УДК 512.64

В. П. Щедрик

ЗНАЧЕННЯ МАТРИЦІ НА СИСТЕМІ КОРЕНІВ ДІАГОНАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ МАТРИЦІ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Досліджено властивості значення матриці на системі коренів діагональних елементів матриці. Отримані результати використано для регуляризації поліноміальних матриць.

У 1980 р. П. С. Казімірський [4] виділив регулярний множник з матричного полінома. Дещо пізніше цю задачу розв'язали в термінах інваріантних підпросторів та жорданових ланцюгів [6, 5]. Одним із основних інструментів досліджень П. С. Казімірського було поняття значення матриці на системі коренів многочлена [3]. У цій праці на основі результатів П. С. Казімірського введено поняття значення матриці на системі коренів діагональних елементів матриці. Отримані результати використано для встановлення необхідних та достатніх умов регуляризації матриць.

Нехай $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_1)^{k_2} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r}$ – унітальний поліном над алгебрично замкненим полем F характеристики нуль і $G(x)$ – матриця над $F[x]$.

Означення 1 [4]**.** Значенням матриці $G(x)$ на системі коренів полінома $\varphi(x)$ називають числовою матрицею:

$$M_{G(x)}(\varphi) = \begin{Vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \cdots \\ H_r \end{Vmatrix}, \quad H_i = \begin{Vmatrix} G'(\alpha_i) \\ G''(\alpha_i) \\ \cdots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{Vmatrix} = M_{G(x)}((x - \alpha_i)^{k_1}) = M_{G(x)}[\alpha_i^{(k_1)}],$$

$i = 1, 2, \ldots, r$, де $G^{(j)}(x)$ – похідна j-го порядку матриці $G(x)$.

Нехай $G(x)$ – $n \times m$ матриця, $\mathbf{g}_i(x)$ – її i-й рядок, $i = 1, 2, \ldots, n$ і

$$\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)), \; \varphi_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

де $\varphi_i(x)$ – унітальні поліноми над $F[x]$.

Означення 2. Значенням матриці $G(x)$ на системі коренів діагональних елементів матриці $\Phi(x)$ називають числову матрицю

$$M_{G(x)}(\Phi) = \begin{Vmatrix} M_{\mathbf{g}_1(x)}(\varphi_1) \\ \cdots \\ M_{\mathbf{g}_n(x)}(\varphi_n) \end{Vmatrix},$$

де блок $M_{\mathbf{g}_k(x)}(\varphi_k)$ відсутній, якщо $\varphi_k(x) = 1$.

Без особливих труднощів доводять такі властивості.

Властивість 1. *Якщо L матриця над F, то*

$$M_{G(x)L}(\Phi) = M_{G(x)}(\Phi)L.$$

Властивість 2. *Виконується рівність*

$$M_{G_1(x)+G_2(x)}(\Phi) = M_{G_1(x)}(\Phi) + M_{G_2(x)}(\Phi).$$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2015. – Вип. 13. – С. 187–194.

Властивість 3. *Для того, щоб* $M_{G(x)}(\Phi)=\mathbf{0}$, *необхідно та достатньо, щоб* $G(x)=\Phi(x)Q(x)$.

Нехай $A(x)$ − неособлива $n\times n$ матриця над $F[x]$. Для неї існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x)=\operatorname{diag}(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\ \varphi_n(x))=\Phi(x), \tag{1}$$

де $\varphi_i(x)\,|\,\varphi_{i+1}(x)$, $i=1,2,\dots,n-1$. Матрицю $\Phi(x)$ називають формою Сміта матриці $A(x)$, а матриці $P(x)$ та $Q(x)$ − лівою та правою перетворювальними матрицями матриці $A(x)$. Позначимо через $\mathbf{P}_A$ множину оборотних матриць $P(x)$, які задовольняють рівність (1). Згідно з [1] множина $\mathbf{P}_A=\mathbf{G}_\Phi P(x)$, де $P(x)$ − довільна фіксована матриця з рівності (1), а

$$\mathbf{G}_\Phi=\{H(x)\in GL_n(F[x])\ \ |\ \ H(x)\Phi(x)=\Phi(x)H_1(x),\ \ H_1(x)\in GL_n(F[x])\ \}$$

− група Зеліска, що складається з усіх оборотних матриць вигляду

$$\left\|\begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\varphi_n}{\varphi_1}h_{n1} & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_2}h_{n2} & \dots & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}h_{n,n-1} & h_{nn}\end{matrix}\right\|.$$

Подальші дослідження стосуються властивостей значення матриці $G(x)$ на системі коренів діагональних елементів матриці $\Phi(x)$ та групи Зеліска $\mathbf{G}_\Phi$.

Нехай

$$\Phi_\alpha=\operatorname{diag}((x-\alpha)^{s_1},(x-\alpha)^{s_2},\dots,(x-\alpha)^{s_n}) \tag{2}$$

− матриця над $F[x]$, причому $s_i\ge 0,\ s_i\le s_{i+1},\ i=1,2,\dots,n-1.$ Нехай

$$s_1=s_2=\dots=s_{\nu_1},\ \ s_{\nu_1+1}=s_{\nu_1+2}=\dots=s_{\nu_2},\dots,s_{\nu_{p-1}+1}=s_{\nu_{p-1}+2}=\dots=s_n=s_{\nu_p},$$

де $s_{\nu_1}<s_{\nu_2}<\dots<s_{\nu_p}$. Виберемо в групі $\mathbf{G}_{\Phi_\alpha}$ довільну матрицю $H(x)=\|h_{ij}(x)\|_1^n$. Розіб'ємо її на блоки, щоб діагональними були блоки

$$H_{11}=\left\|\begin{matrix} h_{11} & \dots & h_{1.\nu_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{\nu_1.1} & \dots & h_{\nu_1.\nu_1}\end{matrix}\right\|,\qquad H_{22}=\left\|\begin{matrix} h_{\nu_1+1.\nu_1+1} & \dots & h_{\nu_1+1.\nu_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{\nu_2.\nu_1+1} & \dots & h_{\nu_2\nu_2}\end{matrix}\right\|,\dots,$$

$$H_{pp}=\left\|\begin{matrix} h_{\nu_{p-1}+1.\nu_{p-1}+1} & \dots & h_{\nu_{p-1}+1.n} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n.\nu_{p-1}+1} & \dots & h_{nn}\end{matrix}\right\|.$$

Лема 1. $\det H_{ii}(\alpha)\ne 0,\ \ i=1,2,\dots,p.$

Д о в е д е н н я. Зваживши на вигляд елементів матриці $H(x)$, отримуємо, що

$$H(\alpha)=\left\| \begin{matrix} H_{11}(\alpha) & * & * \\ \mathbf{0} & H_{22}(\alpha) & * \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & H_{pp}(\alpha) \end{matrix} \right\|.$$

Отже, $\det H(\alpha)=H_{11}(\alpha)H_{22}(\alpha)\cdots H_{pp}(\alpha)$. Оскільки матриця $H(x)$ оборотна, то $\det H(\alpha)\neq 0$. Таким чином, $H_{11}(\alpha)H_{22}(\alpha)\cdots H_{pp}(\alpha)\neq 0$, що і потрібно довести.

Лема 2. *Нехай* $D(x)$ – $n\times m$ *матриця над* $F[x]$ *і* $H(x)\in \mathbf{G}_{\Phi_\alpha}$. *Тоді існує така оборотна матриця* F, *що* $M_{H(x)D(x)}(\Phi_\alpha)=FM_{D(x)}(\Phi_\alpha)$, *причому*

$$\det F=\pm\left|H_{11}(\alpha)\right|^{s_{\nu_1}}\left|H_{22}(\alpha)\right|^{s_{\nu_2}}\cdots\left|H_{pp}(\alpha)\right|^{s_{\nu_p}}.$$

Доведення. Маємо:

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_\alpha)=\left\| \begin{matrix} M_{h_1(x)D(x)}[\alpha^{(s_1)}] \\ M_{h_2(x)D(x)}[\alpha^{(s_2)}] \\ \cdots \\ M_{h_n(x)D(x)}[\alpha^{(s_n)}] \end{matrix} \right\|,$$

де $h_i(x)$ – i-й рядок матриці $H(x)$. Застосуваши до похідної добутку двох поліноміальних матриць формулу Лейбніца, отримаємо:

$$\left(h_i(x)D(x)\right)^{(q)}=h_i^{(q)}(x)D(x)+\binom{q}{1}h_i^{(q-1)}(x)D'(x)+\cdots+\binom{q}{q-2}h_i''(x)D^{(q-2)}(x)+$$
$$+\binom{q}{1}h_i'(x)D^{(q-1)}(x)+h_i(x)D^{(q)}(x).$$

Таким чином,

$$M_{h_i(x)D(x)}[\alpha^{(s_i)}]=\left\| \begin{matrix} h_i(\alpha)D(\alpha) \\ h_i'(\alpha)D(\alpha)+h_i(\alpha)D'(\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_i^{(s_i-1)}(\alpha)D(\alpha)+\binom{s_i-1}{1}h_i^{(s_i-2)}(\alpha)D'(\alpha)+\cdots+h_i(\alpha)D^{(s_i-1)}(\alpha) \end{matrix} \right\|=$$

$$=\left\| \begin{matrix} h_i(\alpha) & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ h_i'(\alpha) & h_i(\alpha) & & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & & \\ h_i^{(s_i-1)}(\alpha) & \binom{s_i-1}{1}h^{(s_i-2)} & \ldots & h_i(\alpha) \end{matrix} \right\| M_{D(x)}[\alpha^{(s_i)}]=R_{s_i}M_{D(x)}[\alpha^{(s_i)}],$$

$i=1,2,\ldots,n$. Отже,

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_\alpha)=\left\| \begin{matrix} R_{s_k} & \mathbf{0} \\ R_{s_{k+1}} & \mathbf{0} \\ \cdots & \\ & R_{s_n} \end{matrix} \right\| M_{D(x)}[\alpha^{(s_n)}]=RM_{D(x)}[\alpha^{(s_n)}]. \quad (3)$$

Зваживши на структуру елементів матриці $H(x)$, що стоять під її головною діагоналлю, бачимо, що матриця R містить нульові стовпці. Викресливши їх, отримаємо деяку матрицю L. Викреслимо в матриці $M_{D(x)}[\,\alpha^{(s_n)}]$ ті рядки, що відповідають викресленим стовпцям матриці R. Отриману матрицю, переставляючи рядки, зведемо до матриці $M_{D(x)}(\,\Phi_\alpha)$. Таким чином, рівність (3) рівносильна рівності $M_{H(x)D(x)}(\,\Phi_\alpha) = LTM_{D(x)}(\,\Phi_\alpha)$, де T − матриця перестановок. У свою чергу для матриці L існують такі матриці перестановок M, N, що у матриці $L_1 = MLN$ першими s_{ν_1} діагональними блоками є матриці $H_{11}(\alpha)$, наступними s_{ν_2} − матриці $H_{22}(\alpha)$, і т.д., останніми s_{ν_p} − матриці $H_{pp}(\alpha)$. При цьому структура матриці $L_1 = MLN$ така, що

$$\det L_1 = \pm\left|H_{11}(\alpha)\right|^{s_{\nu_1}} \left|H_{22}(\alpha)\right|^{s_{\nu_2}} \cdots \left|H_{pp}(\alpha)\right|^{s_{\nu_p}} .$$

Оскільки $L_1 = MLN = M(LT)T^{-1}N$, то $LT = M^{-1}L_1N^{-1}T = F$. Зауваживши, що матриці перестановок M, N, T мають визначники ± 1, отримуємо, що і

$$\det F = \pm\left|H_{11}(\alpha)\right|^{s_{\nu_1}} \left|H_{22}(\alpha)\right|^{s_{\nu_2}} \cdots \left|H_{pp}(\alpha)\right|^{s_{\nu_p}} .$$

Згідно з лемою 1 $\det F \neq 0$. Лему доведено.

Розглянемо загальний випадок. Нехай $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x))$ − неособлива матриця з унітальними поліномами на головній діагоналі, в якій $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $\det\Phi(x) = (x-\alpha_1)^{t_1}\ (x-\alpha_2)^{t_2} \cdots\ (x-\alpha_q)^{t_q}$. Тоді матрицю $\Phi(x)$ можна записати у вигляді $\Phi(x) = \Phi_{\alpha_1}(x)\Phi_{\alpha_2}(x)\cdots\Phi_{\alpha_q}(x)$, де матриці $\Phi_{\alpha_i}(x)$ мають вигляд (2).

Властивість 4. *Існує така оборотна матриця* K, *що*

$$KM_{G(x)}(\Phi) = \left\|\begin{matrix} M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots \\ M_{G(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{matrix}\right\|. \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. Легко переконатися, що перестановкою рядків матрицю $M_{G(x)}(\Phi)$ зведемо до вигляду (4). Тобто K − матриця перестановок.

Теорема 1. *Нехай* $D(x)$ − $n\times m$ *матриця над* $F[x]$ *і* $H(x)\in \mathbf{G}_\Phi$. *Тоді існує така оборотна матриця* N, *що*

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = NM_{D(x)}(\Phi).$$

Д о в е д е н н я. З властивості 4 випливає, що існує така оборотна матриця T, що

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = T\left\|\begin{matrix} M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \cdots \\ M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{matrix}\right\|.$$

На підставі леми 2 існують такі оборотні матриці L_{α_i}, що

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi_{\alpha_i}) = L_{\alpha_i} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_i}),$$

$i = 1, 2, \dots, q$. Таким чином,

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = T\begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ L_{\alpha_2} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \dots \\ L_{\alpha_q} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} = T\begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \dots \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} =$$

$$= \left(T\begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} T^{-1} \right) \left(T \begin{Vmatrix} M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_1}) \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_2}) \\ \dots \\ M_{D(x)}(\Phi_{\alpha_q}) \end{Vmatrix} \right) =$$

$$= \underbrace{\left(T\begin{Vmatrix} L_{\alpha_1} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{\alpha_2} & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & L_{\alpha_q} \end{Vmatrix} T^{-1} \right)}_{N} M_{D(x)}(\Phi).$$

Зауваживши, що матриця N оборотна, завершуємо доведення.

Наслідок 1. *Якщо* $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$, *то*

$$\operatorname{rang} M_{H(x)D(x)}(\Phi) = \operatorname{rang} M_{D(x)}(\Phi).$$

Наслідок 2. *Якщо* $H(x) \in \mathbf{G}_\Phi$ *і* $\det M_{D(x)}(\Phi) \neq 0$, *то і*

$$\det M_{H(x)D(x)}(\Phi) \neq 0.$$

Нехай $A(x)$ − неособлива $n \times n$ матриця над $F[x]$, що записана у вигляді матричного полінома над F:

$$A(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_0.$$

Матрицю $A(x)$ називають унітальною, якщо $A_k = I$ − одинична матриця. Говоритимемо , що матриця $A(x)$ регуляризується справа, якщо існує така оборотна матриця $U(x)$, що

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \dots - D_0.$$

Як було вже зауважено, для матриці $A(x)$ існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що виконується рівність (1).

Теорема 2. *Для того, щоб матричний поліном* $A(x)$ *регуляризувався справа, необхідно та достатньо, щоб*

1) $\deg \det A(x) = ns$,

2) *рівняння*

$$M_{P(x)\| Ix^{s-1} \ \dots \ Ix \ \ I\|}(\Phi)\, X = M_{P(x)x^s}(\Phi) \qquad (5)$$

мало розв'язок.

Доведення. **Необхідність**. Нехай існує така оборотна матриця $U(x)$, що

$$A(x)U(x) = Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0 = K(x). \tag{6}$$

Оскільки

$$\deg\det(A(x)U(x)) = \deg\det(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0) = ns$$

і

$$\deg\det(A(x)U(x)) = \deg\det A(x) + \deg\det U(x),$$

де $\deg\det U(x) = 0$, то $\deg\det A(x) = ns$.

З рівностей (6) та (1) випливає, що

$$P(x)A(x)U(x) = P(x)(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0) = \Phi(x)Q^{-1}(x)U(x).$$

На підставі властивості 3

$$M_{\Phi(x)Q^{-1}(x)U(x)}(\Phi) = \mathbf{0}.$$

Тому

$$M_{P(x)(Ix^s + D_{s-1}x^{s-1} + \cdots + D_0)}(\Phi) = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Використавши властивості 2, 1, отримаємо:

$$M_{P(x)(Ix^s - D_{s-1}x^{s-1} - \cdots - D_0)}(\Phi) = M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)x^{s-1}D_{s-1}}(\Phi) - \cdots - M_{P(x)D_0}(\Phi) =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)x^{s-1}}(\Phi)D_{s-1} - \cdots - M_{P(x)}(\Phi)D_0 =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - \left\| M_{P(x)x^{s-1}}(\Phi) \quad \ldots \quad M_{P(x)x}(\Phi) \quad M_{P(x)}(\Phi) \right\| \begin{Vmatrix} D_{s-1} \\ \cdots \\ D_1 \\ D_0 \end{Vmatrix} =$$

$$= M_{P(x)x^s}(\Phi) - M_{P(x)\| Ix^{s-1} \ \ldots \ Ix \ \ I \|}(\Phi) \begin{Vmatrix} D_{s-1} \\ \cdots \\ D_1 \\ D_0 \end{Vmatrix}.$$

Врахувавши рівність (7), дістанемо:

$$M_{P(x)\| Ix^{s-1} \ \ldots \ Ix \ \ I \|}(\Phi) \begin{Vmatrix} D_{s-1} \\ \cdots \\ D_1 \\ D_0 \end{Vmatrix} = M_{P(x)x^s}(\Phi).$$

Це означає, що рівняння (5) має розв'язок.

Для завершення доведення необхідності залишається показати, що умова 2) не залежить від вибору перетворювальної матриці $P(x)$. Нехай $P_1(x)$ − інша ліва перетворювальна матриця матриці $A(x)$. Це означає, що в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця $H(x)$, що $P_1(x) = H(x)P(x)$. Згідно з теоремою 1 існує така оборотна матриця N, що

$$M_{H(x)D(x)}(\Phi) = NM_{D(x)}(\Phi),$$

де $D(x)$ − довільна $n \times m$ матриця. Тобто рівняння

$$M_{P_1(x)\left\| Ix^{s-1} \ \dots \ Ix \ \ I \right\|}(\Phi)\, X = M_{P_1(x)x^s}(\Phi)$$

рівносильне рівнянню

$$NM_{P(x)\left\| Ix^{s-1} \ \dots \ Ix \ \ I \right\|}(\Phi)\, X = NM_{P(x)x^s}(\Phi),$$

яке, в свою чергу, рівносильне розв'язному рівнянню (5).

Достатність. Нехай рівняння (5) розв'язне і $\begin{Vmatrix} M_{s-1} \\ \cdots \\ M_0 \end{Vmatrix}$ – його розв'язок.

Міркуючи зворотно, отримаємо:

$$M_{P(x)(Ix^s - M_{s-1}x^{s-1} - \dots - M_0)}(\Phi) = \mathbf{0}.$$

Згідно з властивістю 3

$$P(x)(Ix^s - M_{s-1}x^{s-1} - \dots - M_0) = P(x)K(x) = \Phi(x)T(x). \tag{8}$$

Оскільки

$$ns = \deg\det\Phi(x) = \deg\det(P(x)K(x)) = \deg\det(\Phi(x)T(x)) =$$
$$= \deg\det\Phi(x) + \deg\det T(x),$$

то $\deg\det T(x) = 0$. Зваживши на те, що матриця $P(x)K(x)$ неособлива, отримуємо, що $T(x)$ є оборотною матрицею.

Домноживши рівність (8) справа на оборотну матрицю $L(x) = T^{-1}(x)Q^{-1}(x)$, отримаємо $P(x)K(x)T^{-1}(x)Q^{-1}(x) = \Phi(x)Q^{-1}(x)$. Тобто

$$K(x)L(x) = P^{-1}(x)\Phi(x)Q^{-1}(x) = A(x).$$

Оскільки $A(x)L^{-1}(x) = K(x)$ – унітальна матриця, то $A(x)$ регуляризується справа.

Наслідок 3. *Щоб матричний поліном* $A(x)$ *регуляризувався справа, необхідно та достатньо, щоб*

1) $\deg\det A(x) = ns$,

2) $\det M_{P(x)\left\| I \ \ Ix \ \dots \ Ix^{s-1} \right\|}(\Phi) \neq 0$.

Доведення. Необхідність умови 1) доведено в теоремі 2.

Матричний поліном $A(x)$ регуляризується справа єдиним чином. Це означає, що рівняння (5) має єдиний розв'язок. А це рівносильно виконанню умови 2).

Зауваження. Інше доведення наслідку 3, яке опирається на результати П. С. Казімірського, можна знайти в праці [2].

1. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – № 12. – С. 14–21.
2. *Зеліско В. Р., Щедрик В. П.* Матриця значень на системі коренів діагональних елементів матриці та її застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 4. – С. 20–29.
3. *Казімірський П. С.* До розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 446–448.
4. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.

5. *Малышев А. Н.* Факторизация матричних полиномов // Сибирск. мат. журн. − 1982. − **23**, № 3. − С. 136−146.
6. *Gochberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix Polynomials. − New York: Academic Press, 1982. − 410 p.

ЗНАЧЕНИЕ МАТРИЦЫ НА СИСТЕМЕ КОРНЕЙ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ И ЕЕ СВОЙСТВА

Исследованы свойства значения матрицы на системе корней диагональных элементов матрицы. Полученные результаты использованы для регуляризации полиномиальных матриц.

THE VALUE OF MATRIX ON A SYSTEM OF ROOTS OF DIAGONAL ELEMENTS OF MATRIX AND ITS PROPERTIES

We investigate properties of value of matrix on a system of roots of diagonal elements of matrix. The results are used for regularization of polynomial matrices.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.10.15