

### ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ КУТІВ ВІДБИВАННЯ/ЗАЛОМЛЕННЯ SH-ХВИЛІ ЗА ВЗАЄМОДІЇ ІЗ НЕОДНОРІДНО ДЕФОРМОВАНИМ ПРУЖНИМ ШАРОМ

*Розв'язану раніше стаціонарну задачу взаємодії ультразвукової хвилі SH-поляризації з пружним шаром, що перебуває у стані плоскої деформації, узагальнено на випадок довільної ширини падаючого пучка. Отримано інтегральні рівняння для кутів відбивання/заломлення у шарі. Для їх розв'язування використано ітераційний метод. Числово вивчено вплив параметрів плоскої деформації у середньоінтегральному наближенні на зміну кутів відбивання/заломлення у системі «пружний півпростір-шар-пружний півпростір».*

Початкові деформації у твердих тілах впливають на процеси поширення, відбивання та заломлення у них пружних хвиль. Цю властивість використовують для ультразвукової томографії напружень у досліджуваних об'єктах [1]. Внаслідок неоднорідної деформації тіло стає акустично неоднорідним та анізотропним. У результаті математичні моделі, що описують хвильові процеси у таких об'єктах, є початково-крайовими задачами для системи рівнянь гіперболічного типу зі змінними коефіцієнтами, аналітичні розв'язки яких у загальному не вдається отримати. Тому створення математичних моделей взаємодії ультразвукових хвиль із деформованими об'єктами та розроблення методів їх розв'язування є актуальною проблемою, якій присвячено низку праць [5, 6].

Нижче подано узагальнену модель стаціонарної задачі про взаємодію SH-хвилі із пружним шаром у стані плоскої деформації, що розділяє два ізотропних півпростори, яка враховує інтерференцію падаючої та відбитої хвилі на верхній межі. У середньоінтегральному наближенні поля початкових деформацій визначено амплітуди відбитих/заломлених хвиль у системі «пружний півпростір-неоднорідно деформований шар-пружний півпростір». Записано інтегральні рівняння для визначення кутів відбивання/заломлення на межі поділу середовищ. Запропоновано ітераційний метод для їх розв'язування. Числово досліджено вплив двовимірного поля неоднорідної деформації у шарі на кути відбитих та заломлених SH-хвиль.

**Модель взаємодії SH-хвилі із двовимірним полем деформації у плоскому шарі.** Розглянемо ізотропний однорідний пружний шар  $\mathbf{S} : 0 < x_2 < h$ , який розділяє два ізотропних півпростори  $\mathbf{S}^{(1)} : -\infty < x_2 < 0$  та  $\mathbf{S}^{(2)} : h < x_2 < \infty$  із густинами маси  $\rho^{(n)}$  та модулями зсуву  $\mu^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ) відповідно. Шар із густиною маси  $\rho$ , коефіцієнтами Ляме  $\lambda, \mu$  та Мурнагана  $a, b, c$  перебуває у стані плоскої деформації, яку визначають компоненти  $e_{ij}(x_1, x_2)$ , ( $i, j = 1, 2$ ),  $e_{33} = \text{const}$ . Шар акустично неоднорідний і анізотропний.

Нехай у півпросторі  $\mathbf{S}^{(1)}$  уздовж напрямку, що утворює кут  $\alpha$  із віссю  $0x_2$ , поширюється ультразвуковий пучок SH-поляризації зі швидкістю  $C^{(1)} = \sqrt{\mu^{(1)}/\rho^{(1)}}$  та частотою  $\omega$ . Хвильове поле у неоднорідно деформованому шарі є суперпозицією заломлених у шар поверхнею  $x_2 = 0$  хвиль  $w_1(x_1, x_2, t)$  та відбитих у нього поверхнею  $x_2 = h$  хвиль  $w_R(x_1, x_2, t)$  вигляду  $w_\chi(x_1, x_2, t) = \dot{W}_\chi(x_1, x_2) \exp(-i\omega t)$ , ( $\chi = I, R$ ).

Згідно з розробленою раніше математичною моделлю динаміки малих пружних збурень у неоднорідно деформованому континуумі поширення гармонічної у часі хвилі SH-поляризації у системі «пружний півпростір–неоднорідно деформований шар–пружний півпростір» описує диференціальне рівняння [3]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( [\mu + (2b + c)(e_{11} + e_{33}) + 2be_{22}] \frac{\partial}{\partial x_1} + ce_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \dot{W}_\chi + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( [\mu + (2b + c)(e_{22} + e_{33}) + 2be_{11}] \frac{\partial}{\partial x_2} + ce_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \rho\omega^2 \right] \dot{W}_\chi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На поверхнях поділу середовищ  $x_2 = 0$  та  $x_2 = h$  виконуються умови ідеального механічного контакту для пружних збурень. Раніше [4] розв'язано аналогічну задачу для достатньо великих кутів падіння  $\alpha$  та обмежень на ширину падаючого ультразвукового пучка, за яких відбита на межі  $x_2 = h$  хвиля не інтерферує на поверхні  $x_2 = 0$  із хвилею, що падає. У загальному випадку на межах поділу середовищ існують співвідношення:

$$\begin{aligned} & (\dot{W}_I^{(1)} + \dot{W}_R^{(1)}) \exp(iK^{(1)}x_1 \sin \alpha) = \dot{W}_I(x_1, 0) + \dot{W}_R(x_1, 0); \\ & \mu^{(1)} iK^{(1)} \cos \alpha (\dot{W}_I^{(1)} - \dot{W}_R^{(1)}) \exp(iK^{(1)}x_1 \sin \alpha) = s_I(x_1, 0) + s_R(x_1, 0); \end{aligned}$$

$$\dot{W}_I(x_1, h) + \dot{W}_R(x_1, h) = \dot{W}_I^{(2)} \exp(iK^{(2)}(x_1 \sin \gamma + h \cos \gamma));$$

$$s_I(x_1, h) + s_R(x_1, h) = i\mu^{(2)}K^{(2)} \cos \gamma \dot{W}_I^{(2)} \exp(iK^{(2)}(x_1 \sin \gamma + h \cos \gamma)), \quad (2)$$

$$\text{де } s_\chi(x_1, x_2) = \left( (\mu + (2b + c)(e_{22} + e_{33}) + 2be_{11}) \frac{\partial}{\partial x_2} + ce_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \dot{W}_\chi(x_1, x_2).$$

Таким чином, хвильовий процес у пружно деформованому шарі, що розділяє два пружних півпростори, описує задача (1), (2).

**Визначення хвильового поля у пружно деформованому шарі у середньоінтегральному наближенні.** Для розв'язування сформульованої задачі використаємо ітераційну процедуру, запропоновану раніше [4]. Для цього перепишемо рівняння для хвилі  $w_I(x_1, x_2, t)$  у локальній декартовій системі координат  $\mathbf{K}_I = \{x, y, x_3\}$ , що отримана з вихідної системи поворотом у площині  $x_1Ox_2$  на кут  $\beta_I$  та трансляцією початку відліку на вектор  $(\xi_I, 0)$ . Хвилю  $w_R(x_1, x_2, t)$  розглядатимемо у системі координат  $\mathbf{K}_R = \{x, y, x_3\}$ , одержаній із вихідної системи поворотом у площині  $x_1Ox_2$  на кут  $(\pi - \beta_R)$  та трансляцією початку відліку на вектор  $(\xi_R, h)$ , де  $\xi_R = \xi_I + h \operatorname{tg} \beta_I$ . Кути  $\beta_I$  та  $\beta_R$  невідомі.

Функції компонент тензора початкової деформації  $e_{ij}(x_1, x_2)$  для цих локальних систем координат позначимо як  $\varepsilon_{ij}(x, y)$  [3] та подамо у вигляді суми  $\varepsilon_{ij}(x, y) = \bar{\varepsilon}_{ij}(\beta_\chi) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(x, y)$ , де  $\bar{\varepsilon}_{ij}(\beta_\chi)$  – середньоінтегральні значення компонент деформації на напрямках  $\mathbf{n}_I = \{\sin \beta_I, \cos \beta_I, 0\}$  (для  $\chi = I$ ) та  $\mathbf{n}_R = \{\sin \beta_R, -\cos \beta_R, 0\}$  (для  $\chi = R$ ):

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\beta_\chi) = \frac{\cos \beta_\chi}{h} \int_0^{h/\cos \beta_\chi} \varepsilon_{ij}(s, 0) ds. \quad (3)$$

У результаті рівняння (1) перепишемо у вигляді ітераційної послідовності рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\left( \left[ \mu + 2b\bar{\varepsilon}(\beta_\chi) + c\bar{\varepsilon}_y(\beta_\chi) \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho\omega^2 \right) \dot{W}_\chi^{[p+1]} = -(T + N) \dot{W}_\chi^{[p]}, \quad (4)$$

де  $T, N$  – диференціальні оператори [3];

$$\bar{\varepsilon}(\beta_\chi) = \bar{\varepsilon}_{11}(\beta_\chi) + \bar{\varepsilon}_{22}(\beta_\chi) + \varepsilon_{33};$$

$$\bar{\varepsilon}_y(\beta_I) = \bar{\varepsilon}_{11}(\beta_I) \sin^2 \beta_I + \bar{\varepsilon}_{22}(\beta_I) \cos^2 \beta_I + \bar{\varepsilon}_{12}(\beta_I) \sin 2\beta_I + \varepsilon_{33};$$

$$\bar{\varepsilon}_y(\beta_R) = \bar{\varepsilon}_{11}(\beta_R) \sin^2 \beta_R + \bar{\varepsilon}_{22}(\beta_R) \cos^2 \beta_R - \bar{\varepsilon}_{12}(\beta_R) \sin 2\beta_R + \varepsilon_{33}.$$

Обмежившись нульовим середньоінтегральним наближенням, приходимо до рівнянь для заломленої ( $\chi = I$ ) та відбитої ( $\chi = R$ ) хвиль:

$$\left[ \left( \mu + 2b\bar{\varepsilon}(\beta_\chi) + c\bar{\varepsilon}_y(\beta_\chi) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho\omega^2 \right] \dot{W}_\chi = 0, \quad (5)$$

Розв'язки рівняння (5) матимуть вигляд

$$\dot{W}_\chi(x) = \dot{W}_\chi \exp(iK_\chi x). \quad (6)$$

Тут

$$K_\chi = \omega/\bar{C}_\chi, \quad \bar{C}_\chi = \sqrt{\left[ \mu + 2b\bar{\varepsilon}(\beta_\chi) + c\bar{\varepsilon}_y(\beta_\chi) \right] / \rho}. \quad (7)$$

Для розв'язків (6) співвідношення (2) подамо у вигляді системи рівнянь для невідомих амплітуд  $\dot{W}_R^{(1)}, \dot{W}_I, \dot{W}_R, \dot{W}_I^{(2)}$  та кутів  $\beta_I, \beta_R$ :

$$\begin{aligned} & \left( \dot{W}_I^{(1)} + \dot{W}_R^{(1)} \right) \exp(iK^{(1)}\xi_I \sin \alpha) = \\ & = \dot{W}_I \exp(iK_I \xi_I \sin \beta_I) + \dot{W}_R \exp(iK_R \xi_I \sin \beta_R); \\ & K^{(1)} \exp(iK^{(1)}\xi_I \sin \alpha) \mu^{(1)} \left( \dot{W}_I^{(1)} - \dot{W}_R^{(1)} \right) \cos \alpha = \\ & = \dot{W}_I K_I \exp(iK_I \xi_I \sin \beta_I) \sigma_I + \dot{W}_R K_R \exp(iK_R \xi_I \sin \beta_R) \sigma_R; \\ & \dot{W}_I v_I \exp(iK_I \xi_R \sin \beta_I) + \dot{W}_R v_R \exp(iK_R \xi_R \sin \beta_R) = \\ & = \dot{W}_I^{(2)} v_I^{(2)} \exp(iK^{(2)}\xi_R \sin \gamma); \\ & \dot{W}_I v_I \sigma_I K_I \exp(iK_I \xi_R \sin \beta_I) + \dot{W}_R v_R \sigma_R K_R \exp(iK_R \xi_R \sin \beta_R) = \\ & = \dot{W}_I^{(2)} \mu^{(2)} v_I^{(2)} K^{(2)} \exp(iK^{(2)}\xi_R \sin \gamma) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут використано позначення:

$$\sigma_I = \left( \mu + 2b\bar{\varepsilon}(\beta_I) + c(\bar{\varepsilon}_{22}(\beta_I) + \varepsilon_{33}) \right) \cos \beta_I + c\bar{\varepsilon}_{12}(\beta_I) \sin \beta_I;$$

$$\sigma_R = c\bar{\varepsilon}_{12}(\beta_R) \sin \beta_R - \left( \mu + 2b\bar{\varepsilon}(\beta_R) + c(\bar{\varepsilon}_{22}(\beta_R) + \varepsilon_{33}) \right) \cos \beta_R;$$

$$v_I = \exp(iK_I h \cos \beta_I), \quad v_R = \exp(-iK_R h \cos \beta_R),$$

$$v_I^{(2)} = \exp(iK^{(2)} h \cos \gamma).$$

Із умов сумісності системи рівнянь (8) отримуємо співвідношення, що пов'язують кути  $\alpha, \beta_\chi, \gamma$ :

$$\bar{C}_\chi \sin \alpha - C^{(1)} \sin \beta_\chi = 0; \quad \bar{C}_\chi \sin \gamma - C^{(2)} \sin \beta_\chi = 0, \quad (\chi = I, R). \quad (9)$$

Звідси для відомого кута падіння  $\alpha$  та акустичних властивостей півпросторів отримаємо кут заломлення у середовище  $\mathbf{S}^{(2)}$ :

$$\gamma = \arcsin\left(C^{(2)}/C^{(1)} \sin \alpha\right). \quad (10)$$

Із урахуванням співвідношень (9), (10) розв'яжемо систему рівнянь (8) для амплітуд  $\dot{W}_R^{(1)}$ ,  $\dot{W}_I$ ,  $\dot{W}_R$  та  $\dot{W}_I^{(2)}$ . У результаті маємо:

$$\begin{aligned} \dot{W}_R^{(1)} &= \frac{S_I^{(1)} - S_R^{(1)}}{Z_I - Z_R} \dot{W}_I^{(1)}; \\ \dot{W}_I &= \frac{-2\mu^{(1)}v_R \sin \beta_I \{\mu^{(2)} \sin \beta_R - \sigma_R \operatorname{tg} \gamma\}}{Z_I - Z_R} \dot{W}_I^{(1)}; \\ \dot{W}_R &= \frac{2\mu^{(1)}v_I \sin \beta_R \{\mu^{(2)} \sin \beta_I - \sigma_I \operatorname{tg} \gamma\}}{Z_I - Z_R} \dot{W}_I^{(1)}; \\ \dot{W}_I^{(2)} &= \frac{2\mu^{(1)}v_I v_R \operatorname{tg} \gamma \{\sigma_R \sin \beta_I - \sigma_I \sin \beta_R\}}{v_I^{(2)}(Z_I - Z_R)} \dot{W}_I^{(1)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{де } Z_I &= v_I \{\mu^{(1)} \sin \beta_R + \sigma_R \operatorname{tg} \alpha\} \{\mu^{(2)} \sin \beta_I - \sigma_I \operatorname{tg} \gamma\}, \\ Z_R &= v_R \{\mu^{(1)} \sin \beta_I + \sigma_I \operatorname{tg} \alpha\} \{\mu^{(2)} \sin \beta_R - \sigma_R \operatorname{tg} \gamma\}, \\ S_R^{(1)} &= v_R \{\mu^{(1)} \sin \beta_I - \sigma_I \operatorname{tg} \alpha\} \{\mu^{(2)} \sin \beta_R - \sigma_R \operatorname{tg} \gamma\}, \end{aligned}$$

$$S_I^{(1)} = v_I \{\mu^{(1)} \sin \beta_R - \sigma_R \operatorname{tg} \alpha\} \{\mu^{(2)} \sin \beta_I - \sigma_I \operatorname{tg} \gamma\}.$$

Співвідношення (11), що визначають амплітуди відбитих та заломлених деформованим шаром хвиль, містять невідомі кути  $\beta_I$  та  $\beta_R$ . Для їх отримання слід розв'язати трансцендентні рівняння (9).

**Ітераційний метод знаходження коренів трансцендентних рівнянь.** Рівняння (9) відрізняються від відомого лінійного співвідношення закону Снелліуса для задачі відбивання/заломлення плоских хвиль на межі поділу двох ізотропних середовищ [2] тим, що, як випливає зі співвідношень (7), фазові швидкості  $\bar{C}_\chi$  залежать від кутів  $\beta_\chi$ .

Із урахуванням (7) рівняння (9) матиме вигляд

$$f_\chi(\beta_\chi) = \rho^{(1)} \left( \mu + \frac{\cos \beta_\chi}{h} \int_0^{h/\cos \beta_\chi} F_\chi(s, \beta_\chi) ds \right) - \mu^{(1)} \rho \frac{\sin^2 \beta_\chi}{\sin^2 \alpha} = 0. \quad (12)$$

Тут

$$F_I(s, \beta_I) = 2b\varepsilon(s, 0) + c\varepsilon_{12}(s, 0) \sin 2\beta_I + c(\varepsilon_{11}(s, 0) \sin^2 \beta_I + \varepsilon_{22}(s, 0) \cos^2 \beta_I),$$

$$F_R(s, \beta_R) = 2b\varepsilon(s, 0) - c\varepsilon_{12}(s, 0) \sin 2\beta_R + c(\varepsilon_{11}(s, 0) \sin^2 \beta_R + \varepsilon_{22}(s, 0) \cos^2 \beta_R).$$

Оскільки акустична неоднорідність, обумовлена деформацією, мала, невідомі кути  $\beta_\chi$  ( $\chi = I, R$ ) шукатимемо у вигляді суми кута заломлення у шар без деформацій  $\beta$  та малих поправок  $\Delta_\chi$ :

$$\beta_\chi = \beta + \Delta_\chi, \quad \text{де } \beta = \arcsin\left(C/C^{(1)} \sin \alpha\right). \quad (13)$$

Підставляючи подання (13) у рівняння (12), розкладемо члени рівняння у ряд Тейлора в околі  $\beta$ . У лінійному наближенні отримаємо:

$$\Delta_\chi = \frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \bar{F}_\chi(\beta)}{2\mu + \operatorname{tg}^2 \beta (\bar{F}_\chi(\beta) - F_\chi(h/\cos \beta, \beta)) - \operatorname{tg} \beta \bar{F}_{\beta\chi}(\beta)}, \quad (14)$$

$$\text{де } \bar{F}_\chi(\beta) = \bar{F}_\chi = \frac{\cos \beta}{h} \int_0^{h/\cos \beta} F_\chi(s, \beta) ds,$$

$$\bar{F}_{\beta\chi}(\beta) = \frac{\cos \beta}{h} \int_0^{h/\cos \beta} \left. \frac{\partial}{\partial z} (F_\chi(s, z)) \right|_{z=\beta} ds.$$

У праці [3] обмежилися нульовими наближеннями поправок для кутів відбивання/заломлення, достатніх для полів початкових деформацій із малими градієнтами вздовж напрямків поширення зондувальних імпульсів. Якщо ж у нульовому наближенні не вдається отримати розв'язок рівняння (12) з достатньою точністю, вважатимемо значення кутів  $\beta_\chi = \beta + \Delta_\chi$  новим наближенням для визначення поправок. На наступних ітераціях матимемо:

$$\Delta_\chi^{(p+1)} = \frac{\rho \bar{C}_\chi(\beta_\chi^{(p)})^2 - \mu \frac{\sin^2(\beta_\chi^{(p)})}{\sin^2(\beta)}}{\mu \frac{\sin(2\beta_\chi^{(p)})}{\sin^2(\beta)} + \operatorname{tg}(\beta_\chi^{(p)}) \left\{ \bar{F}_\chi(\beta_\chi^{(p)}) - F_\chi\left(\frac{h}{\cos(\beta_\chi^{(p)})}, \beta_\chi^{(p)}\right) \right\} - \bar{F}_{\beta\chi}(\beta_\chi^{(p)})}. \quad (15)$$

Таким чином, формули (14), (15) дають можливість отримати ітераційну послідовність Ньютона для визначення кутів відбивання/заломлення напружено-деформованим шаром у вигляді

$$\beta_\chi^{(p+1)} = \beta_\chi^{(p)} + \Delta_\chi^{(p)}. \quad (16)$$

Ітераційний процес продовжуватимемо до одержання розв'язку рівняння (12) із заданою точністю.

**Приклад.** Розроблений ітераційний метод розв'язування трансцендентних рівнянь використаємо для визначення кутів відбивання/заломлення хвиль у системі двох ізотропних різнорідних півпросторів, які розділяє шар із залишковими напруженнями. Напруження зумовлені стрибками переміщень, зосередженими на відріжку  $x_1 = 0$ . У цьому випадку початкові напруження та деформації швидко згасають із віддаленням від лінії контакту  $x_1 = 0$  [4].

На рис. 1; 2 у нульовому та першому наближеннях ітераційного алгоритму побудовано залежності поправок  $\Delta_I$  для кута заломлення  $\beta_I$ , обумовлених початковими деформаціями, від кута падіння  $\alpha$  для фіксованої точки входження  $\xi_I$  зондувального імпульсу у досліджуваний об'єкт. Тут покладемо  $\xi_I = 0.1$  (рис. 1) та  $0.5$  (рис. 2) відповідно. На рис. 3; 4 проілюстровано залежність похибок від точки входження  $\xi_I$  для фіксованого кута падіння  $\alpha$ :  $\alpha = 0.3 \text{ rad}$  (рис. 3) та  $0.7 \text{ rad}$  (рис. 4). На всіх рисунках цифрою 1 позначені поправки кутів заломлення на першій ітерації, цифрою 2 – на другій.

Поправки, отримані на другій ітерації, суттєво менші, ніж для першого наближення. Зіставляючи криві на рис. 1 та 2, бачимо, що поправки для кутів заломлення, обумовлені початковими деформаціями у шарі, порівняно із кутом заломлення для ненапруженого шару, є більші, якщо точка входження зондувального імпульсу знаходиться ближче до зони дії напружень ( $\xi_I = 0.1$ ). Для будь-яких кутів падіння похибки  $\Delta_I$  зменшуються із віддаленням від поверхні  $x_1 = 0$  (рис. 3 і 4).

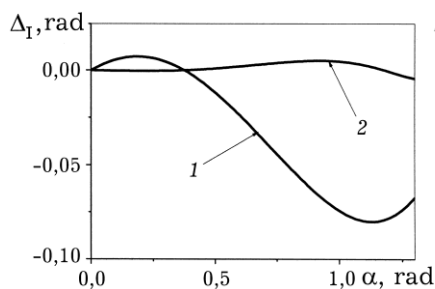


Рис. 1.

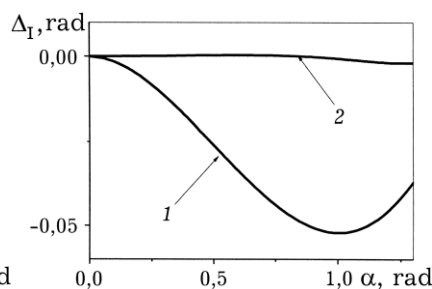


Рис. 2.

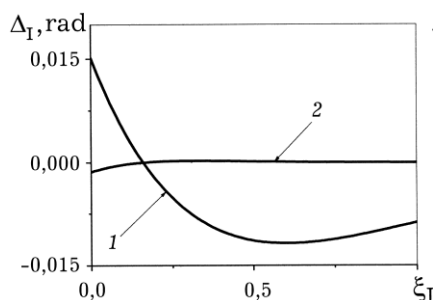


Рис. 3.

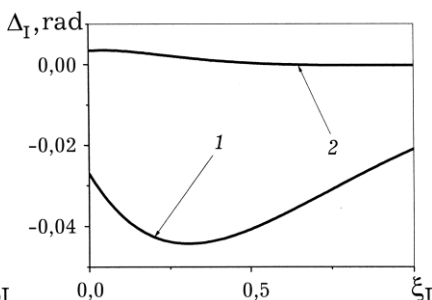


Рис. 4.

**Висновки.** У променевому наближенні геометричної оптики досліджено падіння плоского ультразвукового SH-поляризованого пучка довільної ширини на неоднорідно деформований плоский шар, що розділяє два ізотропних пружних півпростори. Із використанням нульового наближення розробленого раніше ітераційного процесу для задачі поширення пружних збурень у неоднорідно деформованому тілі записано подання для амплітуд хвильового поля у напруженому шарі та амплітуд хвиль, що пройшли крізь шар, як функцій невідомих кутів відбивання/заломлення на межі поділу середовищ із різними акустичними властивостями. Для визначення цих кутів отримано інтегральні рівняння та запропоновано ітераційний алгоритм їх розв'язування, в якому, враховуючи слабку акустичну неоднорідність шару, за початкове наближення шуканих кутів вибрано кути заломлення у шар без напружень. Числові дослідження підтвердили збіжність запропонованого ітераційного методу. Виявлено, що для слабо змінних полів початкової деформації уже перше наближення ітераційної процедури дає можливість із достатньою точністю визначити кути відбивання/заломлення неоднорідно деформованим шаром. Таким чином, отримані співвідношення можна ефективно застосовувати для формулювання прямих та обернених задач неруйнівного визначення напружено-деформованого стану кусково-однорідних тіл із урахуванням процесів відбивання/заломлення на межі поділу середовищ.

1. Алешин Н. П., Белый В. Е., Вopilкин А. Х. и др. Методы акустического контроля металлов. – М.: Машиностроение, 1989. – 456 с.
2. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацьпура В. Т. Основы акустики. – К.: Наук. думка, 2007. – 640 с.
3. Кравчишин О. З., Чекурін В. Ф. Взаємодія ультразвукової хвилі SH-поляризації з двовимірним полем деформації у плоскому шарі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 2. – С. 203–211.
4. Чекурін В. Ф., Кравчишин О. З. Пружні збурення в неоднорідно деформованих твердих тілах. – Львів: СПОЛОМ, 2008. – 152 с.

5. *Burgoyne H. A., Daraio Ch.* Elastic-plastic wave propagation in uniform and periodic granular chains // J. of Appl. Mech. – 2015. – **82**, № 8. P. 15–24.
6. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. V.* Velocities, dispersion and energy of SH-Waves in anisotropic laminated plates // Акуст. журн. – 2014. – **60**. № 2. – P. 200–207.

**ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВ ОТРАЖЕНИЯ/ПРЕЛОМЛЕНИЯ SH-ВОЛНЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С НЕОДНОРОДНО ДЕФОРМИРОВАННЫМ УПРУГИМ СЛОЕМ**

*Решенную ранее стационарную задачу взаимодействия ультразвуковой волны SH-поляризации с упругим слоем, находящимся в состоянии плоской деформации, обобщено на случай произвольной ширины падающего пучка. Получены интегральные уравнения для углов отражения/преломления в слое. Для их решения использован итерационный метод. Численно изучено влияние параметров плоской деформации в среднеинтегральном приближении на изменение углов отражения/преломления в системе «упругое полупространство–слой–упругое полупространство».*

**THE ITERATION METHOD FOR DETERMINATION OF THE ANGLES OF REFLECTION/REFRACTION OF SH-WAVE UNDER INTERACTION WITH THE INHOMOGENEOUSLY DEFORMED ELASTIC LAYER**

*The previously solved stationary problem of interaction between ultrasonic SH-polarization wave and an elastic layer in the state of plane deformation is generalized for the case of incident beam of arbitrary width. The integral equations for the angles of reflection/refraction in the layer are obtained. The iteration method is used to solve them. The influence of the parameters of plane deformation in the mean-integral approximation on the change of the angle of reflection/refraction in the system “elastic half-space–layer–elastic half-space” is studied numerically.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
01.10.15