховуючи (4), (7) і $X_0 A_{i2} = B_{i2} Y_0$, якщо $m_i > 2$, маємо рівність

$$X_0 (A_{i,\, m_i+2} - A_{i2} A_{i0}^{-1} A_{i,\, m_i} - A_{i,\, m_i} A_{i0}^{-1} A_{i2} - A_{i1} A_{i0}^{-1} A_{i,\, m_i} A_{i0}^{-1} A_{i1}) =$$
$$= (B_{i,\, m_i+2} - B_{i2} B_{i0}^{-1} B_{i,\, m_i} - B_{i,\, m_i} B_{i0}^{-1} B_{i2} - B_{i1} B_{i0}^{-1} B_{i,\, m_i} B_{i0}^{-1} B_{i1}) Y_0\,.$$

Якщо помножити справа обидві частини цієї рівності на A_{i0}^{-1} і врахувати (4), то можна записати:

$$A'_{i,\, m_i+2} - A'_{i2} A'_{i,\, m_i} - A'_{i,\, m_i} A'_{i2} - A'_{i1} A'_{i,\, m_i} A'_{i1} =$$
$$= X_0^{-1} (B'_{i,\, m_i+2} - B'_{i2} B'_{i,\, m_i} - B'_{i,\, m_i} B'_{i2} - B'_{i1} B'_{i,\, m_i} B'_{i1}) X_0\,. \qquad (13)$$

Обчислимо вирази для $D_{i,\, m_i+2}(A)$ і $D_{i,\, m_i+2}(B)$:

$$D_{i,\, m_i+2}(A) = A'_{i1} D_{i,\, m_i+1}(A) - A'_{i2} D_{i,\, m_i}(A) + \cdots + (-1)^{m_i-1} A'_{i,\, m_i} D_{i2}(A) +$$
$$+(-1)^{m_i} A'_{i,\, m_i+1} D_{i1}(A) + (-1)^{m_i+1} A'_{i,\, m_i+2}\,, \qquad (14)$$

$$D_{i,\, m_i+2}(B) = B'_{i1} D_{i,\, m_i+1}(B) - B'_{i2} D_{i,\, m_i}(B) + \cdots + (-1)^{m_i-1} B'_{i,\, m_i} D_{i2}(B) +$$
$$+(-1)^{m_i} B'_{i,\, m_i+1} D_{i1}(B) + (-1)^{m_i+1} B'_{i,\, m_i+2}\,. \qquad (15)$$

Віднімемо від обох частин рівностей (14) і (15) вирази $A'_{i1} D_{i,\, m_i+1}(A) + D_{i,\, m_i+1}(A) A'_{i1}$ і $B'_{i1} D_{i,\, m_i+1}(B) + D_{i,\, m_i+1}(B) B'_{i1}$ відповідно. Отримані співвідношення запишемо у вигляді

$$D_{i,\, m_i+2}(A) - A'_{i1} D_{i,\, m_i+1}(A) - D_{i,\, m_i+1}(A) A'_{i1} =$$
$$= (-1)^{m_i} (A'_{i1} A'_{i,\, m_i} A'_{i1} + A'_{i,\, m_i} A'_{i2} + A'_{i2} A'_{i,\, m_i} - A'_{i,\, m_i+2}) + C_2(A)\,, \qquad (16)$$

$$D_{i,\, m_i+2}(B) - B'_{i1} D_{i,\, m_i+1}(B) - D_{i,\, m_i+1}(B) B'_{i1} =$$
$$= (-1)^{m_i} (B'_{i1} B'_{i,\, m_i} B'_{i1} + B'_{i,\, m_i} B'_{i2} + B'_{i2} B'_{i,\, m_i} - B'_{i,\, m_i+2}) + C_2(B)\,, \qquad (17)$$

де в доданках $C_2(A)$, $C_2(B)$ фігурують A'_{ij}, $D_{ij}(A)$, B'_{ij}, $D_{ij}(B)$ з індексами $j < m_i$. За доведеним $C_2(A) = X_0^{-1} C_2(B) X_0$ і

$$(A'_{i1}D_{i,\,m_i+1}(A),\, D_{i,\,m_i+1}(A)A'_{i1}) = X_0^{-1}((B'_{i1}D_{i,\,m_i+1}(B),\, D_{i,\,m_i+1}(B)B_{i1}))X_0\,.$$

Тому, зважаючи на співвідношення (13), приходимо до подібності

$$D_{i,\,m_i+2}(A) = X_0^{-1}D_{i,\,m_i+2}(B)X_0\,.$$

Далі аналогічно показуємо, що

$$D_{i,\,m_i+3}(A) = X_0^{-1}D_{i,\,m_i+3}(B)X_0$$

і т.д.

Застосовуючи індукцію, в кінцевому підсумку приходимо до подібності

$$D_{i,\,m_i+l_i}(A) = X_0^{-1}D_{i,\,m_i+l_i}(B)X_0\,.$$

Розглянемо тепер рівності (6) для $i=1$ і для довільного $i=2,\ldots,s$ і виключимо з них Z_0. Отримаємо

$$B_{10}^{-1}X_0A_{1,\,m_1}A_{10}^{-1} - B_{10}^{-1}B_{1,\,m_1}Y_0A_{10}^{-1} = B_{i0}^{-1}X_0A_{i,\,m_i}A_{i0}^{-1} - B_{i0}^{-1}B_{i,\,m_i}Y_0A_{i0}^{-1}\,,$$

а враховуючи (4), можна записати:

$$Y_0(A_{10}^{-1}A_{1,\,m_1}A_{10}^{-1} - A_{i0}^{-1}A_{i,\,m_i}A_{i0}^{-1}) = (B_{10}^{-1}B_{1,\,m_1}B_{10}^{-1} - B_{i0}^{-1}B_{i,\,m_i}B_{i0}^{-1})X_0\,.$$

Якщо помножити зліва обидві частини останньої рівності на B_{10} і взяти до уваги при цьому перше співвідношення із (3) для $i=1$, то в позначеннях теореми дістанемо, що

$$D_i(A) = X_0^{-1}D_i(B)X_0\,.$$

Цим необхідність доведена.

Достатність. Нехай виконуються умови теореми. Тоді з рівності (2) маємо:

$$(D_{i1}(A),\ldots,D_{i,\,m_i-1}(A)) = P^{-1}(D_{i1}(B),\ldots,D_{i,\,m_i-1}(B))P\,. \tag{18}$$

Звідси послідовно отримуємо

$$A'_{i1} = P^{-1}B'_{i1}P,\ \ldots,\ A'_{i,\,m_i-1} = P^{-1}B'_{i,\,m_i-1}P \tag{19}$$

для деякої неособливої матриці P. Позначивши

$$X_0 = P,\quad Y_0 = B_{i0}^{-1}PA_{i0}\,, \tag{20}$$

з (19) маємо рівності (3).

На першому кроці з рівності

$$D_{i,\,m_i+1}(A) = P^{-1}D_{i,\,m_i+1}(B)P\,,$$

враховуючи розклади (11), (12) для $D_{i,\,m_i+1}(A)$ і $D_{i,\,m_i+1}(B)$ та рівності (18), (19), маємо:

$$A'_{i,\,m_i+1} - A'_{i1}A'_{i,\,m_i} - A'_{i,\,m_i}A'_{i1} = P^{-1}(B'_{i,\,m_i+1} - B'_{i1}B'_{i,\,m_i} - B'_{i,\,m_i}B'_{i1})P\,.$$

Звідси, беручи до уваги (20) і доведені рівності (3), можемо записати:

$$X_0A_{i,\,m_i+1} - B_{i,\,m_i+1}Y_0 - B_{i1}B_{i0}^{-1}(X_0A_{i,\,m_i} - B_{i,\,m_i}Y_0) - (X_0A_{i,\,m_i} - B_{i,\,m_i}Y_0)A_{i0}^{-1}A_{i1} = 0\,. \tag{21}$$

За умовами теореми

$$D_i(A) = P^{-1}D_i(B)P\,,$$

тобто

$$PA_{i0}(A_{10}^{-1}A_{1,\,m_1}A_{10}^{-1} - A_{i0}^{-1}A_{i,\,m_i}A_{i0}^{-1}) = B_{10}(B_{10}^{-1}B_{1,\,m_1}B_{10}^{-1} - B_{i0}^{-1}B_{i,\,m_i}B_{i0}^{-1})P\,.$$

Звідси на основі рівностей (3) і позначень (20) одержуємо:

$$B_{i0}^{-1}(X_0A_{i,\,m_i} - B_{i,\,m_i}Y_0)A_{i0}^{-1} = B_{10}^{-1}(X_0A_{1,\,m_1} - B_{1,\,m_1}Y_0)A_{10}^{-1}\,.$$

Це означає, що вираз $B_{i0}^{-1}(X_0A_{i,\,m_i} - B_{i,\,m_i}Y_0)A_{i0}^{-1}$ не змінюється, якщо $i=1,\ldots,s$.

Тому, якщо покласти

$$Z_0 = B_{i0}^{-1}(X_0 A_{i,\, m_i} - B_{i,\, m_i} Y_0) A_{i0}^{-1}, \tag{22}$$

то (21) можна записати так:

$$X_0 A_{i,\, m_i+1} - B_{i,\, m_i+1} Y_0 - (B_{i1} Z_0 A_{i0} + B_{i0} Z_0 A_{i1}) = 0 .$$

Це разом з (3) і (22) означає, що (X_0, Y_0, Z_0), де матриці X_0, Y_0, визначені в (20), а Z_0 – в (22), є розв'язком перших $m_i + 2$ ($i = 1, \ldots, s$) рівнянь системи (1), причому $\det X_0, \det Y_0 \neq 0$.

На другому кроці за розкладами (9)–(12) і (14), (15), взявши до уваги (20) і (3), з рівності

$$D_{i,\, m_i+2}(A) = P^{-1} D_{i,\, m_i+2}(B) P ,$$

відкинувши однакові доданки в обох частинах, отримуємо, що

$$\begin{gathered} X_0((A'_{i1})^2 A'_{i,\, m_i} + A'_{i1} A'_{i,\, m_i} A'_{i1} - A'_{i1} A'_{i,\, m_i+1} - A'_{i2} A'_{i,\, m_i} + A'_{i,\, m_i} (A'_{i1})^2 - \\ - A'_{i,\, m_i} A'_{i2} - A'_{i,\, m_i+1} A'_{i1} + A'_{i,\, m_i+2}) = \\ = ((B'_{i1})^2 B'_{i,\, m_i} + B'_{i1} B'_{i,\, m_i} B'_{i1} - B'_{i1} B'_{i,\, m_i+1} - B'_{i2} B'_{i,\, m_i} + B'_{i,\, m_i} (B'_{i1})^2 - \\ - B'_{i,\, m_i} B'_{i2} - B'_{i,\, m_i+1} B'_{i1} + B'_{i,\, m_i+2}) X_0 . \end{gathered} \tag{23}$$

На основі рівності (8) та другої з (3) можна записати:

$$A'_{i,\, m_i+1} A'_{i1} - A'_{i1} A'_{i,\, m_i} A'_{i1} - A'_{i,\, m_i} (A'_{i1})^2 = X_0^{-1} (B'_{i,\, m_i+1} B'_{i1} - B'_{i1} B'_{i,\, m_i} B'_{i1} - B'_{i,\, m_i} (B'_{i1})^2) X_0 ,$$

$$A'_{i1} A'_{i,\, m_i+1} - A'_{i1} A'_{i,\, m_i} A'_{i1} - (A'_{i1})^2 A'_{i,\, m_i} = X_0^{-1} (B'_{i1} B'_{i,\, m_i+1} - B'_{i1} B'_{i,\, m_i} B'_{i1} - (B'_{i1})^2 B'_{i,\, m_i}) X_0 .$$

Тепер з (23) та двох останніх рівностей отримуємо:

$$\begin{gathered} X_0 (A'_{i,\, m_i+2} - A'_{i2} A'_{i,\, m_i} - A'_{i1} A'_{i,\, m_i} A'_{i1} - A'_{i,\, m_i} A'_{i2}) = \\ = (B'_{i,\, m_i+2} - B'_{i2} B'_{i,\, m_i} - B'_{i1} B'_{i,\, m_i} B'_{i1} - B'_{i,\, m_i} B'_{i2}) X_0 , \end{gathered}$$

звідки, враховуючи (22), дістанемо:

$$X_0 A_{i,\, m_i+2} - B_{i,\, m_i+2} Y_0 - (B_{i2} Z_0 A_{i0} + B_{i1} Z_0 A_{i1} + B_{i0} Z_0 A_{i2}) = 0 .$$

Це означає, що неособливі матриці X_0, Y_0 вигляду (20) і матриця Z_0, визначена в (22), задовольняють $(m_i + 3)$-тє рівняння системи (1) для всіх $i = 1, \ldots, s$.

Далі за індукцією показуємо, що (X_0, Y_0, Z_0) є розв'язком всіх наступних рівнянь системи (1). Теорема доведена.

Доведена теорема дає можливість розв'язування системи (1) різнобічних багаточленних матричних рівнянь з трьома невідомими звести до розв'язування системи однотипних двочленних матричних рівнянь з одною невідомою матрицею. Цю систему в позначеннях теореми можна подати у вигляді

$$\left.\begin{array}{l} P D_{i1}(A) - D_{i1}(B) P = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P D_{i,\, m_i-1}(A) - D_{i,\, m_i-1}(B) P = 0, \\ P D_{i,\, m_i+1}(A) - D_{i,\, m_i+1}(B) P = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P D_{i,\, m_i+l_i}(A) - D_{i,\, m_i+l_i}(B) P = 0, \\ P D_i(A) - D_i(B) P = 0, \\ i = 1, \ldots, s \end{array}\right\}, \tag{24}$$

де P – невідома матриця. Якщо матрицю P записати як $P = \| p_{uv} \|_1^k$, то від системи матричних рівнянь (24) можна перейти до системи звичайних лінійних однорідних рівнянь з k^2 невідомими p_{uv}. За загальним розв'язком отриманої системи рівнянь побудуємо матрицю P як матрицю з певними параметрами (вільними невідомими загального розв'язку). Якщо $\det P$ тотожно відмінний від нуля, то система (24) має неособливий розв'язок. Надаючи параметрам такі допустимі значення із поля F, що $\det P \neq 0$, отримуємо неособливий розв'язок система (24). Далі за формулами (20) і (22) знаходимо потрібний розв'язок системи (1).

1. *Гельфанд И. М., Ретах В. С.* Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами // Функц. анализ и его приложения. – 1991. – **25**, № 2. – С. 13–25.
2. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Розв'язки матричного діофантового поліноміального рівняння // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 55–61.
3. *Кириллов А. А.* О числе решений уравнения $X^2 = 0$ в треугольных матрицах над конечным полем // Функц. анализ и его приложения. – 1995. – **29**, № 1. – С. 82–87.
4. *Ху-Кинг Лиу, Жиан-Йинг Ронг.* Об эрмитовых неотрицательно определенных решениях матричных уравнений $A_i X A_i^* = B_i B_i^*$ // Матем. заметки. – 2009. – **85**, № 3. – С. 470–475.
5. *Zhuo-Heng He, Qing-Wen Wang.* The general solutions to some systems of matrix equations // Linear and Multilinear Algebra. – 2015. – **63**, № 10. – P. 2017–2032.

О НЕОСОБЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО ТИПА СИСТЕМ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрены системы матричных уравнений с тремя неизвестными. Найдены условия существования решений этих систем с неособенными двумя компонентами. Указан метод их построения.

ON NONSINGULAR SOLUTIONS OF ONE TYPE OF THE SYSTEMS OF MATRIX EQUATIONS

The systems of matrix equations with three unknowns are considered. The conditions for existence of solutions of these systems with nonsingular two components are found. The method of their construction is indicated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.11.15