УДК 517.98

О. М. Голубчак

ОПЕРАТОРИ СИМЕТРИЧНОГО ЗСУВУ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Досліджено оператори симетричного зсуву та диференціювання в гільбертовому просторі $H_s(\ell_1)$ симетричних аналітичних функцій на ℓ_1. Також побудовано оператори народження і знищення в $H_s(\ell_1)$ і описано деякі їх властивості.

Означення і попередні відомості. Нехай X − лінійний нормований простір над полем $\mathbf{K}$ з безумовним базисом $\{e_k\}$. Функцію $f: X \to \mathbf{K}$ називають симетричною, якщо $f(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k) = f(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{\sigma(k)})$ для довільної підстановки σ на деякій скінченній підмножині натуральних чисел $\mathbf{N}$. Функцію $F: X \to \mathbf{K}$ називають поліномом степеня n, якщо $F = F_0 + F_1 + \ldots + F_n$ і для кожного $1 \le k \le n$, $F_k(x) = B_k(x, x, \ldots, x)$, де B_k є k-лінійною формою: $B_k : X \times X \times \ldots \times X \to \mathbf{K}$. При цьому $F_0 = \mathrm{const}$ і $F_n \ne 0$.

Розглянемо простір ℓ_1 абсолютно сумовних послідовностей над полем комплексних чисел $\mathbf{C}$: $\ell_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$.

Простір симетричних поліномів на ℓ_1 позначимо $P_s(\ell_1)$. Алгебри симетричних поліномів та аналітичних функцій досліджували багато авторів (див. [3−5]). Відомо [5], що поліноми

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

утворюють алгебричний базис у $P_s(\ell_1)$, а поліноми вигляду $P_\lambda = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot P_{\lambda_m}$ у ньому формують лінійний базис, де $P_{\lambda_k}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\lambda_k}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ − деяке розбиття натурального числа n, тобто $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n$. Якщо ввести на $P_s(\ell_1)$ скалярний добуток $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = b_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\mu}$, де $\delta_{\lambda\mu}$ − символ Кронекера, $b_{\lambda\lambda} = b_\lambda > 0$, то цей добуток породжує норму

$$\|P_\lambda\| = \sqrt{\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle} = \sqrt{b_\lambda}.$$

Поповнення простору $P_s(\ell_1)$ відносно цієї норми для випадку $b_\lambda = 1$ позначатимемо $H_s = H_s(\ell_1)$.

У праці [1] вивчали гільбертові простори, породжені симетричними поліномами на ℓ_1, і встановили умови, за яких елементи цих просторів будуть аналітичними функціями у деякій області $\mathbf{\Omega} \in \ell_1$. Зокрема, показано, що область $\mathbf{\Omega}$ визначають співвідношеннями: $\mathbf{\Omega} = \{x \in \ell_1 \mid |P_k(x)| < 1, k \in \mathrm{N}\}$.

На множині ℓ_1 у праці [4] введено таку операцію. Для довільних $x, y \in \ell_1$ позначимо $x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$.

Ця операція коректно визначена для всіх $x, y \in \ell_1$, $\|x \bullet y\| = \|x\| + \|y\|$ і $P_n(x \bullet y) = P_n(x) + P_n(y)$.

Оператор симетричного зсуву. Визначимо оператор симетричного зсуву $\Lambda_y : P_s(\ell_1) \to P_s(\ell_1)$ для кожного $y \in \ell_1$ таким чином:

$$\Lambda_y(P)(x) = P(x \bullet y).$$

Легко бачити, що $\Lambda_y(P)$ – лінійний оператор на просторі $P_s(\ell_1)$.

Твердження 1. Λ_y *– необмежений, якщо* $y \neq 0$, *і щільно визначений в* H_s *оператор.*

Доведення. Припустимо, що Λ_y обмежений для деякого $y \in \ell_1$, $y \neq 0$. Тоді Λ_y^* також обмежений і діє з H_s^* в H_s^*. Оскільки $y \neq 0$, то знайдеться n, що $P_n(y) \neq 0$ (див. [3]). Тоді для деякого m, $P_n(\underbrace{y \bullet y \bullet \ldots \bullet y}_{m}) = mP_n(y) > 2$.

Нехай $x_0 \in \mathbf{\Omega}$, тобто $|P_k(x_0)| < 1, \forall k.$ R_{x_0} – функціонал значення в точці x_0, такий, що $R_{x_0}(f) = f(x_0)$. Згідно з [1], R_{x_0} буде неперервним, тобто $R_{x_0} \in H_s^*$. Тоді $\forall f \in H_s$

$$(\Lambda_y^*)^m(R_{x_0})(f) = R_{x_0}\Lambda_y^m(f) = f(x_0 \bullet \underbrace{y \bullet y \bullet \ldots \bullet y}_{m})$$

і $(\Lambda_y^*)^m$ – неперервний оператор. Тому $(\Lambda_y^*)^m(R_{x_0}) = R(x_0 \bullet \underbrace{y \bullet y \bullet \ldots \bullet y}_{m})$. Але $P_n(x_0 \bullet \underbrace{y \bullet y \bullet \ldots \bullet y}_{m}) > 1$. Тобто $x_0 \bullet \underbrace{y \bullet y \bullet \ldots \bullet y}_{m} \notin \mathbf{\Omega}$ – суперечність. Отже, Λ_y розривний. З іншого боку, Λ_y визначений на щільному підпросторі $P_s \in H_s$.

Твердження доведено.

Знайдемо вигляд оператора Λ_y^*. Нехай $\varphi \in H_s^*$, тоді існує $g \in H_s$, що $\varphi(f) = \langle f, g \rangle$, $g = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} d_\mu P_\mu$.

Звідси

$$\langle \Lambda_y^*(\varphi), P_n \rangle = \langle \varphi, \Lambda_y(P_n) \rangle = \langle \varphi, P_n(y \bullet \cdot) \rangle = \langle \varphi, P_n(y) + P_n \rangle =$$

$$= \langle \sum_{|\mu|=0}^{\infty} d_\mu P_\mu, P_n(y) + P_n \rangle = d_0 P_n(y) + \langle \varphi, P_n \rangle.$$

У загальному випадку для довільного розбиття $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ натурального числа m отримаємо:

$$\langle \Lambda_y^*(\varphi), P_\lambda \rangle = \langle \varphi, (P_{\lambda_1}(y) + P_{\lambda_1}) \cdot \ldots \cdot (P_{\lambda_n}(y) + P_{\lambda_n}) \rangle =$$

$$= \langle \varphi, \sum_{k+r=m, i_1<\ldots<i_k, j_1<\ldots<j_r} P_{\lambda_{i_1}}(y) \cdot \ldots \cdot P_{\lambda_{i_k}}(y) P_{\lambda_{j_1}} \cdot \ldots \cdot P_{\lambda_{j_r}} \rangle =$$

$$= \sum_{k+r=m, i_1<\ldots<i_k, j_1<\ldots<j_r} d_{\lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_r}} P_{\lambda_{i_1}}(y) \cdot \ldots \cdot P_{\lambda_{i_k}}(y).$$

Обчислимо:

$$\Lambda_y(g) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} d_\mu P_\mu(y \bullet x) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} d_\mu (P_{\mu_1}(y) + P_{\mu_1}(x)) \ldots (P_{\mu_n}(y) + P_{\mu_n}(x)) =$$

$$= \sum_{|\mu|=0}^{\infty} d_\mu \sum_{k+r=|\lambda|, i_1<\ldots<i_k, j_1<\ldots<j_r} P_{\mu_{i_1}}(y) \cdot \ldots \cdot P_{\mu_{i_k}}(y) P_{\mu_{j_1}} \cdot \ldots \cdot P_{\mu_{j_r}}.$$

Нехай $|\lambda| = r, \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, тоді

$$\langle \Lambda_y(g), P_\lambda \rangle = \langle \sum_{|\mu|=m} d_\mu \sum_{k+r=m, i_1<\ldots<i_k, j_1<\ldots<j_r} P_{\mu_{i_1}}(y) \cdot \ldots \cdot P_{\mu_{i_k}}(y) P_{\mu_{j_1}} \cdot \ldots \cdot P_{\mu_{j_r}}, P_\lambda \rangle =$$

$$= \langle \sum_{|\mu|=m} d_\mu \sum_{k+r=m, i_1<\ldots<i_k, j_1<\ldots<j_r} P_{\mu_{i_1}}(y)\cdot\ldots\cdot P_{\mu_{i_k}}(y) P_{\mu_{j_1}}\cdot\ldots\cdot P_{\mu_{j_r}}, P_{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot P_{\lambda_n}\rangle =$$

$$= \sum_{\mu_{i_1}+\ldots+\mu_{i_k}=0} d_{\mu_{i_1}\ldots\mu_{i_k}\lambda_1\ldots\lambda_n} P_{\mu_{i_1}}(y)\ldots P_{\mu_{i_k}}(y).$$

Легко бачити, що $\Lambda_y \neq \Lambda_y^*$. Справді, якщо $g = P_1 + P_2 - P_1P_2, P_\lambda = P_1P_2$, то $\Lambda_y^*(g) = P_1(y) + P_2(y) - 1, \Lambda_y(g) = -1$.

Оператор диференціювання. Розглянемо відображення $\Theta_t(P_n) = tP_n, t \in \mathbf{C}$, причому $\Theta_t(c) \equiv c$, де $c = \text{const}$. Продовжимо його за лінійністю і мультиплікативністю на $P_s(\ell_1)$:

$$\Theta_t(P_\lambda) = \Theta_t(P_{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot P_{\lambda_m}) = \Theta_t(P_{\lambda_1})\cdot\ldots\cdot\Theta_t(P_{\lambda_m}) = t^m P_\lambda,$$

$$\Theta_t(\sum_{|\lambda|=n} P_\lambda) = \sum_{|\lambda|=n}\Theta_t(P_\lambda).$$

За кожного фіксованого t, Θ_t діє з $P_s(\ell_1)$ в $P_s(\ell_1)$.

Розглянемо оцінку

$$\|\Theta_t(P_\lambda)\| = |t|^{l(\lambda)}\|P_\lambda\|,$$

де $l(\lambda) = m$ означає, що $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Очевидно, що при $|t| > 1$ оператор буде необмеженим. Наприклад, якщо $P_\lambda = P_1^n$, $\|P_1^n\| = 1$, отримаємо $\|\Theta_t(P_1^n)\| = t^n \to \infty$, коли $n \to \infty$.

Якщо $|t| < 1$, оператор буде обмеженим, а отже, неперервним.

Розглянемо оператор типу диференціювання:

$$D_h f = \lim_{t\to 0}\frac{\Theta_t(\Lambda_h(f(x))) - f(x)}{t}, h \in \mathbf{\Omega}, h \neq 0.$$

Твердження 2. $D_h, h \in \mathbf{\Omega}, h \neq 0$ *необмежений і щільновизначений оператор, для якого виконується правило Лейбніца*

$$D_h(fg) = D_h(f)g + fD_h(g)$$

для всіх f, g *з області визначення* D_h.

Доведення. Необмеженість та щільновизначеність випливає з твердження 1, а правило Лейбніца можна перевірити безпосередньо.

Твердження доведено.

Зауважимо, що $D_h(P_n) = P_n(h)$ для всіх n.

Теорема. *Для довільного* $h \in \mathbf{\Omega}, h \neq 0$ *оператори* D_h *та* D_h^* *задовольняють так зване канонічне комутаційне співвідношення*

$$D_h D_h^* - D_h^* D_h = \mathrm{I}\sum_{k=1}^{\infty}|P_k(h)|^2, \text{ де I — одиничний оператор.}$$

Доведення.

$$(D_h^* g, P_\lambda) = (D_h^* g, P_{\lambda_1}\ldots P_{\lambda_n}) = (g, D_h P_{\lambda_1}\ldots P_{\lambda_n}) = (g, \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_1}\ldots D_h(P_{\lambda_k})P_{\lambda_k+1}\ldots P_{\lambda_n}) =$$

$$= (g, \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_1}\ldots P_{\lambda_k}(h)P_{\lambda_k+1}\ldots P_{\lambda_n}) =$$

$$= (g, \sum_{k=1}^{n} P_{\tilde\lambda_k}P_{\lambda_k}(h)) = \sum_{k=1}^{n} d_{\tilde\lambda_k}\overline{P_{\lambda_k}(h)}, \text{ де } \tilde\lambda^k = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n).$$

Тому $D_h^* P_\mu = \sum_j P_{(\mu_1,\dots,\mu_n,j)} P_j(h)$.

Таким чином,

$$D_h^* D_h(P_\lambda) = D_h^*(\sum_{k=1}^{n} P_{\tilde{\lambda}_k} P_{\lambda_k}(h)) = \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_k}(h) D_h^* P_{\tilde{\lambda}_k} = \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_k}(h) \sum_j P_{(\tilde{\lambda}_k,j)} \overline{P_j(h)},$$

$$D_h D_h^*(P_\lambda) = D_h(\sum_j P_{(\lambda,j)} \overline{P_j(h)}) = \sum_{k=1}^{n} P_{\lambda_k}(h) \sum_j P_{(\tilde{\lambda}_k,j)} \overline{P_j(h)} + \sum_j P_\lambda \mid P_j(h) \mid^2,$$

$$(D_h D_h^* - D_h^* D_h)(P_\lambda) = P_\lambda \sum_j \mid P_j(h) \mid^2 .$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що якщо $h_1, h_2 \neq 0$, то $D_{h_1} D_{h_2} = D_{h_2} D_{h_1}$ і $D_{h_1}^* D_{h_2}^* = D_{h_2}^* D_{h_1}^*$. Нагадаємо, що оператор a гільбертового простору називають оператором народження, якщо виконується канонічне комутаційне співвідношення $a^* a - a a^* = \mathrm{I}$. При цьому a^* називають оператором знищення.

Наслідок. *Для кожного* $h \in \mathbf{\Omega}$ $h \neq 0$ *оператори* $a_h = \dfrac{D_h}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h) \mid^2}}$ *та* $a_h^* = \dfrac{D_h^*}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h) \mid^2}}$ *є операторами народження та знищення відповідно.*

Оператори a_h та a_h^* мають такі властивості:

1. $a_{h_1 \bullet h_2}^*(P_n) = a_{h_1}^*(P_n) + a_{h_2}^*(P_n) =$

$$= \frac{D_{h_1}(P_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h_1) \mid^2}} + \frac{D_{h_2}(P_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h_2) \mid^2}} =$$

$$= \frac{P_n(h_1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h_1) \mid^2}} + \frac{P_n(h_2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h_2) \mid^2}};$$

2. $a_{h_1 \bullet h_2}(P_n) = a_{h_1}(P_n) + a_{h_2}(P_n) =$

$$= \frac{D_{h_1}^*(P_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h_1) \mid^2}} + \frac{D_{h_2}^*(P_n)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h_2) \mid^2}} =$$

$$= \frac{\sum_j P_n P_j P_j(h_1)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h_1) \mid^2}} + \frac{\sum_j P_n P_j P_j(h_2)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h_2) \mid^2}};$$

3. $a_{th}^*(P_n) = t^n a^*(P_n)$;

4. $a_{th}(P_n) = \dfrac{\sum_{j=1}^{\infty} t^j P_n P_j P_j(h)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \mid P_k(h) \mid^2}}$.

1. *Голубчак О. М.* Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 // Карпатські матем. публікації – 2010. – **53**. – P. 274–278.

2. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука. 1982. – 320 с.

3. *Alencar R., Aron R., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. Lond. Math. Soc. − 2003. − **35**. − P. 55−64.
4. *Chernega I., Galindo P., and Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra// Proc. Edinburgh Math. Soc. − 2012. − **55**. − P. 125−142.
5. *Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces// J. London Math. Soc. − 1999. − **59**. − P. 681−697.

ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Исследованы операторы симметрического смещения и дифференцирования в гильбертовом пространстве $H_s(\ell_1)$ симметрических аналитических функций на ℓ_1. Также построены операторы рождения и уничтожения в $H_s(\ell_1)$ и описаны некоторые их свойства.

OPERATORS OF SYMMETRIC SHIFT IN HILBERT SPACE OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS

Symmetric shift and differentiation operators in the Hilbert space $H_s(\ell_1)$ of symmetric analytic functions on ℓ_1 are investigated. Also, creation and annihilation operators in $H_s(\ell_1)$ are constructed and some of their properties are described.

Івано-Франківський коледж
Львів. нац. аграр. ун-ту, Івано-Франківськ

Одержано
10.11.15