

ДО ОПИСУ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ЕЛЕКТРОПРОВІДНОМУ НЕФЕРОМАГНІТНОМУ ШАРІ ЗА ВИСОКОЧАСТОТНОГО ОДНОСТОРОННЬОГО ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВАННЯ

Запропоновано розрахункову модель визначення параметрів термопружного стану електропровідного ферромагнітного шару за високочастотного одностороннього індукційного нагрівання, в якій враховано коливні складники чинників дії електромагнітного поля, складники, які описують перехідні процеси, а також динамічний член у рівнянні руху. Подано загальні розв'язки сформульованих задач електродинаміки та термопружності.

Вступ. У праці [5], присвяченій дослідженню термопружного стану електропровідних ферромагнітних тіл у зовнішньому гармонічному за часом електромагнітному полі (ЕМП), подано спрощену триетапну методику знаходження їх магнітотермопружного стану. На першому етапі з рівнянь електродинаміки визначають параметри ЕМП в усталеному наближенні. Далі записують усереднені за період коливань зовнішнього ЕМП відповідні вирази для потужності тепловиділень і густини пондеромоторної сили. При цьому нехтують їх коливні (гармонічні) складники. На другому етапі з рівняння теплопровідності (в якому джерелами тепла є тепловиділення, визначені на першому етапі) знаходять температурне поле. На третьому з рівнянь квазістатичної термопружності [3, 5] (нехтують динамічні члени, пондеромоторні сили та зв'язаність полів деформації та температури) розраховують переміщення та механічні напруження. У рівняннях термопружності вирази для густини енергії беруть з першого, а вирази для температури – з другого етапів. Цю методику також застосовано для знаходження параметрів термопружного стану ферромагнітних тіл [5–8].

Нижче (на прикладі розглянутого в одновимірному формулюванні електропровідного ферромагнітного шару за умов високочастотного одностороннього індукційного нагрівання) записано вихідні співвідношення задачі про визначення параметрів ЕМП, джоулевого тепла, пондеромоторної сили, температури, переміщень і механічних напружень, в якій враховують коливні складники чинників дії ЕМП, складники, які описують перехідні процеси, а також динамічний член у рівнянні руху задачі термопружності.

Формулювання задачі. Розглянемо електропровідний ферромагнітний шар товщини l , віднесений до прямокутної безрозмірної системи координат (x, y, z) (див. рисунок), на верхній основі якого задано дотичний складник напруженості зовнішнього магнітного поля H_y :

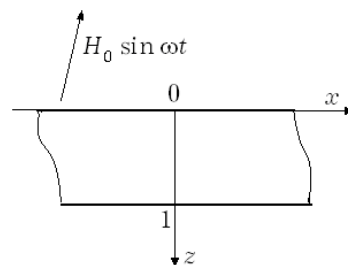
$$H_y(0, t) = H_0 \cdot \sin \omega t, \quad H_y(l, t) = 0. \quad (1)$$

Тут $\omega = 2\pi\nu$, ν – частота; t – час; H_0 – амплітуда гармонічного складника напруженості магнітного поля. Надалі індекс „ y ” опускатимемо.

Напруженість магнітного поля $H(z, t)$ у шарі знаходимо з рівняння Максвелла, яке для цього випадку буде:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \mu_0 \lambda l^2 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (2)$$

де μ_0 – магнітна стала; λ – електропровідність.



Знаючи магнітне поле в шарі, потужність джоулевого тепла Q , густину енергії ЕМП W , запасену в тілі, та густину пондеромоторної сили F знаходимо за формулами

$$Q = \frac{1}{\lambda l^2} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2, \quad W = \frac{1}{2} \mu_0 H^2, \quad F = -\frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (3)$$

Третє зі співвідношень (3) дає можливість у цій моделі замість пондеромоторної сили F використовувати густину енергії ЕМП W .

Визначаючи параметри термопружного стану, вважатимемо, що на верхній основі шару відбувається конвективний теплообмін з довкіллям, температура якого дорівнює температурі T_0 шару, а нижня – теплоізолювана. Приймемо також, що основа $z = 0$ вільна від силового навантаження, а $z = 1$ жорстко скріплена з діелектричним півпростором.

Температурне поле знаходимо з рівняння [1, 4, 6]

$$\frac{1}{a_T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{\kappa_T} \quad (4)$$

за початкової

$$T(z, 0) = T_0 \quad (5)$$

та крайових

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial z} = \text{Bi} [T(0, t) - T_0], \quad \frac{\partial T(1, t)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

умов. Тут κ_T і a_T – коефіцієнти тепло- і температуропровідності відповідно; Bi – критерій Біо.

У системі рівнянь термопружності матимемо ненульову компоненту переміщень $u_z \equiv u(z, t)$ та три діагональних компоненти тензора механічних напружень σ_{xx} , σ_{yy} та σ_{zz} . Рівняння руху запишемо як

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz} - W) \quad (7)$$

за початкових

$$u(z, 0) = \frac{\partial u(z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

та крайових

$$u(1, t) = 0, \quad \sigma_{zz}(0, t) = 0 \quad (9)$$

умов.

У формулах (4) і (7) у класичній теорії [5] значення Q і W усереднені за період коливань зовнішнього ЕМП.

Із закону Дюгамеля–Неймана отримаємо співвідношення

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E_p}{1 - 2\nu_p} \left[\frac{\nu_p}{1 + \nu_p} \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial z} - \alpha_t (T - T_0) \right], \quad (10)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E_p}{1 - 2\nu_p} \left[\frac{1 - \nu_p}{1 + \nu_p} \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial z} - \alpha_t (T - T_0) \right], \quad (11)$$

з яких компоненти σ_{xx} і σ_{yy} виразимо через нормальний складник σ_{zz} :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{1}{1 - \nu_p} \left[\nu_p \sigma_{zz} - \alpha_t E_p (T - T_0) \right], \quad (12)$$

де E_p , ν_p – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона відповідно; α_t – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Підставляючи формулу (11) у співвідношення (7) і (9), отримаємо рівняння для переміщень

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{l^2}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1 + v_p}{1 - v_p} l \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_t T + \frac{1 - 2v_p}{E_p} W \right) \quad (13)$$

та крайові умови

$$u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} = \frac{1 + v_p}{1 - v_p} \alpha_t l [T(0, t) - T_0], \quad (14)$$

де $c_1^2 = \frac{(1 - v_p) E_p}{(1 + v_p)(1 - 2v_p) \rho}$; c_1 – швидкість поширення поздовжніх пружних хвиль.

Зауважимо, що дуже часто під час знаходження термомпружного стану тіла (особливо в класичній теорії) нехтують динамічний член, тобто в рівнянні руху (7) покладають $\rho = 0$ ($c_1 \rightarrow \infty$). У такому наближенні, використовуючи другу граничну умову (9), нормальну компоненту напружень можна виразити через густину енергії ЕМП:

$$\sigma_{zz}(z) = W(z) - W(0). \quad (15)$$

У такому наближенні рівняння (13) на переміщення перетворюється у звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{du(z)}{dz} = \frac{1 + v_p}{1 - v_p} l \left\{ \alpha_t [T(z, t) - T_0] + \frac{1 - 2v_p}{E_p} [W(z) - W(0)] \right\}. \quad (16)$$

Тут використано другу крайову умову (14).

Зауважимо, що рівняння (16) можна отримати і зі співвідношення (11).

Розв'язання задачі електродинаміки. Під час розв'язування задачі електродинаміки (1), (2) нехтуватимемо перехідний режим [5, 6] та обмежимося лише усталеним розв'язком (гармонічними складниками), який подамо у вигляді

$$H(z, t) = \frac{H_0}{2i} [h(z) e^{i\omega t} - \tilde{h}(z) e^{-i\omega t}]. \quad (17)$$

Тут тильда „ \sim ” над величиною означає її комплексно спряжене значення; i – уявна одиниця.

Підставляючи подання (17) у співвідношення (1), (2), для функцій $h(z)$ одержимо таке звичайне диференціальне рівняння та граничні умови:

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = 2i \gamma^2 h, \quad h(0) = 1, \quad h(1) = 0, \quad (18)$$

де $\gamma = l \sqrt{\mu_0 \lambda \pi \nu}$, $\delta = 1 / \gamma$ – відносна глибина проникання магнітного поля у середовище.

Для високочастотного одностороннього індукційного нагрівання [5] (коли $\gamma \geq 6$) розв'язок рівняння (18) буде:

$$h(z) = e^{-(1+i)\gamma z}. \quad (19)$$

Виходячи з формул (3), для тепловідлень Q та густини енергії ЕМП W , запасеної в тілі, матимемо:

$$\Psi(z, t) = \bar{\Psi}(z) + \Psi_2(z) e^{2i\omega t} + \tilde{\Psi}_2(z) e^{-2i\omega t}, \quad (20)$$

де $\Psi \equiv \{Q, W\}$; $\bar{\Psi}(z)$ – усереднені за період коливань ЕМП величини; $\Psi_2(z)$ – їх другі гармоніки.

Запишемо конкретні вирази цих величин:

– усереднені значення:

$$\bar{Q}(z) = \frac{H_0^2}{2\lambda l^2} \frac{dh(z)}{dz} \frac{d\tilde{h}(z)}{dz} = \frac{\gamma^2 H_0^2}{\lambda l^2} e^{-2\gamma z},$$

$$\bar{W}(z) = \frac{\mu_0 H_0^2}{4} h(z) \tilde{h}(z) = \frac{\mu_0 H_0^2}{4} e^{-2\gamma z}; \quad (21)$$

– гармонічні складники:

$$\bar{Q}_2(z) = \frac{H_0^2}{4\lambda l^2} \left(\frac{dh(z)}{dz} \right)^2 = \frac{i\gamma^2 H_0^2}{2\lambda l^2} e^{-2(1+i)\gamma z},$$

$$\bar{W}_2(z) = \frac{\mu_0 H_0^2}{8} h^2 = \frac{\mu_0 H_0^2}{8} e^{-2(1+i)\gamma z}. \quad (22)$$

Зазначимо, що вирази (21) і (22), з урахуванням подання (20), входять у рівняння теплопровідності (4) та в рівняння для переміщень (13).

Визначення температури та переміщень. Температуру шукатимемо із задачі теплопровідності (4)–(6), а переміщення – відповідно з задачі (13), (14). Тепловиділення Q та густину енергії ЕМП W описують формули (20)–(22). Для розв'язання сформульованих задач використаємо перетворення Лапласа за часом [2]. Матимемо:

$$T(z, t) = T_0 + \bar{T}(z) + T_2(z) e^{2i\omega t} + \tilde{T}_2(z) e^{-2i\omega t} + \theta(z, t), \quad (23)$$

$$u(z, t) = \bar{u}(z) + u_2(z) e^{2i\omega t} + \tilde{u}_2(z) e^{-2i\omega t} + w(z, t). \quad (24)$$

Тут

$$\bar{T}(z) = T_m \left[1 + \frac{2\gamma}{\text{Bi}} - e^{-2\gamma z} \right], \quad (25)$$

$$\bar{u}(z) = u_m \left[\left(1 - \varepsilon_\sigma + \frac{2\gamma}{\text{Bi}} \right) (z - 1) + \frac{1 - \varepsilon_\sigma}{2\gamma} e^{-2\gamma z} \right], \quad (26)$$

– стаціонарні температура та переміщення, які не залежать від часу (за аналогією з поданням (20) позначені зверху рисочкою). Зазначимо, що їх також можна отримати з вихідних задач теплопровідності (4)–(6) та руху (13), (14), в яких покладено $\partial / \partial t \rightarrow 0$.

У формулах (25) і (26) введено такі позначення: $T_m \equiv \frac{H_0^2}{4\kappa\lambda}$ – характер-

на температура; $u_m \equiv \frac{1 + \nu_p}{1 - \nu_p} \alpha_t l T_m = \frac{(1 + \nu_p) \alpha_t H_0^2 l}{(1 - \nu_p) 4\kappa_T \lambda}$ – характерне перемі-

щення; $\varepsilon_\sigma \equiv \frac{(1 - 2\nu_p) \mu_0 \kappa_T \lambda}{\alpha_t E_p}$ – параметр, який описує вплив пондеромоторної сили (порівняно з джоулевім теплом) на термопружний стан тіла.

Аналогічно для коливних складників температури $T_2(z)$ та переміщень $u_2(z)$ матимемо:

$$T_2(z) = \frac{T_m}{2(\varepsilon - 2)} \left[e^{-2(1+i)\gamma z} - \varepsilon_{\text{Bi}} e^{-\sqrt{2\varepsilon}(1+i)\gamma z} \right], \quad (27)$$

$$u_2(z) = \frac{u_m}{8\gamma(\varepsilon - 2)} \left\{ \frac{a_1(\gamma) \sin 4\gamma^2 \varepsilon_\mu (1 - z)}{\gamma \varepsilon_\mu \cos 4\gamma^2 \varepsilon_\mu} - (1 - i) \left[b_1(\gamma) e^{-2(1+i)\gamma z} - 2b_2(\gamma) e^{-\sqrt{2\varepsilon}(1+i)\gamma z} \right] \right\}. \quad (28)$$

Тут $\varepsilon_{\text{Bi}} \equiv \frac{\text{Bi} + 2(1+i)\gamma}{\text{Bi} + \sqrt{2\varepsilon}(1+i)\gamma}$; $a_1(\gamma) \equiv b_1(\gamma) - \sqrt{2\varepsilon} b_2(\gamma) - (1 - \varepsilon_{\text{Bi}})$,

$b_1(\gamma) \equiv \frac{1 + (\varepsilon - 2)\varepsilon_\sigma}{1 - 2i\gamma^2\varepsilon_\mu}$, $b_2(\gamma) \equiv \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\varepsilon_{\text{Bi}}}{\varepsilon - 4i\gamma^2\varepsilon_\mu^2}$; $\varepsilon \equiv \frac{1}{\mu_0 a_T \lambda}$ – безрозмірний параметр, який описує зв'язок електромагнітних та теплових процесів; $l_\mu = \frac{1}{\mu_0 \lambda c_1}$ – характерний розмір, $\varepsilon_\mu = \frac{l_\mu}{l}$ – безрозмірний параметр, який описує зв'язок електромагнітних та механічних процесів (фактично окреслює вклад сил інерції в термопружний стан тіла).

Зазначимо, що розв'язки (27) і (28) можна також отримати, підставивши подання (23) і (24) відповідно у вихідні задачі (4)–(6) і (13), (14) та прирівнявши вирази біля $e^{2i\omega t}$. Як наслідок, отримуємо звичайні диференціальні рівняння на функції $T_2(z)$ і $u_2(z)$ з відповідними крайовими умовами, розв'язуючи які, одержимо вирази (27) і (28).

Зауважимо, що у формулі (28) у знаменнику першого члена є величина $\cos 4\gamma^2\varepsilon_\mu$, яка за частот

$$\omega_k = \frac{\pi(2k+1)c_1}{4l}, \quad k = \overline{1, \infty} \quad (29)$$

набуває нульового значення. Це означає, що на цих частотах (29) величина $u_2(z)$ набуває нескінченного значення. Частоти (29) називають резонансними, для врахування яких у систему рівнянь термопружності (4)–(14) необхідно ввести дисипативні члени.

Останні складники $\theta(z, t)$ і $w(z, t)$ у формулах (23) і (24) (які математично забезпечують виконання початкових умов (5) і (8)) описують перехідний режим:

$$\theta(z, t) = T_m \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(z) e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad w(z, t) = u_m \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (30)$$

де

$$\theta_n(z) = -8\gamma^2 \frac{A_n \cos \mu_n (1-z)}{C_n \cos \mu_n}; \quad (31)$$

$$w_n(z) = \frac{8\gamma^2 A_n}{(\mu_n^2 + \varepsilon_n^2) C_n} \left[\frac{\varepsilon_n \operatorname{sh} \varepsilon_n (1-z)}{\operatorname{ch} \varepsilon_n} + \frac{\mu_n \sin \mu_n (1-z)}{\cos \mu_n} \right]; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} A_n &\equiv (\text{Bi} + 2\gamma)(\mu_n^4 + 64\gamma^4)(\mu_n^4 + 16\varepsilon^2\gamma^4) - \\ &- 2\gamma\mu_n^2(\mu_n^2 + 4\gamma^2)[\mu_n^4 - 2\gamma(\text{Bi} + 2\gamma)(\varepsilon + 2)\mu_n^2 - 32\varepsilon\gamma^4]; \\ C_n &\equiv (\mu_n^2 + 4\gamma^2)(\mu_n^4 + 64\gamma^4)(\mu_n^4 + 16\varepsilon^2\gamma^2)[\mu_n^2 + \text{Bi}(\text{Bi} + 1)]. \end{aligned} \quad (33)$$

Тут $\varepsilon_n \equiv \mu_n^2 \sqrt{\varepsilon_T}$, $\varepsilon_T \equiv (l_T/l)^2$, $l_T = a_T/c_1$ – характерний розмір, що описує зв'язок теплових та механічних процесів; $\tau \equiv t/\tau_T$ – безрозмірний час (критерій Фур'є [4]), $\tau_T = l^2/a_T$ – час, який описує перехідний процес (час, за який температура виходить на усталений режим); μ_n – корені рівняння $\text{Bi} \cos \mu_n = \mu_n \sin \mu_n$.

Аналіз формул (27)–(33) свідчить, що складники температури $\bar{T}(z)$ і $T_2(z)$ залежать лише від складників джоулевого тепла $\bar{Q}(z)$ і $Q_2(z)$, а пе-

реміщення $\bar{u}(z)$ і $u_2(z)$ – і від температури (температурні переміщення), і від пондеромоторної сили (силові переміщення), які характеризує параметр ε_σ . Перехідні переміщення $w(z, t)$ – лише від температури та не залежать від пондеромоторної сили.

За нехтування динамічного члена у рівнянні руху (13), тобто при $\rho = 0$ ($\varepsilon_\mu = 0$, $\varepsilon_T = 0$), вираз (28) для переміщень $u_2(z)$ буде

$$u_2(z) = \frac{u_m}{8\gamma(\varepsilon - 2)} \left\{ 4\gamma(\varepsilon - 2)\varepsilon_\sigma(1 - z) - (1 - i) \left[[1 + (\varepsilon - 2)\varepsilon_\sigma] e^{-2(1+i)\gamma z} - \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \varepsilon_{\text{Bi}} e^{-\sqrt{2\varepsilon}(1+i)\gamma z} \right] \right\}, \quad (34)$$

а для $w_n(z)$ спроститься:

$$w_n(z) = \frac{8\gamma^2 A_n \sin \mu_n (1 - z)}{\mu_n C_n \cos \mu_n}. \quad (35)$$

Зауважимо, що формули (34), (35) можна отримати і безпосередньо з (16).

Розглянемо також класичний випадок. Стаціонарні складники температури (25) і переміщень (26) не зміняться (вони незмінні в будь-яких наближеннях), а коливні відсутні ($T_2(z) = 0$, $u_2(z) = 0$), оскільки в даному наближенні нехтують коливні складники тепла і сили. Вирази для «перехідної» температури та переміщень такі:

$$\theta_n(z) = -\mathcal{D}_n \cos \mu_n (1 - z), \quad w_n(z) = \frac{\mathcal{D}_n}{\mu_n} \sin \mu_n (1 - z), \quad (36)$$

де

$$\mathcal{D}_n \equiv \frac{8\gamma^2 (\text{Bi} + 2\gamma)}{(\mu_n^2 + 4\gamma^2) [\mu_n^2 + \text{Bi}(\text{Bi} + 1)] \cos \mu_n}. \quad (37)$$

Зауважимо, що формули (36), (37) збігаються з відомими [5].

Визначення механічних напружень. Виходячи з формул (10)–(12) для механічних напружень отримаємо подання, аналогічні як для температури (23), так і переміщень (24), тобто:

$$\sigma_{zz}(z, t) = \bar{\sigma}_{zz}(z) + \sigma_{zz,2}(z) e^{2i\omega t} + \tilde{\sigma}_{zz,2}(z) e^{-2i\omega t} + S_{zz}(z, t), \quad (38)$$

$$\sigma_{ii}(z, t) = \bar{\sigma}_{ii}(z) + \sigma_{ii,2}(z) e^{2i\omega t} + \tilde{\sigma}_{ii,2}(z) e^{-2i\omega t} + S_{ii}(z, t), \quad i = (x, y). \quad (39)$$

З формул (25)–(33) для компонент напружень (38) і (39) матимемо:

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = -\frac{\mu_0 H_0^2}{4} (1 - e^{-2\gamma z}), \quad (40)$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(z) = \bar{\sigma}_{yy}(z) = -\sigma_m \left[1 + \frac{2\gamma}{\text{Bi}} e^{-2\gamma z} + \frac{v_p \varepsilon_\sigma}{1 - 2v_p} (1 - e^{-2\gamma z}) \right]; \quad (41)$$

$$\sigma_{zz,2}(z) = -\frac{(1 - v_p) \sigma_m}{2(\varepsilon - 2)(1 - 2v_p)} \left\{ \frac{a_1(\gamma) \cos 4\gamma^2 \varepsilon_\mu (1 - z)}{\cos 4\gamma^2 \varepsilon_\mu} + [1 - b_1(\gamma)] e^{-2(1+i)\gamma z} + [\sqrt{2\varepsilon} b_2(\gamma) - \varepsilon_{\text{Bi}}] e^{-\sqrt{2\varepsilon}(1+i)\gamma z} \right\}, \quad (42)$$

$$\sigma_{xx,2}(z) = \sigma_{yy,2}(z) = -\frac{\sigma_m}{2(\varepsilon - 2)(1 - 2v_p)} \left\{ \frac{v_p a_1(\gamma)}{\cos 4\gamma^2 \varepsilon_\mu} \cos 4\gamma^2 \varepsilon_\mu (1 - z) + [1 - v_p - v_p b_1(\gamma)] e^{-2(1+i)\gamma z} + [v_p \sqrt{2\varepsilon} b_2(\gamma) - (1 - v_p) \varepsilon_{\text{Bi}}] e^{-\sqrt{2\varepsilon}(1+i)\gamma z} \right\}; \quad (43)$$

$$S_{zz}(z, t) = \frac{(1 - v_p) \sigma_m}{1 - 2v_p} \sum_{n=1}^{\infty} S_{nz}(z) e^{-\mu_n^2 \tau},$$

$$S_{ii}(z, t) = \frac{\sigma_m}{1 - 2v_p} \sum_{n=1}^{\infty} S_{xi}(z) e^{-\mu_n^2 \tau}, \quad (44)$$

$$S_{nz}(z) = \frac{dw_n(z)}{dz} - \theta_n(z) = \frac{8\gamma^2 \varepsilon_n^2 A_n}{(\mu_n^2 + \varepsilon_n^2) C_n} \left[\frac{\cos \mu_n (1 - z)}{\cos \mu_n} - \frac{\operatorname{ch} \varepsilon_n (1 - z)}{\operatorname{ch} \varepsilon_n} \right], \quad (45)$$

$$S_{ni}(z) = v_p \frac{dw_n(z)}{dz} - (1 - v_p) \theta_n(z) = -\frac{8\gamma^2 A_n}{(\mu_n^2 + \varepsilon_n^2) C_n} \left\{ \frac{v_p \varepsilon_n^2 \operatorname{ch} \varepsilon_n (1 - z)}{\operatorname{ch} \varepsilon_n} + \right.$$

$$\left. + \left[v_p \mu_n^2 - (1 - v_p) (\mu_n^2 + \varepsilon_n^2) \right] \frac{\cos \mu_n (1 - z)}{\cos \mu_n} \right\}. \quad (46)$$

Вирази для коливних (42), (43) та «перехідних» складників напружень (45), (46) за нехтування динамічного члена в рівнянні руху ($\varepsilon_\mu = 0$, $\varepsilon_T = 0$) будуть:

$$\sigma_{zz,2}(z) = -\frac{(1 - v_p) \sigma_m \varepsilon_\sigma}{2(1 - 2v_p)} \left[1 - e^{-2(1+i)\gamma z} \right], \quad (47)$$

$$\sigma_{xx,2}(z) = \sigma_{yy,2}(z) = -\frac{\sigma_m}{2(\varepsilon - 2)} \left\{ e^{-2(1+i)\gamma z} - \varepsilon_{\text{Ві}} e^{-\sqrt{2\varepsilon}(1+i)\gamma z} + \right.$$

$$\left. + \frac{v_p}{1 - 2v_p} (\varepsilon - 2) \varepsilon_\sigma \left[1 - e^{-2(1+i)\gamma z} \right] \right\}, \quad (48)$$

$$\sigma_{nz}(z) \equiv 0, \quad S_{ni}(z) = (1 - 2v_p) \frac{8\gamma^2 A_n}{C_n \cos \mu_n} \cos \mu_n (1 - z). \quad (49)$$

У класичному випадку стаціонарні складники напружень (40) і (41) не зміняться, коливні (42) і (43) відсутні (за припущенням). Для перехідних напружень матимемо:

$$S_{nz}(z) \equiv 0, \quad S_{ni}(z) = (1 - 2v_p) \mathcal{O}_n \cos \mu_n (1 - z). \quad (50)$$

Висновки. Сформульовано задачу про визначення параметрів ЕМП та термопружного стану електропровідного неферомагнітного шару за високочастотного одностороннього індукційного нагрівання, в якій враховано коливні складники чинників дії ЕМП, складники, які описують перехідні процеси, а також динамічний член у рівнянні руху задачі термопружності. З розв'язку відповідної задачі електродинаміки знайдено вирази для напруженості магнітного поля та його чинників (джоулевого тепла та густини енергії ЕМП). Для розв'язання задачі термопружності використано структуру термомеханічних величин (температури, переміщень та механічних напружень) у вигляді суми стаціонарних, коливних та складників, які описують перехідні процеси. Отримано конкретні вирази для таких величин.

Розглянуто випадки, коли нехтують динамічний член у рівнянні руху задачі термопружності та додатково коливні складники зовнішніх чинників ЕМП.

Результати досліджень будуть використані для знаходження умов, коли необхідно враховувати коливні складники термопружних величин (температури, переміщень та механічних напружень), складники, що описують перехідні процеси, а також вплив динамічного члена в рівнянні руху на термопружний стан шару.

1. Гачкевич О. Р., Івасько Р. О. Термомеханіка феритових тіл в квазіусталеному електромагнітному полі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 161–172.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: Наука, 1974. – 544 с.
3. Коваленко А. Д. Избранные труды. – Киев: Наук. думка, 1976. – 764 с.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
5. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 248 с.
6. Gaczkiewicz A., Kasperski Z. Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: OWPO, 1999. – 368 s.
7. Solodyak M. T. Thermoelastic State of a Magnetically Hard Layer in a Harmonic Magnetic Field with Biasing // Mat. Sci. – 2004. – **40**, № 4. – P. 497–503.
8. Solodyak M. T. Thermoelastic State of a Magnetically Soft Layer in a Magnetic Field Harmonic as a Function of Time with Biasing // Mat. Sci. – 2004. – **40**, № 2. – P. 173–184.

К ОПИСАНИЮ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ НЕФЕРРОМАГНИТНОМ СЛОЕ ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ОДНОСТОРОННЕМ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ

Предложена расчетная модель определения параметров термонапряженного состояния электропроводного неферромагнитного слоя при высокочастотном одностороннем индукционном нагреве, учитывающая колебательные составляющие факторов воздействия электромагнитного поля, составляющие, описывающие переходные процессы, а также динамический член в уравнении движения. Приведены общие решения сформулированных задач электродинамики и термоупругости.

TO DESCRIPTION OF THERMOMECHANICAL PROCESSES IN AN ELECTROCONDUCTIVE NONFERROMAGNETIC LAYER UNDER HIGH-FREQUENCY ONE-SIDED INDUCTION HEATING

A calculation model is proposed for determining the parameters of thermoelastic state of an electroconducting nonferromagnetic layer under high-frequency one-sided induction heating. The model considers the vibrating components of the impact factors of electromagnetic field, components describing the transient processes and the dynamic term in the equation of motion as well. General solutions of the formulated problems of electrodynamics and thermoelasticity are presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
19.04.16