УДК 539.3

М. В. Марчук[1,2], В. С. Пакош[1], В. М. Харченко[3]

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН РІВНОМІРНО НАГРІТОЇ ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНОЇ НА ТОРЦЯХ НИЖНЬОЇ ЛИЦЕВОЇ ПЛОЩИНИ КОМПОЗИТНОЇ ПЛАСТИНИ-СМУГИ

Отримано співвідношення уточненої теорії термопружності податливих до трансверсальних зсуву та стиснення пластин-смуг. Для рівномірного нагріву за шарнірного закріплення на торцях нижньої лицевої площини знайдено аналітичний розв'язок. Проаналізовано вплив параметрів податливості до зсуву та стиснення на деформативність.

Вступ. Тонкі композитні пластини широко використовують як навантажені елементи відповідальних конструкцій різноманітного цільового призначення, що піддаються впливу інтенсивних температурних полів [7]. Для випадку традиційних ізотропних матеріалів термопружний стан вказаних об'єктів детально досліджений на основі класичної теорії пластин [5, 6, 9]. Ефекти врахування податливості до трансверсального зсуву вивчені на основі узагальненої теорії в працях [2, 3]. Однак елементи конструкцій зі сучасних армованих композиційних матеріалів на полімерній основі, окрім вказаної властивості, значно податливі також до трансверсального стиснення [1, 8]. Для визначення впливу на термопружний стан цього чинника необхідно використовувати дво- або тривимірні співвідношення термопружності, що не завжди дає змогу отримати точний або коректний числовий розв'язок, або ж теорії вищих порядків [10, 11].

Нижче на основі двовимірних співвідношень термопружності отримані рівняння уточненої теорії пластин-смуг, що дають можливість врахувати вплив податливості до трансверсальних деформацій як зсуву, так і стиснення. Для прикладу розглянуто задачу про термопружний стан рівномірно нагрітої шарнірно закріпленої на торцях нижньої лицевої площини пластини-смуги.

Формулювання задачі. Розглянемо трансверсальний ортотропний пружний шар товщини $2h$, який віднесено до ортогональної системи координат x_i, $i = 1,2,3$ з початком у центрі перерізу $x_2 = 0$. Вважаємо, що цей шар має значно більший розмір уздовж осі x_2 проти довжини перерізу $x_2 = 0$ серединної площини $x_3 = 0$. Тоді, якщо умови закріплення торців шару $x_1 = \pm l$ та умови навантаження не залежать від координати x_2, то через незначний вплив умов закріплення країв $x_2 = \pm b$ функції, які визначають термопружний стан, залежать лише від координат x_1, x_3. Співвідношенням Дюамеля–Неймана [5] надамо вигляду

$$e_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu'}{E'}\sigma_3 + \alpha_T T;$$

$$0 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 + \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu'}{E'}\sigma_3 + \alpha_T T;$$

$$e_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{E'}\sigma_3 + \alpha'_T T. \tag{1}$$

Звідси записуємо вирази для σ_1 і σ_3, необхідні для подальших викладок:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu - 2\nu\nu'}\left[\frac{1 - \nu\nu'}{1 + \nu} e_1 + \nu' e_3 - (\alpha_T + \nu'\alpha'_T)T\right],$$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2015. – Вип. 13. – С. 182–186.

$$\sigma_3 = E_0\,[e_3 + \lambda e_1 - (2\lambda\alpha_T + \alpha'_T)T]\,,$$

де $E_0 = E'(1-\nu)/\delta^2$, $\delta^2 = 1-\nu-2(\nu')^2(E/E')$, $\lambda = \nu'(E/E')/(1-\nu)$; E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантній їй площинах; E', ν' – ті ж величини у перпендикулярних до серединної площинах; α_T і α'_T – коефіцієнти лінійного температурного розширення в напрямках x_1 та x_3 відповідно.

Розвинення в ряди за поліномами Лежандра компонент вектора переміщення, тензорів деформацій та напружень, а також температурного поля за одночасного задоволення однорідних крайових умов у напруженнях на лицевих площинах [4] з використанням (1) дає змогу отримати співвідношення уточненої термопружності податливих до трансверсальних зсуву та стиснення пластин-смуг, що містять

– рівняння рівноваги:

$$N' = 0\,, \quad M' - Q_0 = 0\,, \quad Q'_0 = 0\,, \quad Q'_1 - 6\sigma_3^0 = 0\,; \tag{2}$$

– співвідношення термопружності:

$$N = \bar{B}(e_1^0 + \lambda e_3^0) - N_T\,, \quad M = \bar{D}\bar{e}_1^1 - M_T\,,$$

$$Q_0 = \Lambda\cdot 2e_{13}^0\,, \quad Q_1 = \frac{3}{4}\Lambda\cdot 2e_{13}^1\,,$$

$$\sigma_3^0 = \frac{5}{6}E_0[e_3^0 + \lambda e_1^0 - (2\lambda\alpha_T + \alpha'_T)T_0\,; \tag{3}$$

– деформаційні співвідношення:

$$e_1^0 = u'\,, \quad \bar{e}_1^1 = \gamma'\,, \quad 2e_{13}^0 = \gamma + w'\,, \quad 2e_{13}^1 = w'_1\,, \quad e_3^0 = w'_1/h\,. \tag{4}$$

У рівностях (2)–(4) вжиті загальноприйняті позначення для розтягувального N, перерізувального Q_0 та стискувального Q_1 зусиль і згинного моменту M; компонент тензора напружень σ_{ij}, переміщень u точок серединної площини в тангенціальному напрямку x_1, кута повороту γ нормального до серединної площини елемента перед деформуванням; переміщення w точок серединної площини вздовж нормальної координати x_3, переміщення w_1 точок лицевих площин уздовж нормальної координати, поздовжньої e_1^0 та згинної $\bar{e}_1^1$ деформацій, трансверсальних деформацій зсуву e_{13}^0 і стиснення e_{13}^1 та e_3^0, а також для введених жорсткісних характеристик: $\bar{B} = 2Eh(1+\alpha)/(1-\nu^2)$ – узагальненої жорсткості на розтяг, $\bar{D} = h^2\bar{B}/3$ – узагальненої згинної жорсткості, $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувної жорсткості, $\alpha = (1+\nu)(\nu')^2(E/E')/\delta^2$, G' – трансверсального модуля зсуву; температурних розтягувального зусилля $N_T = \bar{B}\beta_T T_0$ і згинного моменту $M_T = \bar{D}\beta_T T_1/h$, $T = T_0(x_1) + T_1(x_1)(x_3/h)$ – температурного поля в пластині-смузі, $\beta_T = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T$, $k' = 14/15$.

Крайові умови при $x = \pm l$ за шарнірного закріплення пластини на нижніх ребрах торців мають вигляд

$$N(\pm l) = 0\,, \quad u(\pm l) \pm h\,\gamma(\pm l) = 0\,, \quad w(\pm l) - w_1(\pm l) = 0\,, \quad Q_1(\pm l) = 0\,. \tag{5}$$

Рівняння (2) разом зі співвідношеннями (3), (4) і крайовими умовами (5) описують термопружний стан пластини-смуги, викликаний температурним полем T, і явно враховують податливість до трансверсальних зсуву та стиснення.

Відшукання розв'язку задачі. Розглянемо рівномірний нагрів пластини-смуги, тобто, коли $T_0 = \mathrm{const}$, а $T_1 = 0$. Тоді система розв'язувальних рівнянь після почергової підстановки (4) в (3) і результату − в (2) набуде вигляду при $\nu = \nu'$, $\alpha_T = \alpha'_T$, $E = E'$:

$$u' + \lambda w_1 / h = C_1 / \bar{B} + \beta_t T_0 , \tag{6}$$

$$w'' - \frac{20}{3}\frac{E_0}{\Lambda}(w_1 / h + \lambda u' - \beta_t T_0) = 0 , \tag{7}$$

$$\gamma'' - \kappa^2(\gamma + w') = 0 , \qquad \kappa^2 = \Lambda / \bar{D} , \tag{8}$$

$$\gamma' + w'' = 0 , \tag{9}$$

де константу C_1 слід визначати з крайових умов.

З системи рівнянь (6)−(9), якщо $w_1 \equiv 0$, отримуємо випадок застосування теорії на основі зсувної моделі С. П. Тимошенка [8]. Всі характеристики термопружного деформування тоді визначають через функцію прогину серединної площини $w(x)$, для якої маємо вираз

$$w = \frac{\alpha_T(1+\nu)T_0}{2h}(l^2 - x^2) . \tag{10}$$

Очевидно, що при $T_0 > 0$ матимемо вигнуту в напрямку осі x_3 пластину, а при $T_0 < 0$ − ввігнуту.

Оскільки температурне навантаження T_0 не входить у співвідношення термопружності для зсувних складових, то ідентичний результат отримаємо також, застосовуючи класичну теорію пластин.

За явного врахування стиснення функція w_1, що характеризує зміну довжини нормального елемента, і тангенціальне переміщення u задовольняють систему рівнянь (6), (7), а для прогину серединної площини w та кута повороту нормалі γ маємо формули

$$w = a_1 + a_2 x^2 , \tag{11}$$

$$\gamma = -w' , \tag{12}$$

де сталі a_1 і a_2 визначаємо з другої та третьої рівностей в умовах (5).

Для визначення функції w_1 зі системи (6), (7) маємо рівняння

$$w_1'' - \frac{k^2}{h^2} w_1 = -\frac{k^2}{h}(1-\nu)\beta_T T_0 , \qquad k^2 = \frac{10}{3}\frac{B}{\Lambda} ,$$

розв'язок якого

$$w_1 = C_3 sh(kx / h) + C_4 ch(kx / h) + h(1-\nu)\beta_T T_0 .$$

З умови симетрії $w_1(-x) = w_1(x)$ та четвертої рівності в (5) маємо:

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0 .$$

Для тангенціального переміщення u точок серединної площини з (6) отримуємо:

$$u = \alpha_T (1+\nu) T_0 \, x . \tag{13}$$

З урахуванням (12) з другої рівності в (5) знаходимо коефіцієнт a_2 для виразу (11):

$$a_2 = -\alpha_T (1+\nu) T_0 \,/\, 2h . \tag{14}$$

Тоді третя рівність у (5) набуде вигляду

$$a_1 - \frac{\alpha_T (1+\nu) T_0}{2h} l^2 - h \alpha_T (1+\nu) T_0 = 0 ,$$

звідки

$$a_1 = \alpha_T (1+\nu) T_0 \, (h + l^2 \,/\, 2h) . \tag{15}$$

Таким чином, функція прогину серединної площини за врахування податливості до стиснення матиме вигляд

$$w = \frac{\alpha_T (1+\nu) T_0}{2h} \left(\frac{h^2}{2} + l^2 - x^2 \right). \tag{16}$$

Аналіз отриманих результатів. Деформативність пластини-смуги (максимальний прогин серединної площини) без урахування податливості до стиснення (класична та зсувна теорії пластин) визначаємо з (10)

$$w_{(1)} = \frac{\alpha_T (1+\nu) T_0}{2h} \, l^2 , \tag{17}$$

а з урахуванням – з (16)

$$w_{(2)} = \frac{\alpha_T (1+\nu) T_0}{2h} \left(\frac{h^2}{2} + l^2 \right). \tag{18}$$

Ввівши позначення $\eta = w_{(2)} \,/\, w_{(1)}$, з (17) та (18) отримаємо:

$$\eta = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} , \tag{19}$$

де $\varepsilon = h \,/\, l$ – параметр тонкостінності.

Висновки. Урахування податливості до стиснення ізотропного матеріалу пластини-смуги зумовлює незначне підвищення деформативності (тобто пониження жорсткості), оскільки $\eta > 1$ завжди (згідно з (19)). У подальшому такі дослідження необхідно виконати для випадку трансверсальної ортотропії термопружних характеристик матеріалу та різних крайових умов на видовжених торцях.

1. *Композиционные* материалы: Справ. / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.; под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
2. *Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М.* Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: Поліграфія, 2005. – 396 с.
3. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
4. *Пелех Б. Л., Марчук М. В.* Обобщенная нелинейная теория термоупругих оболочек с учетом трансверсальных деформаций // Температурные задачи и устойчивость пластин и оболочек. Межвуз. науч. сб. – Саратов: Изд-во СГУ, 1988. – С. 6–8.

5. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
7. *Прочность* ракетных конструкций / Под ред. В. И. Моссаковского. – М.: Высш. шк., 1990. – 360 с.
8. *Christensen R. M.* Mechanics of composite materials. – New York: J. Wiley & Sons, 1979. – 348 p.
9. *Encyclopedia* of Thermal Stresses / Hetnarski R. B. (ed.). – Springer, 2014. – Vol. **1–11**.
10. *Youssef H. M. and El-Bary A.* Generalized Thermoelastic Infinite Layer Subjected to Ramp-Type Thermal and Mechanical Loading under Three Theories – State Space Approach // J. of Thermal Stresses. – 2009. – **32**, № 12. – P. 1293–1310. DOI:10.1080/01495730903249276.
11. *Dimitrienko Yu. I., Yakovlev D. O.* The Asymptotic Theory of Thermoelasticity of Multilayer Composite Plates // Composites: Mechanics, Computations, Applications: Int. J. – 2015. – **6**, Issue 1. – P. 13–51.
    DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.V6.I1.20.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ НА ТОРЦАХ НИЖНЕЙ ЛИЦЕВОЙ ПЛОСКОСТИ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ

Получены соотношения уточненной теории термоупругости податливых к трансверсальным сдвигу и сжатию пластин-полос. Для равномерного нагрева при шарнирном закреплении на торцах нижней лицевой плоскости найдено аналитическое решение. Проанализировано влияние параметров податливости к сдвигу и сжатию на деформативность.

THERMOELASTIC STATE OF UNIFORMLY HEATED HINGED ON THE ENDS OF THE LOWER FRONT PLANE OF COMPOSITE PLATE-STRIP

The relations of the refined theory of thermoelasticity for the plates-strips pliable to transversal shear and compression are obtained. In the case of uniform heating at hinge fixing on the end faces of lower facial plane the analytical solution is found. The influence of parameters of pliability to shear and compression on deformability is analyzed.

[1]Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

[2]Нац. ун-т “Львівська політехніка”, Львів;

[3]ДП «Констр. бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ

Одержано 05.10.15