УДК 512.552.13.

О. В. Пігура

МАКСИМАЛЬНО НЕГЕЛЬФАНДОВІ ІДЕАЛИ КОМУТАТИВНОЇ ОБЛАСТІ БЕЗУ

На основі поняття гельфандового елемента введено поняття максимально негельфандового ідеалу комутативної області Безу. Встановлено властивості цих ідеалів. Введено гельфандовий аналог радикала Джекобсона і досліджено його властивості. Вивчено локально негельфандові області Безу і комутативні області Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів. Зокрема, показано, що вони є кільцями гельфандового рангу 1 та, як наслідок, доведено, що вони є кільцями елементарних дільників.

Гельфандові кільця ввів Малвей у 1979 році як кільця, для яких можливі узагальнення гельфандової дуальності. Він назвав їх на честь Ізраеля Гельфанда. Найвідомішим прикладом гельфандового кільця є $C(X)$ − кільце неперервних дійсних функцій на просторі X.

Всі розглядувані кільця є комутативними з одиницею і $1 \neq 0$. Кільце R назвемо гельфандовим, якщо для довільної пари $a, b \in R$, для якої виконується умова $a + b = 1$, існують такі елементи $r, s \in R$, що $(1 + ar)(1 + bs) = 0$. Елемент $a \in R \setminus \{0\}$ комутативного кільця R назвемо гельфандовим, якщо фактор-кільце R / aR є гельфандовим.

Прикладом гельфандових елементів можуть служити оборотні та адекватні елементи кільця. У праці [4] встановлено такі властивості гельфандових елементів комутативного кільця. Наведемо їх, оскільки ці результати будуть необхідні для подальшої роботи.

Твердження 1 [4]. Для комутативного кільця R такі твердження еквівалентні:

1) $a \in R$ є гельфандовим елементом;

2) для довільного простого ідеалу P, такого, що $a \in P$, існує такий єдиний максимальний ідеал M, що $P \subset M$.

Твердження 2 [4]. Комутативна область R є областю, в якій кожен ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі кільця R тоді і лише тоді, якщо кожен ненульовий елемент з R є гельфандовим.

Твердження 3 [4]. Елемент a комутативної області Безу є гельфандовим тоді і лише тоді, якщо для таких довільних елементів $b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$, елемент a можна подати у вигляді $a = rs$, де $rR + bR = R$ та $sR + cR = R$.

Всі інші необхідні означення і факти можна знайти в працях [4−6].

Нехай R − комутативна область. Позначимо через $S = S(R)$ множину всіх гельфандових елементів кільця R. Оскільки R є комутативним кільцем і $1 \in S$, то множина S не є порожньою, більше того, справедливий такий результат.

Твердження 4 [4]. Множина S всіх гельфандових елементів комутативної області Безу R є насиченою мультиплікативно замкненою.

Означення 1. Назвемо ідеал I кільця R гельфандовим, якщо I містить хоча б один гельфандовий елемент. У протилежному випадку ідеал I назвемо негельфандовим, тобто довільний ненульовий елемент ідеалу I є негельфандовий.

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. − 2015. − Вип. 13. − С. 47−52.

Нехай H − множина всіх негельфандових ідеалів кільця R. Оскільки $0 \in H$, то множина H непорожня. Нехай $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ − довільний ланцюг ідеалів множини H. Розглянемо ідеал $I = \bigcup_{\alpha\in\Omega} I_\alpha$.

Якщо $I \notin H$, то існує такий гельфандовий елемент a, що $a \in I$. Згідно з означенням ідеалу I маємо, що існує такий $\beta \in \Omega$, що $a \in I_\beta$. Тобто, згідно з означенням, ідеал I_β гельфандовий, що неможливо, бо $I_\beta \in H$.

Отже, множина H індукована. За лемою Цорна в H існує хоча б один максимальний елемент множини H. Такі ідеали назвемо максимально негельфандовими.

Означення 2. Негельфандовий ідеал N назвемо максимально негельфандовим, якщо для такого довільного ідеалу I, що $N \subset I$, $I \neq N$, існує гельфандовий елемент a, який належить I.

З вищесказаного отримаємо такий результат.

Твердження 5. Довільний негельфандовий ідеал комутативної області Безу міститься хоча б в одному максимальному негельфандовому ідеалі.

Твердження 6. Кожний максимально негельфандовий ідеал комутативної області Безу є простим.

Доведення. Нехай P − довільний максимально негельфандовий ідеал. Доводимо від супротивного. Нехай існують такі елементи $b, c \in R$, що $c \notin P$, $b \notin P$, але $cb \in P$.

Розглянемо ідеал $P + cR$. Оскільки $P \subset P + cR$, де $c \notin P$, тоді ідеал $P + cR$ є гельфандовим, тобто існують такі елементи $p_1 \in P$ та $r_1 \in R$, що елемент $x = p_1 + cr_1$ є гельфандовим.

Аналогічними міркуваннями для $P \subset P + bR$ маємо: $y = p_2 + br_2$ − гельфандовий елемент для деяких елементів $p_2 \in P$ та $r_2 \in R$.

Оскільки $bc \in P$, тоді очевидно, що $xy \in P$, що неможливо, бо за твердженням 4 xy є гельфандовим елементом. Твердження доведено.

Твердження 7. Нехай R − комутативна область Безу, в якій довільний ненульовий простий ідеал містить гельфандовий елемент, тоді R є областю, де довільний ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному.

Доведення**.** Для цього за твердженням 2 достатньо показати, що R не має негельфандових елементів. Припустимо, що в R існує негельфандовий елемент a. Розглянемо ідеал aR. Він є негельфандовим, оскільки $1 \in R$ і $a \in aR$. Зауважимо, що всі елементи ідеалу aR є негельфандовими, бо в протилежному випадку елемент a був би гельфандовим як дільник гельфандового елемента.

Тоді $aR \subset M$, де M − максимально негельфандовий ідеал, який є простим. Оскільки довільний ненульовий простий ідеал містить гельфандовий елемент, то отримуємо протиріччя. Твердження доведено.

Це твердження є узагальненням відомої теореми Капланського, яка стверджує, що комутативна область є факторіальною тоді і лише тоді, коли довільний ненульовий простий ідеал містить простий елемент [2].

Позначимо через $A(R)$ перетин всіх максимально негельфандових ідеалів.

Твердження 8. Нехай R − комутативна область Безу і $b \in A(R)$ і a − гельфандовий елемент R. Тоді для довільного $x \in R$ елемент $a + bx$ є гельфандовим.

Доведення. Припустимо, що $a+bx$ не є гельфандовим елементом. Тоді $(a+bx)R$ − негельфандовий ідеал R. Згідно з твердженням 5 існує максимально негельфандовий ідеал N, який містить ідеал $(a+bx)R$, а тому і елемент $a+bx$. Оскільки b належить всім максимально негельфандовим ідеалам, то $a=(a+bx)-bx\in N$, що неможливо за визначенням ідеалу N. Отже, наше припущення, що $a+bx$ є негельфандовим елементом, хибне. Твердження доведено.

Твердження 9. Нехай I − такий ідеал комутативної області Безу, що для довільних $i\in I$ та гельфандового елемента a, елемент $i+a$ є гельфандовим. Тоді $I\subseteq A(R)$.

Доведення. Нехай існує максимально негельфандовий ідеал N, що $I\not\subset N$. Згідно з означенням максимально негельфандового ідеалу, існує гельфандовий елемент a, який належить $I+N$. Тоді $a=-i+n$, де $i\in I$ та $n\in N$. Згідно з означенням I маємо, що $n=a+i$ − гельфандовий елемент, що неможливо, бо $n\in N$.

Твердження доведено.

Зауважимо, що твердження 8 та 9 встановлюють для ідеалу $A(R)$ властивості, аналогічні для радикала Джекобсона, тому $A(R)$ назвемо гельфандовим аналогом радикала Джекобсона.

Наступне твердження, якщо максимальний негельфандовий ідеал єдиний, засвідчує, що така область має аналогічні властивості локальної області.

Твердження 10. Для комутативної області Безу такі властивості еквівалентні:

1) у кільці R існує єдиний максимально негельфандовий ідеал N;

2) сума довільних двох негельфандових елементів є негельфандовим елементом.

Доведення. $1)\Rightarrow 2)$ Припустимо, що існують негельфандові елементи a та b, сума яких $a+b$ − гельфандовий елемент. Через обмеження, накладені на R, маємо, що $a\in N$ та $b\in N$. Оскільки N − ідеал, тоді $a+b\in N$, що неможливо, через припущення, що $a+b$ − гельфандовий елемент, а N − максимально негельфандовий ідеал.

Імплікація $2)\Rightarrow 1)$ очевидна з огляду на те, що добуток будь-якого негельфандового елемента на довільний елемент кільця є негельфандовим елементом.

Твердження доведено.

Означення 3. Нехай R − комутативна область Безу. Скажемо, що R є кільцем гельфандового рангу 1, якщо для таких довільних $a,b\in R$, що $aR+bR=R$, існує такий елемент $r\in R$, що $a+br$ є гельфандовим елементом.

Теорема 1 [5]. Нехай R − комутативна область Безу гельфандового рангу 1. Тоді R є кільцем елементарних дільників.

Доведення. Нехай $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ − довільна матриця над R, де $aR+bR+cR=R$. Щоб довести цю теорему, достатньо показати, що A володіє діагональною редукцією [3, 6]. Запишемо $ax+by+cz=1$ для деяких елементів $x,t,z\in R$. Тоді $bR+(ax+cz)R=R$. Оскільки R є кільцем гельфандового рангу 1, то існує такий деякий елемент $t\in R$, що є гельфандовим. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xt & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ zt & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & c \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де, очевидно, $aR + dR + cR = R$ і $b + t(xa + cz) = d$. Відповідно до обмежень, накладених на d, і за твердженням 3 маємо, що елемент d можна подати у вигляді $d = rs$, де $rR + aR = R$ та $sR + cR = R$. Нехай елемент $p \in R$ такий, що $sp + ck = 1$ для деякого елемента $k \in R$. Звідси $rsp + rck = r$ та $dp + crk = r$. Позначивши $rk = q$, отримуємо $(dp + cq)R + aR = R$. Нехай $pR + qR = \delta R$, тоді $p = p_1\delta$, $q = q_1\delta$ і $\delta = pu + qv$, де $p_1R + q_1R = R$. Звідси маємо, що $pR \subset p_1R$ і $pR + cR = R$ та $p_1R + cR = R$. Оскільки $p_1R + q_1R = R$, то $p_1R + (p_1d + q_1c)R = R$. З того, що $dp + cq = \delta(dp_1 + cq_1)$ та з $(dp + cq)R + aR = R$, отримуємо $(dp_1 + cq_1)R + aR = R$. Оскільки одержали, що $p_1R + (p_1d + q_1c)R = R$, то $ap_1R + (dp_1 + c)q_1R = R$. За працею [3] матриця $\begin{pmatrix} a & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$ володіє діагональною редукцією. Тоді, очевидно, і матриця A володіє нею.

Позначимо через $Z(a)$ множину всіх максимально негельфандових ідеалів, які містять елемент a.

Теорема 2. Комутативна область Безу зі скінченною кількістю максимально негельфандових ідеалів є кільцем елементарних дільників.

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 1 достатньо довести, що R є кільцем гельфандового рангу 1, тобто для таких довільних $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, існує такий елемент $r \in R$, що $a + br$ є гельфандовим елементом. Оскільки $aR + bR = R$, то $Z(a) \cap Z(b) = \varnothing$. Нехай r елемент, який належить всім максимально негельфандовим ідеал, окрім $Z(a)$.

Розглянемо елемент $a + br$. Доведемо, що він є гельфандовим.

Припустимо, що $a + br$ є негельфандовим елементом. Отже, він міститься хоча б в одному негельфандовому ідеалі M. Можливі такі випадки:

1) $a \in M$, тоді $br \in M$, оскільки $r \notin M$, то $b \in M$, що неможливо, бо $aR + bR = R$.
2) Якщо $r \in M$, то $a \in M$, а це суперечить умові, що $Z(r) \cap Z(a) = \varnothing$.

Коли елемент a належить всім максимальним негельфандовим ідеалам, то b є гельфандовим елементом, а отже, $a + b$ є гельфандовим за твердженням 7. Отже, кільце R є кільцем гельфандового рангу 1.

Звідси за теоремою 1 кільце R є кільцем елементарних дільників.

Теорема 3. Нехай R − комутативна область Безу, в якій для довільних елементів $a, b \in R$ та $b \neq 0$ існує такий елемент $r \in R$, що $Z(r) = Z(a) \setminus Z(b)$. Тоді R є кільцем елементарних дільників.

Д о в е д е н н я. Нехай елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Очевидно, що $Z(a) \cap Z(b) = \varnothing$. За умовою теореми існує деякий елемент $r \in R$, який належить всім максимально негельфандовим ідеалам кільця R, крім максимально негельфандових ідеалів множини $Z(a)$. Тоді $Z(r) = Z(0) \setminus Z(a)$. Очевидно, що $Z(r) \cap Z(a) = \varnothing$. Розглянемо елемент $(a + br) \in R$. Аналогічно міркуючи, як у попередній теоремі, бачимо, що кільце R є кільцем елементарних дільників.

Теорему доведено.

Зауважимо, що умову існування такого елемента r, що $Z(r) = Z(a) \setminus Z(b)$, якщо ідеали максимальні, вперше ввів Хенріксен [1].

Теорема 4. Комутативна область Безу R є областю з єдиним максимально негельфандовим ідеалом тоді і лише тоді, якщо для таких довільних $a, b \in R$, що $aR + bR = R$, один з елементів a або b є гельфандовим.

Доведення. Нехай R − кільце з єдиним гельфандовим ідеалом та існують такі негельфандові елементи a, b, що із $aR + bR = R$ випливає, що один з елементів a або b є гельфандовим.

Оскільки елементи a і b негельфандові, то $a \in R$ та $b \in R$, а отже, $aR + bR \subset N$, що неможливо, бо $aR + bR = R$.

Розглянемо другий випадок. Нехай R − комутативна область. Виберемо такі довільні елементи $a, b \in R$, що $aR + bR = R$. Доведемо, що кільце R є кільцем з єдиним максимальним негельфандовим ідеалом. Припустимо, що це не так. Нехай існують два максимальні негельфандові ідеали $N_1, N_2 \in R$. Оскільки R є комутативною областю Безу і N_1 та N_2 непорівнювані прості ідеали, то $N_1 + N_2 = R$ [6]. Тобто $n_1 + n_2 = 1$, де $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Очевидно, що $n_1R + n_2R = R$, а звідси через обмеження, накладені на комутативну область Безу, отримуємо, що один з елементів n_1 та n_2 є гельфандовими, що неможливо, бо N_1 або N_2 є максимальними негельфандовими ідеалами за припущенням.

Означення 4. Комутативну область Безу назвемо локально гельфандовою, якщо вона містить єдиний максимальний негельфандовий ідеал.

Прикладом локально гельфандового кільця є приклад Хенріксена, тобто

$$R = \{z_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \mid z_0 \in Z, a_i \in Q\}$$

Радикал Джекобсона − єдиний максимально негельфандовий ідеал цього кільця [1].

Теорема 5. Комутативна область Безу R є локально гельфандовою тоді і лише тоді, коли для довільного $a \in R$ один з елементів або a, або $1 - a$ є гельфандовим.

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай R − локально гельфандова область. Розглянемо єдиний максимально негельфандовий ідеал N. Візьмемо довільний елемент $a \in N$. Очевидно, що $(1 - a) \notin N$. Отже, $1 - a$ − гельфандовий елемент.

Розглянемо другий варіант, тобто $a \notin N$. Тоді елемент a є гельфандовим. Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Припустимо, що існує два максимальних негельфандових ідеали N_1 та N_2. Очевидно, що $N_1 + N_2 = R$ [6]. Звідси маємо, що $n_1 + n_2 = 1$, де $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$. Тоді елемент n_1 або $1 - n_1$ є гельфандовим. Отримали протиріччя. Твердження доведено.

Як наслідок очевидний такий результат.

Теорема 6. Комутативна область Безу, в якій кожен ненульовий простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі, є локально гельфандовим кільцем.

Теорема 7. Довільна локально гельфандова область Безу є кільцем елементарних дільників.

1. *Henriksen M*. Some remarks about elementary divisor rings // Michigan Math. J. – 1955. – **56** (3). – P. 159–163.
2. *Kaplansky I*. Commutative Rings. – Chicago and London: The University of Chicago Press, 1974. – 180 p.
3. *Kaplansky I*. Elementary divisor ring and modules// Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66.** – P. 464–491.
4. *Zabavsky B. V*. Conditions for stable range of an elementary divisor rings // arXiv:1508.07418v1 [math.RA] 29 Aug 2015.
5. *Zabavsky B. V*. Diagonal reduction of matrices over rings. – Mathematical Studies: Monograph Series, Vol. XVI. – Lviv: VNTL, 2012. – 251 p.
6. *Zabavsky B. V., Gatalevych A. I.* A commutative Bezout PM-domain is an elementary divisor ring // Algebra and Discrete Math. – 2015. – **19,** № 2. – P. 295–301.

МАКСИМАЛЬНО НЕГЕЛЬФАНДОВЫЕ ИДЕАЛЫ КОММУТАТИВНОЙ ОБЛАСТИ БЕЗУ

На основании понятия гельфандового элемента введено понятие максимально негельфандового идеала коммутативной области Безу. Установлены свойства этих идеалов. Введен гельфандов аналог радикала Джекобсона и исследованы его свойства. Изучены локально негельфандовые, а также коммутативные области Безу с конечным числом максимально негельфандовых идеалов. В частности, показано, что они являются кольцами гельфандового ранга 1, а следовательно, кольцами элементарных делителей.

MAXIMAL NON-GELFAND IDEALS OF COMMUTATIVE BEZOUT DOMAIN

Based on the concept of Gelfand element it is introduced the concept of maximal non-Gelfand ideal of commutative Bezout domain. The properties of such ideals are established. A Gelfand analog of Jacobson radical is introduced and its properties are analyzed. Non-Gelfand local Bezout domains and commutative Bezout domains with finite numbers of maximal non-Gelfand ideals are studied. In particular, it is shown that they are rings of Gelfand range 1 and, as a consequence, it is proved that they are elementary divisor rings.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
10.09.15