УДК 512.552.13

О. М. Романів, А. В. Саган, О. І. Фірман

ЕЛЕМЕНТАРНА РЕДУКЦІЯ ІДЕМПОТЕНТНИХ МАТРИЦЬ

Введено поняття EID-кільця. Доведено, що комутативне кільце з елементарною редукцією матриць є EID-кільцем, більше того, що будь-яке ω-евклідове кільце без дільників нуля є EID-кільцем. Доведено, що комутативне ω-евклідове кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць тоді і тільки тоді, коли кільце R/I є EID-кільцем.

Всі кільця, які розглядатимемо, є комутативними з відмінною від нуля одиницею. Через $U(R)$ позначимо групу оборотних елементів кільця R, а через $GL_n(R)$ – групу всіх оборотних матриць порядку n з елементами кільця R.

Під елементарними матрицями з елементами кільця розуміємо квадратні матриці таких типів: 1) діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; 2) відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю. Групу всіх елементарних матриць n-го порядку з елементами із кільця R позначатимемо $GE_n(R)$.

Кільце називають *елементарно головним* [4], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такий елемент $d \in R$ і матриця $Q \in GE_2(R)$, що $(a,b)Q = (d,0)$. *Кільцем Безу* [6] називають таке кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним.

Нехай k – фіксоване натуральне число, $a, b \in R$, причому $b \neq 0$. Якщо існують такі елементи $q_i, r_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, k$, що

$$a = bq_1 + r_1\,, \quad b = r_1 q_2 + r_2\,, \ldots, \quad r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k\,, \tag{1}$$

то послідовність рівностей (1) називають k*-членним ланцюгом подільності* для пари елементів a, b.

Нормою над кільцем R називають таке відображення $\varphi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, що

1) $\varphi(0) = 0$ тоді і лише тоді, коли $a = 0$;

2) $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ для таких довільних елементів $a, b \in R$, що $ab \neq 0$.

Кільце R називають ω*-евклідовим* стосовно норми φ, якщо φ задовольняє дві умови із означення норми і для довільної пари елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує такий k-членний ланцюг подільності вигляду (1) для деякого натурального k, що $\varphi(r_k) < \varphi(b)$.

Кільце R називають *кільцем з елементарною редукцією матриць* [11], якщо для довільної матриці A над кільцем R існують такі елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 P_2 \cdots P_k A Q_1 Q_2 \cdots Q_s = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для $i = 1, 2, \ldots, r-1$, тобто довільна матриця A над кільцем R *має властивість елементарної редукції.*

Кільце R називають ID*-кільцем* [8], якщо для довільної ідемпотентної матриці $A \in M_n(R)$ існує така оборотна матриця $P \in M_n(R)$, що PAP^{-1} є діагональною матрицею.

Кільце R називають EID*-кільцем*, якщо довільна ідемпотентна матриця A над ним *має елементарно-ідемпотентну редукцію*, тобто існують такі елементарні над R матриці $P_1,\ldots,P_k$ відповідних розмірів, що

$$P_1P_2\cdots P_kA(P_1P_2\cdots P_k)^{-1}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\ldots,d_r,0,\ldots,0).$$

Якщо довільна ідемпотентна матриця другого порядку з елементами із кільця R має елементарно-ідемпотентну редукцію, то кільце R називають EID_2-*кільцем.*

Теорема 1. Якщо для довільної ідемпотентної матриці A другого порядку з елементами із кільця R існують такі елементарні матриці $P_1,\ldots,P_k,Q_1,\ldots,Q_s\in GE_n(R)$, що $P_1P_2\cdots P_kAQ_1Q_2\cdots Q_s$ є діагональною матрицею, то матриця A має елементарно-ідемпотентну редукцію.

Доведення. Нехай $P_1P_2\cdots P_kAQ_1Q_2\cdots Q_s=D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ і нехай

$$U=(Q_1Q_2\cdots Q_s)^{-1}(P_1P_2\cdots P_k)^{-1}=(u_{ij}).$$

Тоді $(DU)^2=DU$ і $DUD=D$. Тому $d_i=d_i^2u_{ii}$ і d_iu_{ii} − ідемпотент з R. Нехай $e=d_iu_{ii}$, тоді $d_i=ed_i$ і $d_i=e(1-e+d_i)$. Отже,

$$(1-e+d_i)(1-e+eu_{ii})=1=(1-e+eu_{ii})(1-e+d_i).$$

Тоді $1-e+d_i\in U(R)$ і d_iu_{ii}, d_i − асоційовані елементи для будь-якого i. Таким чином, можна вибрати матриці $Q_1,Q_2,\ldots,Q_s$ так, що $d_i^2=d_i$ для $i=1,2,\ldots,n$. З матричного рівняння $DUD=D$ маємо:

(1) $d_iu_{ii}=d_i, i=1,2,\ldots,n$;

(2) $d_id_ju_{ij}=0, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n$.

Тоді з (1) одержимо:

$$DU=\begin{pmatrix} d_1 & d_1u_{12} & \cdots & d_1u_{1n}\\ d_2u_{21} & d_2 & \cdots & d_2u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ d_nu_{n1} & d_nu_{n2} & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Зафіксуємо вектор-рядок $X_k=(d_ku_{k1},d_ku_{k2},\ldots,d_ku_{kk-1},1,d_ku_{kk+1},\ldots,d_ku_{kn})$, де $X_kDU=d_kX_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Тепер нехай

$$C=\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & d_1u_{12} & \cdots & d_1u_{1n}\\ d_2u_{21} & 1 & \cdots & d_2u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ d_nu_{n1} & d_nu_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

З (2) отримаємо, що $|C|=1$, з лем 1 і 2 згідно [3] $C\in GE_n(R)$. Тоді

$$(CP_1\cdots P_k)A(CP_1\cdots P_k)^{-1}=CDUC^{-1}=diag(d_1,d_2,\ldots,d_n).$$

Теорему доведено.

Тепер як наслідок отримаємо таку теорему.

Теорема 2. Кільце з елементарною редукцією матриць є EID-кільцем.

Твердження 1. Якщо R − ω-евклідове кільце без дільників нуля, то воно є EID_2-кільцем.

Доведення. Зауважимо, що оскільки кільце R є ω-евклідовим без дільників нуля, то R є кільцем Безу [5]. Тоді, за твердженням 5.4 з праці [2], довільну ідемпотентну матрицю $E \in M_2(R)$ можна записати у вигляді

$$E = \begin{pmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $a, b, x, y \in R$.

З того, що $trE = 1$, легко бачити, що $ax + by = 1$.

Оскільки кільце R є ω-евклідовим, то для кожної пари елементів a, b і x, y існує скінченний ланцюг подільності [5], який можна зобразити у матричному вигляді, тобто

$$(a, b)Q_1 \cdots Q_s = (u, 0) \qquad \text{і} \qquad P_1 \cdots P_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix},$$

де $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_s \in GE_n(R)$. Зауважимо, що $u, v \in U(R)$ (це випливає з простоти a, b і x, y). Отже, отримаємо:

$$P_1 \cdots P_k \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 \cdots Q_s = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді за теоремою 1 кільце R є EID_2-кільцем.

Твердження доведено.

Твердження 2. EID_2-кільце Безу без дільників нуля є елементарно головним.

Доведення. Нехай R − EID_2-кільце Безу без дільників нуля. Розглянемо довільні елементи $a, b \in R$ і нехай $aR + bR = dR$. Тоді існують такі елементи $a_0, b_0, u, v \in R$, що $a = a_0 d$, $b = b_0 d$ і $a_0 u + b_0 v = 1$. Згідно з твердженням 5.4 з праці [2] матриця $E = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}(u, v)$ є ідемпотентною. За лемою 2 з [1] і з того, що R − EID_2-кільце, випливає існування таких матриць $P_1, \ldots, P_k \in GE_2(R)$, що

$$P_1 \cdots P_k E (P_1 \cdots P_k)^{-1} = P_1 \cdots P_k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} (u, v)(P_1 \cdots P_k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Нехай

$$P_1 \cdots P_k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad (u, v)(P_1 \cdots P_k)^{-1} = (m_2, n_2),$$

де m_1, n_1, m_2, n_2 − деякі елементи з R. Тоді з рівняння (2) отримаємо, що $n_1 = n_2 = 0$.

Отже, для довільних елементів $a, b \in R$ існує матриця $P = P_1 \cdots P_k$, де $P \in GE_2(R)$, і елемент $m \in R$, що

$$P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, R − елементарно головне кільце.

Твердження доведено.

Прикладами EID-кілець є евклідові кільця, π-регулярні кільця, кільця поліномів над кільцем нормування, кільця з елементарною редукцією матриць. Цікавим прикладом є кільце $R = \mathbb{R}[x, y] / (x^2 + y^2 + 1)$; оскільки кільце R є кільцем головних ідеалів, а отже, кільцем елементарних дільників, то згідно з [4], не є елементарно головним. Отже, за теоремою 6 праці [8] і твердженням 2 кільце R є ID-кільцем, але не EID-кільцем.

Теорема 3. Нехай R – область Безу. Якщо R – EID_2-кільце, то R – EID-кільце.

Доведення. Доведемо індукцію за розміром матриць. Нехай R – EID_2-кільце і нехай A – деяка ідемпотентна матриця з $M_n(R)$. Оскільки $\det(A) = 0$ і R – область Безу, то існує такий унімодулярний рядок $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_i \in R$, що $uA = 0$. Над областю Безу унімодулярний рядок можна доповнити до оборотної матриці T, де останнім рядком є вектор u. Слід також зауважити, що за твердженням 2 матриця $T \in GE_2(R)$. Звідси отримуємо, що матриця A зводиться до діагональної

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

елементарними перетвореннями, де k – ранг матриці A. Тоді, згідно з припущенням, довільна матриця A допускає елементарно-ідемпотентну редукцію, якщо кожна матриця 2×2 має таку редукцію.

Теорему доведено.

Теорема 4. Комутативне ω-евклідове кільце R без дільників нуля є кільцем з елементарною редукцією матриць тоді і тільки тоді, коли кільце R / I є EID-кільцем для кожного ідеалу I кільця R.

Доведення. Оскільки R – ω-евклідове кільце без дільників нуля, то воно є кільцем Безу [5], а оскільки кожне EID-кільце є ID-кільцем, то з [7] кожний скінченнопороджений проективний R / I модуль є прямою сумою головних ідеалів, породжених ідемпотентами. За лемою 1 праці [10] і з [9] отримаємо, що R є кільцем з елементарною редукцією матриць. Навпаки, якщо R є кільцем з елементарною редукцією матриць, то кільце R / I є кільцем з елементарною редукцією матриць для кожного ідеалу I. За теоремою 2 отримаємо, що R / I є EID-кільцем.

Теорему доведено.

1. *Дубровин Н. И.* Проективный предел колец с элементарными делителями // Мат. сб. – 1982. – **119**, № 161. – С. 89–95.
2. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – Москва: Мир, 1975. – 422 с.
3. *Саган А. В.* Напівспадкові квазі-евклідові кільця // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – **12**. – С. 52–55.
4. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Euclidiens // These de docteur troisieme cycle, 1976. – 68 p.
5. *Cooke G.* A weakening of the Euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory. I // J. Reine Angew. Math. – 1976. – **282**. – P. 133–156.
6. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor ring // Michigan Math. J. – 1955. – **156**. – P. 159–163.
7. *Rosenberg J.* Algebraic K-theory and its applications. – Berlin: Springer, GTM 147, 1995. – 394p.

8. *Steger A.* Diagonability of idempotent matrices // Pacific J. Math. – 1966. – **19**, № 3. – P. 535–542.
9. *Wiegand R., Wiegand S.* Finitely generated modules over Bezout rings // Pacific. J. Math. – 1975. – **582**. – P. 455–664.
10. *Zabavskii B. V., Romaniv O. M.* Rings with elementary reduction of matrices // Ukr. Mat. J. – 2000. – **52**, № 12. – P. 1641–1649.
11. *Zabavsky B. V.* Rings with elementary reduction matrix // Ring Theory Conf., Miskolc, July 1996. – P. 15–20.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РЕДУКЦИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ

Введено понятие EID-кольца. Доказано, что коммутативное кольцо с элементарной редукцией матриц является EID-кольцом, более того, что любое ω-эвклидовое кольцо без делителей нуля является EID-кольцом. Доказано, что коммутативное ω-эвклидовое кольцо является кольцом с элементарной редукцией матриц тогда и только тогда, когда кольцо R/I является EID-кольцом.

ELEMENTARY REDUCTION OF IDEMPOTENT MATRICES

In the given paper the concept of EID-ring is introduced. It is shown that commutative ring with elementary reduction of matrices is EID-ring, moreover, any ω-Euclidean ring without zero divisors is EID-ring. It is proved that commutative ω-Euclidean ring is a ring with elementary reduction of matrices if and only if the ring R/I is EID-ring.

Львів. нац. ун-т
ім. Івана Франка, Львів

Одержано
21.09.16