УДК 512.64+512.56

М. В. Стьопочкіна[1], І. В. Черв'яков[2]

КІЛЬКІСТЬ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН, (MIN, MAX)-ЕКВІВАЛЕНТНИХ 1-НАДСУПЕРКРИТИЧНІЙ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІЙ МНОЖИНІ (1, 3, 5)

Описано кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній примітивній частково впорядкованій множині з одиничною групою автоморфізмів (1,3,5).

Відомо, що частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина має скінченний зображувальний тип тоді і тільки тоді, коли не містить підмножин вигляду $(1,1,1,1), (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5)$ і $(И,4)$ [5]; такі множини називають критичними ч. в. Доведено [1], що ч. в. множина є P-критичною (критичною відносно додатності квадратичної форми Тітса) тоді і лише тоді, коли (min, max)-еквівалентна деякій критичній множині; (min, max)-еквівалентність ввів В. М. Бондаренко [8]) і використав [1] для повного опису всіх P-критичних множин.

Аналогічна ситуація для ручних ч. в. множин. Така ч. в. множина має ручний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли не містить підмножин вигляду $(1,1,1,1,1), (1,1,1,2), (2,2,3), (1,3,4), (1,2,6)$ і $(И,5)$ [6]; такі множини називають суперкритичними ч. в. Доведено [4], що ч. в. множина є NP-критичною (критичною відносно невід'ємності квадратичної форми Тітса) тоді і лише тоді, коли (min, max)-еквівалентна деякій суперкритичій множині; цей факт використали [3] для повного опису всіх NP-критичних множин.

У праці [4] введено поняття 1-надсуперкритичних ч. в. множин, які "відрізняються" від суперкритичних так само, як суперкритичні – від критичних. Це такі ч. в. множини:

1) $(1,1,1,1,1,1)$, 2) $(1,1,1,1,2)$, 3) $(1,1,2,2)$, 4) $(1,1,1,3)$, 5) $(2,3,3)$, 6) $(2,2,4)$, 7) $(1,4,4)$, 8) $(1,3,5)$, 9) $(1,2,7)$, 10) $(6,И)$.

Обчислено [7] кількість всіх ч. в. множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній ч. в. множині з одиничною групою автоморфізмів $(1,2,7)$. Нижче розв'язана подібна задача для другої такої ч. в. множини, зокрема для множини $(1,3,5)$. При цьому використано основні класифікаційні теореми із праць [4,9].

Основні поняття. Усі ч. в. множини вважаємо скінченними. Ч. в. множина $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ – це згідно з означенням неперетинне об'єднання ланцюгів довжиною $l_1, l_2, \dots, l_n$. Такі ч. в. множини називають примітивними.

Нагадаємо деякі означення, пов'язані з (min, max)-еквівалентністю ч. в. множин, введені раніше [8].

Нехай S – ч. в. множина і a – її мінімальний елемент. Поставимо у відповідність елементу a ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ як об'єднання підмножин $\{a\}$ і $S \setminus a$ з найменшим частковим порядком, який містить заданий на $S \setminus a$ порядок і $a > b$ в $S_a^{\uparrow}$, якщо a і b непорівняльні в S (елемент a стає вже максимальним). Дуально вводимо ч. в. множину $S_a^{\downarrow}$ для максимального елемента $a \in S$. Надалі пишемо $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ замість $\left(S_x^{\uparrow}\right)_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\downarrow\downarrow}$ – замість $\left(S_x^{\downarrow}\right)_y^{\downarrow}$ і т. д.

Ч. в. множину T називають (min, max)-еквівалентною ч. в. множині S, якщо

$$T = S^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_p}_{x_1x_2\ldots x_p} \qquad (p \geq 0),$$

де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ (не вимагається, щоб елементи $x_1, x_2, \ldots, x_p$ були різними).

Поняття (min, max)-еквівалентності природно продовжується до поняття (min, max)-ізоморфізму: ч. в. множини S і S' − (min, max)-ізоморфні, якщо існує ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна S і ізоморфна S'.

Основний результат.

Основним результатом цієї статті є така теорема (ч. в. множини розглядаємо з точністю до ізоморфізму).

Теорема. Кількість ч. в. множин, (min, max)-еквівалентних $S = (1, 3, 5)$, дорівнює 60.

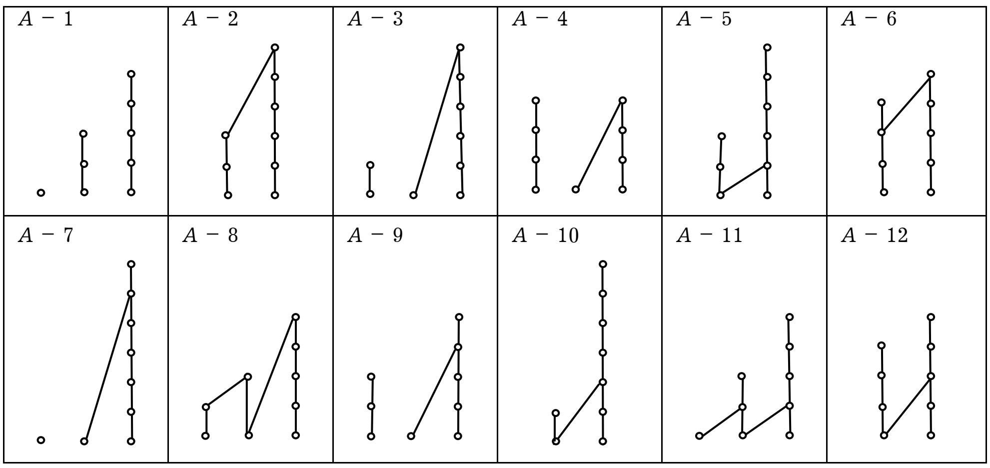
Зауважимо, що в умові теореми (min, max)-еквівалентність можна замінити (min, max)-ізоморфізмом.

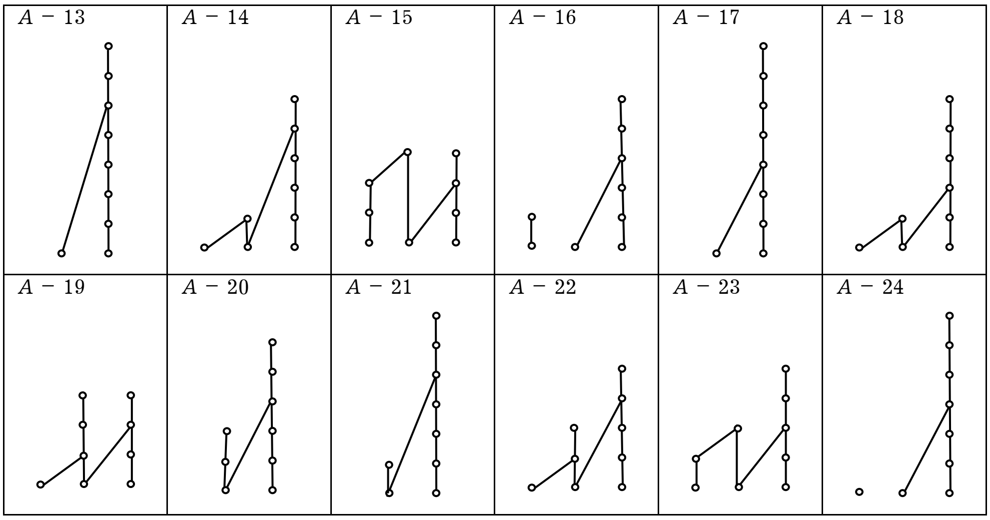
Min-еквівалентність. Якщо в означенні (min, max)-еквівалентності всі стрілки ε_i напрямлені вгору, ч. в. множину T називають min-еквівалентною ч. в. множині S (обидва відношення еквівалентності рівнозначні). Нагадаємо ще деякі означення та твердження із праці [1].

Послідовність $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $0 \leq p < \infty$, довжини $d(\alpha) = p$ елементів $x_i \in S$ називають min-допустимою, якщо вираз $T = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ має сенс. У цьому випадку також пишуть $T = S^{\uparrow}_{\alpha}$. Множину всіх таких послідовностей позначають $P(S)$. Покладемо $[\alpha]_S = \{x \in S \mid x = x_i$ для деякого і$\}$. Кратність входження $a \in S$ в α позначають через $m_\alpha(a)$. Множину всіх таких послідовностей $\alpha \in P(S)$, що $m_\alpha(a) < k$ для довільного $x \in S$, позначають через $P_k(S)$. Зокрема, $P_1(S)$ − це множина всіх min-допустимих послідовностей без повторень.

Доведено [1], що будь-яка ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна ч. в. множині S, має вигляд $S^{\uparrow}_{\alpha}$, де $\alpha \in P_2(S)$. Детальніше T має вигляд або $S^{\uparrow}_{\alpha}$, або $\left(S^{\uparrow}_{\alpha}\right)^{\uparrow}_{\beta}$, де $\alpha, \beta \in P_1(S)$.

Доведення теореми. Ч. в. множини вигляду $S^{\uparrow}_{\alpha}$ для $S = (1, 3, 5)$ описані в праці [4]. Це (з точністю до дуальності) ч. в. множини, вказані в такій таблиці:





Якщо ці ч. в. множини рахувати не з точністю до дуальності, то легко бачити, що їх кількість дорівнює 47; про це говориться і в теоремі 2 [4].

Із основного результату праці [9] випливає, що якщо ч. в. множина T (min, max)-еквівалентна примітивній ч. в. множині S, але її не можна подати як $S_\alpha^\uparrow$, де $\alpha \in P_1(S)$, то T отримуємо із деякої ч. в. множини, де $\beta \in P_1(S)$, перерозподілом вузлових точок його зв'язних компонент (точку називають вузловою, якщо вона порівняльна з усіма іншими точками). Точніше будь-яку зв'язну компоненту $P = P_0 \cup P_1$, де P_0 − множина вузлових точок P, можна замінити компонентою такого ж вигляду $P' = P'_0 \bigcup P'_1$, де $P'_1 = P_1$ (як ч. в. множини) та $|P'_0| = |P_0|$. Оскільки вузлові точки ланцюгів не дають нових ч. в. множин з компонентами, що містять лише одну вузлову точку, то потрібно розглянути лише ч. в. множини А − 7, А − 9, А − 13, А − 16, А − 17, А − 24 (див. таблицю). Отже, в цих випадках кількість нових ч. в. множин буде відповідно 1, 1, 2, 2, 4, 3. Таким чином, кількість нових ч. в. множин дорівнює 13 і, беручи до уваги 47 ч. в. множин, що подані в таблиці (з урахуванням дуальних множин), маємо загальну кількість 60.

Теорема доведена. ◊

Автори щиро вдячні В. М. Бондаренку за цінні поради.

1. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри. − 2005. − **2**, № 3. − С. 18−58.
2. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса // Укр. мат. журн. − 2008. − **60**, № 9. − С. 1157−1167.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса // Укр. мат. журн. − 2009. − **61**, № 5. − С. 734−746.
4. *Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В.* 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. I // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математ. і інформатика. − 2011. − Вип. 22, № 2. − С. 17−25.
5. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Записки науч. семинаров ЛОМИ. − 1972. − **28**. − С. 32−41.
6. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. − 1975. − **39**, № 5. − С. 963−991.
7. *Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В.* Число частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних множині (1, 2, 7) // Прикл. проблеми механіки і

математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 18–21.
8. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – № 1. – P. 24–25.
9. *Bondarenko V. M.* Minimax isomorphism algorithm and primitive posets // Algebra Discrete Math. – 2011. – **12**, № 2. – P. 31–37.

КОЛИЧЕСТВО ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ, (MIN, MAX)-ЭКВИВАЛЕНТНЫХ 1-НАДСУПЕРКРИТИЧЕСКОМУ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОМУ МНОЖЕСТВУ (1, 3, 5)

Описано количество частично упорядоченных множеств,(min,max)-эквивалентных 1-надсуперкритическому примитивному частично упорядоченному множеству с единичной группой автоморфизмов (1,3,5).

THE NUMBER OF PARTIALLY ORDERED SETS (MIN, MAX)-EQUIVALENT TO THE 1-OVERSUPERCRITICAL PARTIALLY ORDERED SET (1, 3, 5)

We describe the number of partially ordered sets which are (min,max)-equivalent to the oversupercritical primitive partially ordered set with the identity group of automorphisms (1,3,5).

[1]Житомир. нац. агроекологічний ун-т, Житомир
[2]Ін-т математики НАН України, Київ

Одержано
22.08.16