

**ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРУЖНОЇ СМУГИ
ЗА ВІДОМИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ НА ЇЇ СТОРОНАХ**

Розроблено методику зведення плоскої задачі термопружності для однорідної ізотропної смуги із заданими на сторонах переміщеннями за стаціонарного розподілу температурного поля до розв'язання відповідної задачі із заданими зовнішніми зусиллями. Досліджено розподіли температурних полів, напружень та переміщень у жорстко зацямленій смугі за гладкого та кусково-сталого теплового навантаження межі.

Вступ. Для побудови коректних розв'язків [9] задач теорії пружності та термопружності з різними крайовими умовами (у термінах напружень, переміщень чи змішаними умовами), а також для ефективних методів керування [6] напружено-деформованим станом тіл для досягнення потрібних показників експлуатаційних характеристик елементів конструкцій необхідно встановити явні взаємно-однозначні співвідношення між напруженнями та переміщеннями, зокрема на межі досліджуваних тіл. Окрім очевидної переваги наявності таких співвідношень, яка полягає у можливості розширити застосування апарату аналітичних та числових методів, розвинутих для розв'язування певних типів задач, відкривається можливість погодження отриманих розв'язків з основоположними принципами теорії пружності, зокрема, принципами суперпозиції та Сен-Венана, які, як правило, сформульовані окремо для напружень чи переміщень. Очевидно, що методи, які дають змогу встановити зв'язок між напруженнями та переміщеннями на межі, повинні забезпечувати розв'язок у вигляді явної функціональної залежності від факторів навантаження та орієнтуватися на точне задоволення крайових умов.

Один із таких підходів, названий [10] методом безпосереднього (або прямого) інтегрування, запропонував проф. В. М. Вігак та його учні [2–4] для побудови коректних аналітичних розв'язків задач теорії пружності й термопружності. У праці [7] для плоскої задачі в однорідній ізотропній смугі розглянуто випадки, коли на її сторонах задано зусилля, переміщення або змішані умови. За цим методом, шляхом інтегрування співвідношень Коші для визначення компонентів вектора переміщень через деформації встановлено інтегро-диференціальне рівняння суцільності. Показано, що це рівняння можна звести до класичного диференціального рівняння суцільності за виконання необхідної умови погодження переміщень та деформацій на поздовжніх сторонах смуги. Враховуючи вирази переміщень через деформації та явний розв'язок задачі теорії пружності та термопружності з крайовими умовами у термінах зовнішніх зусиль, встановили взаємно-однозначні співвідношення між зовнішніми зусиллями та переміщеннями на межі смуги. Виведено необхідні інтегральні умови рівноваги для зусиль та умови суцільності для переміщень, які забезпечують коректність розв'язків задач теорії пружності та термопружності. За цим підходом можна також встановити співвідношення між компонентами тензора напружень, інтегральні умови рівноваги для цих компонентів та вирази для інтегральних результуючих зусиль і моментів від напружень; отримати необхідні умови зрівноваження для зовнішніх зусиль і масових сил; встановити необхідні інтегральні умови суцільності для компонентів тензора деформацій і вектора переміщень.

Нижче з використанням методики [7] розв'язування задачі термопружності для однорідної ізотропної смуги із заданими на поздовжніх сторонах компонентами вектора переміщень зведено до відомого розв'язку в напруженнях [3]. Досліджено розподіли температурного поля та спричинених ним

напружень і переміщень у жорстко защемленій смузі за гладкого та кусково-сталого теплового навантаження її сторін.

Постава задачі. Термонапружений стан однорідної ізотропної пружної смуги $\{x \in (-\infty, \infty), y \in [-1, 1]\}$ за відсутності масових сил описують [5, 8] рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

та суцільності у напруженнях

$$\Delta \left(\sigma_x + \sigma_y + \frac{\alpha ET}{1-\nu} \right) = 0, \quad (2)$$

де $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; (x, y) – безрозмірні декартові координати; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень; α – коефіцієнт лінійного температурного видовження; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $T = T(x, y)$ – стаціонарне температурне поле, яке визначитимемо з рівняння теплопровідності

$$\Delta T = 0 \quad (3)$$

за заданих на сторонах смуги крайових умов

$$T(x, 1) = T_1(x), \quad T(x, -1) = T_2(x). \quad (4)$$

Тут $T_1(x), T_2(x)$ – відомі функції, які згасають, якщо $|x| \rightarrow \infty$. Відомо [5], що за вільної від зовнішніх силових навантажень смуги температурне поле, знайдене із (3), (4), не спричиняє температурних напружень. Якщо крайові умови задано для компонент вектора переміщень u, v

$$u(x, 1) = u_1(x), u(x, -1) = u_2(x), v(x, 1) = v_1(x), v(x, -1) = v_2(x), \quad (5)$$

де $u_j(x), v_j(x)$ – відомі функції, то можливе виникнення термонапружень, які пов'язані із переміщеннями фізичними співвідношеннями [5]

$$\begin{aligned} 2G \frac{\partial u}{\partial x} &= (1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y + \alpha ET, & G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \sigma_{xy}, \\ 2G \frac{\partial v}{\partial y} &= (1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x + \alpha ET, \end{aligned} \quad (6)$$

де $G = E/(2+2\nu)$ – модуль зсуву.

Стаavimo задачу визначити та дослідити напружено-деформований стан смуги, що описується рівняннями (1), (2), (6), за умов (5) та дії температурного поля, знайденого із задачі (3), (4).

Побудова розв'язку. З використанням інтегрального перетворення Фур'є [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}(y) \\ f(x, y) \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \exp(-isx) dx \\ \bar{f}(y) \exp(isx) / (2\pi) ds \end{array} \right\}, \quad (7)$$

де s – параметр перетворення, $i^2 = -1$, розв'язок задачі (3), (4) легко знайти у вигляді

$$\bar{T}(y) = \bar{T}_1 \frac{\text{sh } s(1+y)}{\text{sh } 2s} + \bar{T}_2 \frac{\text{sh } s(1-y)}{\text{sh } 2s}. \quad (8)$$

Для знаходження розв'язку задачі (1), (2), (5), (6) використаємо розв'язок задачі, що описується рівняннями (1), (2) та крайовими умовами у термінах напружень

$$\sigma_y(x, \pm 1) = -p_{(1,2)}(x), \quad \sigma_{xy}(x, \pm 1) = q_{(1,2)}(x), \quad (9)$$

який знайдено [3] з використанням методу безпосереднього інтегрування [10] та перетворення (7).

За крайових умов (5), між заданими на сторонах смуги переміщеннями, та зусиллями (9) встановлено взаємно-однозначні співвідношення [7]:

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{p}_1 + a_{12}\bar{p}_2 + a_{13}\bar{q}_1 + a_{14}\bar{q}_2 &= 2isG\bar{u}_1 + \Theta_1(1), \\ a_{12}\bar{p}_1 + a_{11}\bar{p}_2 - a_{14}\bar{q}_1 - a_{13}\bar{q}_2 &= 2isG\bar{u}_2 + \Theta_1(-1), \\ b_{11}\bar{p}_1 + b_{12}\bar{p}_2 + b_{13}\bar{q}_1 + b_{14}\bar{q}_2 &= 2s^2G\bar{v}_1 + \Theta_2(1), \\ -b_{12}\bar{p}_1 - b_{11}\bar{p}_2 + b_{14}\bar{q}_1 + b_{13}\bar{q}_2 &= 2s^2G\bar{v}_2 + \Theta_2(-1), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma a_{11} &= (2\nu - 1)\text{sh}^2 2s - 4s^2; \quad \gamma a_{12} = 4s(1 - \nu)\text{sh} 2s; \quad \gamma a_{13} = (1 - \nu)i(\text{sh} 4s - 4s); \\ \gamma a_{14} &= -2i(1 - \nu)(\text{sh} 2s - 2s \text{ch} 2s); \quad \gamma b_{11} = -s(1 - \nu)(\text{sh} 4s + 4s); \\ \gamma b_{14} &= 4is^2(1 - \nu)\text{sh} 2s; \quad \gamma b_{12} = 2s(1 - \nu)(\text{sh} 2s + 2s \text{ch} 2s); \\ \gamma b_{13} &= is \left((1 - 2\nu)\text{sh}^2 2s + 4s^2 \right); \quad \gamma = \text{sh}^2 2s - 4s^2; \\ \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1(y) \\ \Theta_2(y) \end{array} \right\} &= \frac{2s\alpha E}{\gamma} \int_{-1}^1 \bar{T}(\xi) \left\{ \begin{array}{l} 2s \text{chs}(y - \xi) - \text{sh} 2s \text{chs}(y + \xi) \\ 2s^2 \text{shs}(y - \xi) - \text{ssh} 2s \text{shs}(y + \xi) \end{array} \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Виразивши за допомогою формул (10) зусилля $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}_1, \bar{q}_2$ через переміщення $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ на сторонах $y = \pm 1$ смуги D та температурне поле (8), розв'язування задачі (1), (2), (5), (6) звели до вже відомого розв'язку [3, 6] задачі в напруженнях (1), (2), (9). Після відшукання розв'язку задачі у просторі зображень, оригінали компонент тензора напружень та вектора переміщень знаходимо, використовуючи обернене перетворення Фур'є (7).

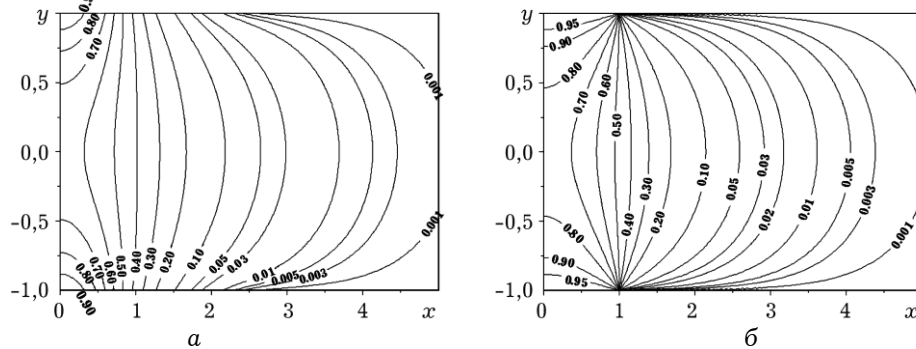


Рис. 1. Стаціонарний розподіл температурного поля у смугі за гладкого (а) та розривного (б) навантажень.

Числовий приклад та обговорення. Розрахуємо температурне поле, напруження та переміщення у смугі за жорсткого зацмелення сторін ($u_j = v_j = 0$), та гладкого $T_j = t_1 \exp(-ax^2)$ і розривного $T_j = \{t_2, |x| \leq b; 0, |x| > b\}$ температурних навантажень. Тут $j = 1, 2$; a, b – додатні константи, а t_1, t_2 – сталі параметри у розмірності температури, причому, щоб забезпечити однакову середньоінтегральну температуру на сторонах смуги для обох типів навантаження, покладали $t_1 = 2bt_2\sqrt{a/\pi}$. Розраховували при $\nu = 0.3, a = b = t_2 = 1$.

Розподіл температурного поля у смугі за вказаних температурних навантажень показано на рис. 1. Як бачимо, спосіб теплового навантаження

суттєво впливає на розподіл температури поблизу межі, позаяк із віддаленням від неї у поперечному напрямку та від прогрітої ділянки у поздовжньому напрямку розподіли температури для двох розглянутих випадків майже ідентичні.

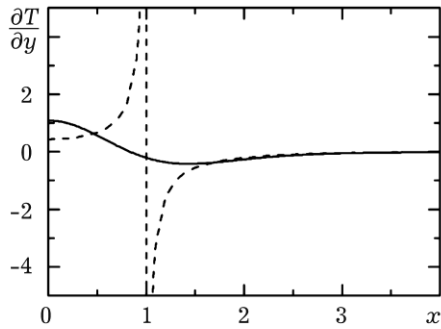


Рис. 2. Розподіл теплового потоку $\partial T/\partial y$ на поверхні $y = 1$ за гладкого (суцільна лінія) та розривного (штрихова) теплового навантажень.

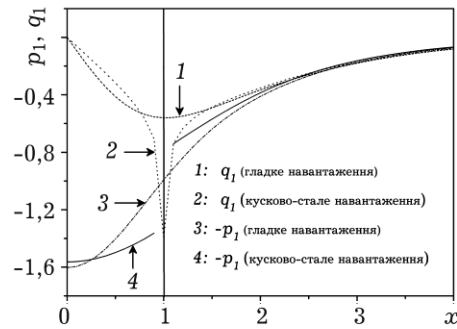


Рис. 3. Розподіл зовнішніх зусиль на поверхні $y = 1$ внаслідок жорсткого зацемлення та розподілу температури (8) за гладкого та кусково-сталого теплового навантажень.

Істотним є вплив способу теплового навантаження на розподіл теплового потоку. На рис. 2 подано розподіл складової $\partial T/\partial y$ теплового потоку на стороні $y = 1$. На відміну від гладкого навантаження, за розривної на межі температури тепловий потік має у точці розриву стрибок другого роду.

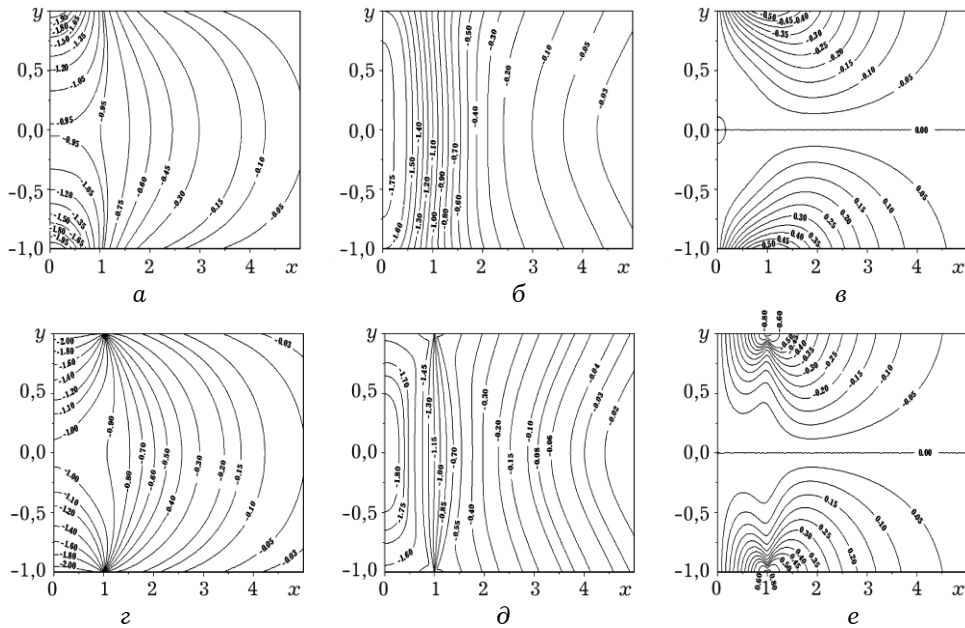


Рис. 4. Розподіл поздовжніх (а, г), поперечних (б, д) та дотичних (в, е) напружень у зацемленій смузі за гладкого (а, б, в) та розривного (г, д, е) теплового навантажень.

Внаслідок жорсткого зацемлення сторін смуги температурне поле спричинює у ній розподіли термонапружень, які повинні задовольняти умови (9). Розв'язавши систему рівнянь (10), за знайденим температурним полем (8) встановлюємо розподіли зусиль на сторонах смуги (рис. 3).

Нормальні та дотичні зусилля для розглянутої задачі є відповідно парними та непарними функціями поздовжньої координати, причому $p_1 = p_2$, $q_1 = -q_2$. Внаслідок рівності для обох випадків теплового навантаження середньоінтегральної вздовж кожної зі сторін смуги температури головні вектор та момент розрахованих зусиль є рівними для вказаних випадків. Слід підкреслити, що для обох випадків максимальні значення нормальних зусиль досягаються посередині ділянки, що зазнає нагріву. За кусково-сталого температурного навантаження нормальні та дотичні зусилля мають розриви відповідно першого та другого роду. Однак з віддаленням від нагрітої ділянки їх поведінка однакова.

На рис. 4 і 5 наведено розподіли компонент тензора напружень та вектора переміщень, що відповідають розрахованим зусиллям та умовам защемлення межі. Поздовжні (рис. 4а,г) та дотичні (рис. 4в,е) напруження досягають максимальних за модулем значень на защемлених сторонах смуги відповідно посередині та на краях зони нагрівання. Поперечні напруження (рис. 4б,д) є максимальними у центральному поперечному перерізі смуги на її серединній поздовжній осі. Розривність теплового навантаження межі (рис. 4г-е) спричинює стрімкіший перепад напружень на краю прогрітої ділянки, а у випадку дотичних напружень призводить до безмежних значень у точках $(\pm b, \pm 1)$.

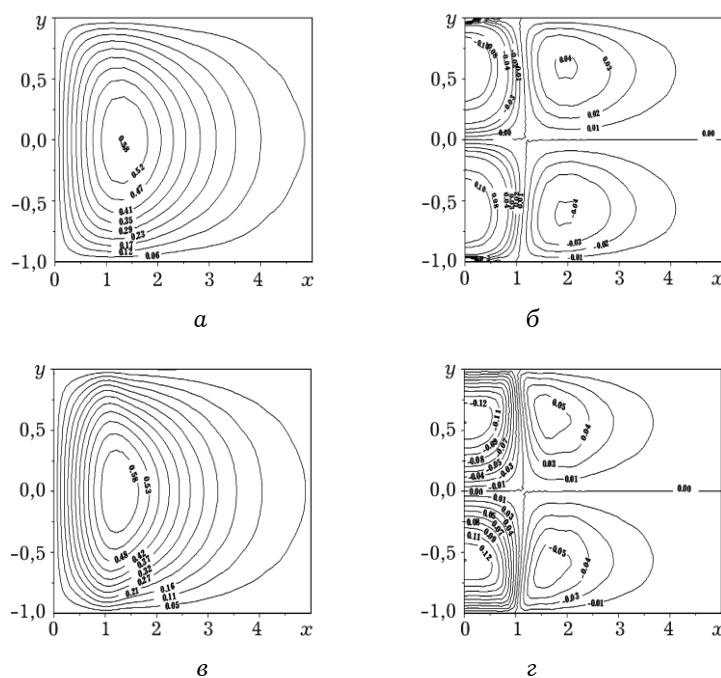


Рис. 5. Розподіл поздовжніх (а, в) та поперечних (б, г) переміщень у защемленій смугі за гладкого (а, б) та розривного (в, г) теплового навантажень.

Поздовжні переміщення (рис. 5) є непарною функцією поздовжньої координати і набувають максимальних за модулем значень у зоні з центром на осі смуги в перерізі, що межує із краєм теплонавантаженої ділянки ($x = \pm 1$). Характер зовнішнього теплового навантаження слабо впливає на розподіл поздовжніх переміщень у защемленій смугі (рис. 5а,в). Натомість, поперечні переміщення суттєво різняться (рис. 5б,г), особливо біля точок розриву крайових умов. Поздовжня центральна вісь смуги та поперечний переріз, що прилягає до краю прогрітої ділянки межі, є лініями зміни знака поперечних переміщень.

Висновки. Розвинуто методику зведення плоскої задачі термопружності для однорідної ізотропної смуги за заданих на поздовжніх сторонах компонент вектора переміщень до відповідної задачі із заданими зовнішніми зусиллями, розв'язок якої відомий. На цій основі досліджено температурні напруження та переміщення у смугі з жорстко защемленими сторонами, які нагріваються гладким та кусково-сталім температурним розподілом. Показано, що розривність крайових умов для температурного поля за механічного защемлення межі викликає на ній розривність нормальних напружень та необмеженість у точках розриву дотичних напружень.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного гранту НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (номер проекту 0114U005082).

1. Брычков Ю. А., Прудников А. Л. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
2. Вігак В. М. Корректные решения плоских задач теории упругости для полуплоскости // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 3. – С. 55–62.
3. Вігак В. М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності і термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
4. Вігак В., Ричагівський А. Рівняння та інтегральні умови суцільності для плоскої задачі механіки деформівного твердого тіла // Машинознавство. – 2000. – № 9. – С. 8–11.
5. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 310 с.
6. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл // Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – Т. 5. – 256 с.
7. Лозинський Ю. Я., Токовий Ю. В. Співвідношення між переміщеннями та зусиллями на поздовжніх сторонах пружної смуги // Прикл. проблеми механіки і математики – 2011. – Вип. 9. – С. 158–163.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. Rychahivskyy A. V., Tokovyy Yu. V. Correct Analytical Solutions to the Thermoelasticity Problems in a Semi-Plane // J. Thermal Stresses. – 2008. – 31, № 11. – P. 1125–1145.
10. Tokovyy Yu. V. Direct integration method // Encyclopedia of thermal stresses / in R. B. Hetnarski (ed.). – Springer, 2014. – V. 2. – P. 951–960.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ЗАДАНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ НА ЕЕ СТОРОНАХ

Разработана методика сведения плоской задачи термоупругости для однородной изотропной полосы с заданными на сторонах перемещениями при квазистационарном распределении температурного поля к решению соответствующей задачи с заданными внешними усилиями. Исследованы распределения температурных полей, напряжений и перемещений в жестко защемленной полосе при гладкой и кусочно-постоянной тепловой нагрузке границы.

THERMAL-STRESS ANALYSIS OF AN ELASTIC STRIP UNDER GIVEN DISPLACEMENTS OF ITS SIDES

A technique for reduction of the plane thermoelasticity problem for a homogeneous isotropic strip, which is subjected to the quasi-stationary temperature field under given displacements of its sides, to the solution of a corresponding problem with given external force is developed. The analysis of temperature distribution, stresses and displacements in rigidly clamped strip for piecewise constant and smooth thermal loadings on its sides is conducted.