

### ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КУСКОВО-НЕОДНОРІДНОЇ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ ПОРОЖНИСТОЇ ІЗОТРОПНОЇ КУЛІ

*Визначено термопружний стан, зумовлений центрально-симетричним температурним полем та поверхневими навантаженнями, у шаруватій порожнистій ізотропній кулі з урахуванням залежності від температури і координати фізико-механічних характеристик (ФМХ). При цьому використано узагальнені функції і функцію Гріна задачі пружності для шаруватої кулі зі сталими ФМХ складників. Числові дослідження виконано для тришарової кулі, перший шар якої виготовлений з функціонально-градієнтного матеріалу.*

Розвиваючи підходи [2, 3], розробили методику визначення термопружного стану кусково-неоднорідної термочутливої порожнистої кулі для широкого діапазону зміни товщини та характеру залежностей від температури і координати фізико-механічних характеристик (ФМХ) її складників. Вона передбачає отримання (з інтегрального подання розв'язку відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння з узагальненими похідними) систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень за допомогою функції Гріна задачі пружності для шаруватої кулі зі сталими ФМХ складників та знаходження із цих рівнянь методом послідовних наближень переміщень, що відповідають лише першому наближенню. При цьому за нульові наближення взято відповідні вирази для переміщень, які отримують з інтегро-алгебричних рівнянь за тих же самих сталих модулів пружності і коефіцієнтів Пуассона складників, що й у співвідношеннях для функції Гріна.

**Формулювання задачі термопружності.** Розглянемо пружне тіло, яке складене із  $n$  ідеально контактуючих концентрично розташованих порожнистих ізотропних куль. Вважаємо, що обмежувальні поверхні тіла перебувають під дією рівномірно прикладених навантажень  $\sigma_0$ ,  $\sigma_n$  відповідно, а саме тіло знаходиться в температурному полі, яке описує функція

$$t(r) = t_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} [t_{i+1}(r) - t_i(r)] S(r - r_i), \quad (1)$$

де  $t_p(r)$ , ( $p = \overline{1, n}$ ) – відомі розподіли температур при  $r_{p-1} < r < r_p$ ;  $r$ ,  $r_0$  і  $r_p$  – віднесені до характерного лінійного розміру  $l$  відповідно радіальна координата, внутрішній радіус першого і зовнішній радіус  $p$ -го шарів;  $S(\zeta)$  – функція Гевісайда.

Для визначення термопружного стану тіла за припущення, що ФМХ залежать від температури і координати, використаємо рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (2)$$

та співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c(r) \frac{du}{dr} + 2\lambda(r) \frac{u}{r} - c^*(r) \Phi(r), \\ \sigma_\varphi &= \lambda(r) \frac{du}{dr} + 2[\lambda(r) + \mu(r)] \frac{u}{r} - c^*(r) \Phi(r), \end{aligned} \quad (3)$$

де віднесене до  $l$  радіальне переміщення  $u(r)$  задовольняє рівняння з узагальненими похідними

$$\frac{d}{dr} \left[ c(r) \frac{du}{dr} \right] + 2 \frac{d}{dr} \left[ \lambda(r) \frac{u}{r} \right] + 4\mu(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{u}{r} \right) = \frac{d}{dr} [c^*(r) \Phi(r)] \quad (4)$$

і граничні умови

$$\sigma_r|_{r=r_0} = -\sigma_0, \quad \sigma_r|_{r=r_n} = -\sigma_n. \quad (5)$$

Тут функції  $c(r) = \lambda(r) + 2\mu(r)$ ,  $\lambda(r) = \frac{E(t, r)v(t, r)}{[1 + v(t, r)][1 - 2v(t, r)]}$ ,  $\mu(r) = \frac{E(t, r)}{2[1 + v(t, r)]}$ ,

$v^*(r) = \frac{v(t, r)}{1 - v(t, r)}$ ,  $c^*(r) = \frac{E(t, r)}{1 - 2v(t, r)}$  мають вигляд (1); функції  $E(t, r)$ ,  $v(t, r)$  і

$\Phi(r)$  в межах  $p$ -го шару збігаються відповідно з модулями пружності

$E_p(t_p, r)$ , коефіцієнтами Пуассона  $\nu_p(t_p, r)$  і  $\Phi_p(r) = \int_0^{t_p(r)} \alpha_{tp}(\zeta, r) d\zeta$ ;  $\alpha_{tp}(t_p, r)$

– температурний коефіцієнт лінійного розширення  $p$ -го шару.

**Інтегральне подання розв'язку.** Для цього використаємо функцію Гріна на задачі пружності для шаруватой кулі зі сталими ФМХ складників, тобто функцію  $G(r, \rho)$ , яка є розв'язком задачі

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{2}{r^2} G + \sum_{i=1}^{n-1} \left( (1 - K_{0c}^{(i+1)}) \frac{\partial G}{\partial r} + 2K_{0\lambda}^{(i)} \frac{G}{r} \right) \Big|_{r=r_i-0} \delta(r - r_i) = -\frac{\delta(r - \rho)}{\rho^2 c_0(\rho)}, \quad (6)$$

$$c_0(r) \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial r} + 2\lambda_0(r) \frac{G(r, \rho)}{r} = 0 \quad \text{при } r = r_0, r = r_n. \quad (7)$$

Тут  $K_{0c}^{(i+1)} = c_0^{(i)}/c_0^{(i+1)}$ ,  $K_{0\lambda}^{(i)} = (\lambda_0^{(i+1)} - \lambda_0^{(i)})/c_0^{(i+1)}$ ;  $c_0(r)$ ,  $\lambda_0(r)$  – кусково-сталі функції вигляду (1), які в межах  $p$ -го шару збігаються з  $c_0^{(p)}$ ,  $\lambda_0^{(p)}$ . Останні вибирають з інтервалу зміни  $c_p(r)$  і  $\lambda_p(r)$  відповідно;  $\delta(\zeta)$  – дельта-функція Дірака.

Після домноження (4) зліва на  $rG(r, \rho)$ , відповідних операцій з узагальненими функціями, використання (6) та інтегрування по  $r$  у межах від  $r_0$  до  $r_n$  одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{c(\rho)}{c_0(\rho)} u(\rho) &= \left\{ r^2 G(r, \rho) \sigma_r(r) - \left[ \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial r} r^2 c(r) + 2r\lambda(r)G(r, \rho) \right] u(r) \right\} \Big|_{r=r_0}^{r=r_n} + \\ &+ \int_{r_0}^{r_n} \left[ \frac{\partial}{\partial r} [r^2 G(r, \rho)] \left( \frac{dc(r)}{dr} \right)_{\text{кл}} - 4rG(r, \rho) \left( \frac{d\mu(r)}{dr} \right)_{\text{кл}} \right] u(r) dr + \\ &+ \int_{r_0}^{r_n} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 G(r, \rho)] c^*(r) \Phi(r) dr + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ K_{ci} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 G(r, \rho)] \Big|_{r=r_i+0} - 4K_{\mu i} r_i G(r_i, \rho) - \right. \\ &\left. - \left[ (1 - K_{0c}^{(i+1)}) r_i^2 \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial r} \Big|_{r=r_i-0} + 2r_i K_{\lambda i}^{(0)} G(r_i, \rho) \right] c_i(r_i) \right\} u_i(r_i), \\ &r_0 < \rho < r_n, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $K_{ci} = c_{i+1}(r_i) - c_i(r_i)$ ,  $K_{\mu i} = \mu_{i+1}(r_i) - \mu_i(r_i)$ ; індекс «кл» означає, що відповідна похідна класична.

**Система інтегро-алгебричних рівнянь.** Замінімо в (8) інтегралі по товщині кулі сумою інтегралів по товщині шарів і розглянемо отримане співвідношення в межах  $p$ -го шару. При цьому беремо до уваги, що переміщення мають вигляд

$$u_p(\rho) = u_p^t(\rho) + u_p^y(\rho), \quad (9)$$

де (з урахуванням змінності ФМХ) перший доданок описує переміщення, зумовлені температурним полем, другий – поверхневими навантаженнями

$\sigma_0$ ,  $\sigma_n$ , а  $G(r, \rho)$  при  $r_{p-1} < \rho < r_p$ ,  $r_{j-1} < r < r_j$  збігається з елементами матриці Гріна [1]

$$G_{jp}(r, \rho) = \frac{1}{9Q} \begin{cases} \varphi_{1j}(r)\varphi_{2p}(\rho)/c_{0p}, j < p \\ \varphi_{1p}(\rho)\varphi_{2j}(r)/c_{0j}, j > p \end{cases},$$

$$3c_{0j}G_{jj}(r, \rho) = \frac{r}{\rho^2} S(\rho - r) + \frac{\rho}{r^2} S(r - \rho) + \frac{1}{3Q} \left[ M_{1j}^- \frac{r_{j-1}^3}{r^2} \varphi_{2j}(\rho) - M_{2j}^- \frac{r}{r_j^3} \varphi_{1j}(\rho) \right], \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_{1s}(x) &= M_{1s}^+ x + M_{1s}^- r_{s-1}^3 / x^2, \quad Q = \Phi_n^{(1)}(r_n) + \beta_n \Phi_n^{(0)}(r_n), \\ M_{11}^\pm &= 3(q \mp \beta_1), \quad M_{1s}^\pm = \Phi_{s-1}^{(0)}(r_{s-1})(q \pm K_v^{(s)}) \pm \Phi_{s-1}^{(1)}(r_{s-1})K_{0c}^{(s)}, \\ \Phi_1^{(m)}(r) &= q^m \left[ q - \beta_1 + (-1)^m (q + \beta_1)(r_0/r)^3 \right], \\ \Phi_s^{(m)}(r) &= \Phi_{s-1}^{(0)}(r_{s-1})f_{s1}^{(m)}(r) + \Phi_{s-1}^{(1)}(r_{s-1})f_{s2}^{(m)}(r), \\ f_{s1}^{(m)}(r) &= \frac{1}{2q^{1-m}} \left[ q + K_v^{(s)} + (-1)^m (q - K_v^{(s)}) \left( \frac{r_{s-1}}{r} \right)^3 \right], \quad q = 3/2, \quad K_v^{(s)} = K_{0c}^{(s)}\beta_{s-1} - \beta_s, \\ f_{s2}^{(m)}(r) &= \frac{1}{2q^{1-m}} K_{0c}^{(s)} \left[ 1 - (-1)^m \left( \frac{r_{s-1}}{r} \right)^3 \right], \quad m = 0, 1; \quad s = \overline{2, n}; \\ \varphi_{2s}(x) &= M_{2s}^+ / x^2 - M_{2s}^- x / r_s^3, \quad M_{2s}^\pm = \kappa_{n,s}^{(2)} + \beta_n \kappa_{n,s}^{(1)} \pm q(\kappa_{n,s}^{(4)} + \beta_n \kappa_{n,s}^{(3)}), \\ 2\beta_s &= (5v_s - 1)/(1 - v_s), \quad s = \overline{1, n}. \\ \kappa_{i+1,i}^{(1)} &= f_{i+1,1}^{(0)}(r_{i+1}), \quad \kappa_{i+1,i}^{(2)} = f_{i+1,1}^{(1)}(r_{i+1}), \quad \kappa_{i+1,i}^{(3)} = f_{i+1,2}^{(0)}(r_{i+1}), \\ \kappa_{i+1,i}^{(4)} &= f_{i+1,2}^{(1)}(r_{i+1}), \\ \kappa_{i+j,i}^{(1)} &= f_{i+j,1}^{(0)}(r_{i+j})\kappa_{i+j-1,i}^{(1)} + f_{i+j,2}^{(0)}(r_{i+j})\kappa_{i+j-1,i}^{(2)}, \\ \kappa_{i+j,i}^{(2)} &= f_{i+j,1}^{(1)}(r_{i+j})\kappa_{i+j-1,i}^{(1)} + f_{i+j,2}^{(1)}(r_{i+j})\kappa_{i+j-1,i}^{(2)}, \\ \kappa_{i+j,i}^{(3)} &= f_{i+j,1}^{(0)}(r_{i+j})\kappa_{i+j-1,i}^{(3)} + f_{i+j,2}^{(0)}(r_{i+j})\kappa_{i+j-1,i}^{(4)}, \\ \kappa_{i+j,i}^{(4)} &= f_{i+j,1}^{(1)}(r_{i+j})\kappa_{i+j-1,i}^{(3)} + f_{i+j,2}^{(1)}(r_{i+j})\kappa_{i+j-1,i}^{(4)}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{2, n-i}, \\ \kappa_{n,n}^{(1)} &= \kappa_{n,n}^{(4)} = 1, \quad \kappa_{n,n}^{(2)} = \kappa_{n,n}^{(3)} = 0. \end{aligned}$$

Зробивши відповідні перетворення з урахуванням граничних умови (5), одержимо для знаходження функцій  $u_p^s(\rho)$  ( $s = t, y$ ) відповідні системи інтегро-алгебричних рівнянь:

$$c_p(\rho)u_p^s(\rho) - \frac{L_{1p}^s \varphi_{2p}(\rho) - L_{2p}^s \varphi_{1p}(\rho)}{9Q} - \frac{V_{ap}^{(s)}(\rho)}{3\rho^2} + \frac{4\rho V_{bp}^{(s)}(\rho)}{3} - \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho)u_i^s(r_i) = u_{0p}^s(\rho), \quad (11)$$

де

$$L_{1p}^s = H_{1p}^s + 18\gamma_1 r_0^2 u_1^s(r_0), \quad L_{2p}^s = H_{2p}^s + 6 \frac{\gamma_n c_{0p}}{r_n c_{0n}} u_n^s(r_n),$$

$$H_{1p}^s = \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ V_{aj}^s(r_j) - 4 \sum_{j=1}^p r_{j-1}^3 M_{1j}^- V_{bj}^s(r_{j-1}),$$

$$\begin{aligned}
H_{2p}^s &= 4 \sum_{j=p+1}^n \frac{c_{0p}}{c_{0j}} M_{2j}^+ V_{bj}^s(r_{j-1}) + \sum_{j=p}^n \frac{c_{0p}}{r_j^3 c_{0j}} M_{2j}^- V_{aj}^s(r_j), \\
V_{ap}^s(\rho) &= \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^2 \frac{dc_p^*(r)}{dr} u_p^s(r) dr, \quad V_{bp}^s(\rho) = \int_{\rho}^{r_p} \frac{1}{r} \frac{d\mu_p(r)}{dr} u_p^s(r) dr, \\
u_{0p}^t(\rho) &= u_{tp}(\rho), \quad u_{0p}^y(\rho) = u_{yp}(\rho), \\
u_{sp}(\rho) &= V_{sp}(\rho)/\rho^2 + [R_{1p}^s \varphi_{2p}(\rho) - R_{2p}^s \varphi_{1p}(\rho)]/(3Q), \\
V_{sp}(\rho) &= \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^2 \Lambda_{sp}(r) dr, \quad \Lambda_{tp}(r) = c_p^*(r) \Phi_p(r), \quad \Lambda_{yp}(r) = 0, \\
R_{1p}^t &= \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ V_{tj}(r_j), \quad R_{2p}^t = \sum_{j=p}^n \frac{c_{0p}}{r_j^3 c_{0j}} M_{2j}^- V_{tj}(r_j), \\
R_{1p}^y &= 3r_0^3 \sigma_0, \quad R_{2p}^y = \frac{c_{0p}}{c_{0n}} \sigma_n, \\
\gamma_1 &= \lambda_1(r_0) - v_{01}^* c_1(r_0), \quad \gamma_n = \lambda_n(r_n) - v_{0n}^* c_n(r_n), \quad v_{0j}^* = v_{0j}/(1 - v_{0j}); \\
9Qg_{up}^{(i)}(\rho) &= 3K_{ci} g_{up}^{(2i)}(\rho) - g_{up}^{(1i)}(\rho), \\
g_{up}^{(1i)}(\rho) &= \begin{cases} b_{2i} \varphi_{1p}(\rho) c_{0p}/c_{0i}, & p \leq i \\ b_{1i} \varphi_{2p}(\rho), & p > i \end{cases}, \quad g_{up}^{(2i)}(\rho) = \begin{cases} b_{3i} \varphi_{1p}(\rho) c_{0p}/c_{0,i+1}, & p < i+1 \\ r_i^2 M_{1,i+1}^+ \varphi_{2p}(\rho), & p \geq i+1 \end{cases}, \\
b_{1i} &= r_i^2 [m_{0i} m_{1i}^{(1)} + (1 - K_{0c}^{(i+1)}) c_i(r_i) m_{1i}^{(2)}], \quad m_{0i} = 2[2K_{\mu i} + K_{\lambda i}^{(0)} c_i(r_i)], \\
b_{2i} &= \sqrt{r_i} [m_{0i} m_{2i}^{(1)} + (1 - K_{0c}^{(i+1)}) c_i(r_i) m_{2i}^{(2)}] / r_{i-1}^q, \quad b_{3i} = -r_i^2 M_{2,i+1}^- / r_{i+1}^3, \\
m_{1i}^{(j)} &= M_{1i}^+ + (-2)^{j-1} M_{1i}^- (r_{i-1}/r_i)^3, \quad m_{2i}^{(j)} = [(-2)^{j-1} M_{2i}^+ - M_{2i}^-] (r_{i-1}/r_i)^q, \\
j &= 1, 2.
\end{aligned}$$

Продиференціювавши (11), вважаючи при цьому, що переміщення відомі, дістанемо з урахуванням (9) вирази для радіальних деформацій:

$$c_p(\rho) \frac{du_p(\rho)}{d\rho} = \varepsilon_{rp}^t(\rho) + \varepsilon_{rp}^y(\rho), \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rp}^s(\rho) &= e_p^s + \frac{L_{1p}^s \varphi_{4p}(\rho) - L_{2p}^s \varphi_{3p}(\rho)}{9Q} - \frac{2}{3\rho^3} V_{ap}^s(\rho) - \frac{4}{3} V_{bp}^s(\rho) + \sum_{i=1}^{p-1} g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) u_i^s(r_i), \\
e_p^s(\rho) &= -\frac{2}{\rho^3} V_{sp}(\rho) + \Lambda_{sp}(\rho) + \frac{1}{3Q} [R_{1p}^s \varphi_{4p}(\rho) - R_{2p}^s \varphi_{3p}(\rho)], \\
\varphi_{3p}(\rho) &= M_{1p}^+ - 2M_{1p}^- r_{p-1}^3 / \rho^3, \quad \varphi_{4p}(\rho) = -2M_{2p}^+ / \rho^3 - M_{2p}^- / r_p^3; \\
9Qg_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) &= 3K_{ci} g_{\varepsilon p}^{(2i)}(\rho) - g_{\varepsilon p}^{(1i)}(\rho), \\
g_{\varepsilon p}^{(1i)}(\rho) &= \begin{cases} b_{2i} \varphi_{3p}(\rho) c_{0p}/c_{0i}, & p \leq i \\ b_{1i} \varphi_{4p}(\rho), & p > i \end{cases}, \\
g_{\varepsilon p}^{(2i)}(\rho) &= \begin{cases} b_{3i} \varphi_{3p}(\rho) c_{0p}/c_{0,i+1}, & p < i+1 \\ r_i^2 M_{1,i+1}^+ \varphi_{4p}(\rho), & p \geq i+1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Підставляючи (11), (12) в отримані на основі (3) залежності для  $p$ -го шару, одержуємо вирази для напружень.

**Визначення переміщень.** Для цього скористаємось методом послідовних наближень, взявши за нульові наближення переміщення  $u_p^{*s}(\rho)$ , які от-

римують з (11), коли модулі пружності та коефіцієнти Пуассона сталі і такі ж, як у задачі (6), (7):

$$u_p^{*s}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} V_{sp}^*(\rho) + \frac{1}{3Q} [R_{1p}^{*s} \phi_{2p}(\rho) - R_{2p}^{*s} \phi_{1p}(\rho)], \quad s = t, y, \quad (13)$$

де

$$R_{1p}^{*t} = \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ V_{tj}^*(r_j) \frac{c_{0j}}{c_{0p}}, \quad R_{2p}^{*t} = \sum_{j=p}^n M_{2j}^- V_{tj}^*(r_j) \frac{1}{r_j^3}, \quad R_{1p}^{*y} = \frac{3r_0^2 \sigma_0}{c_{0p}}, \quad R_{2p}^{*y} = \frac{\sigma_n}{c_{0n}},$$

$$V_{sp}^*(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r^2 \Lambda_{sp}^*(r) dr, \quad \Lambda_{sp}^*(r) = k_p^* \Phi_p(r), \quad k_p^* = \frac{1 + \nu_{0p}}{1 - \nu_{0p}}, \quad \Lambda_{yp}^*(r) = 0.$$

Тоді переміщення, що відповідають першому наближенню, такі:

$$c_p(\rho) u_p^s(\rho) = u_{0p}^s(\rho) + \frac{L_{1p}^s \phi_{2p}(\rho) - L_{2p}^s \phi_{1p}(\rho)}{9Q} + \frac{V_{ap}^{(s)}(\rho)}{3\rho^2} - \frac{4\rho V_{bp}^{(s)}(\rho)}{3} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho) u_i^s(r_i), \quad (14)$$

де

$$V_{ap}^s(\rho) = c_p^*(\rho) \rho^2 u_p^{*s}(\rho) - c_p^*(r_{p-1}) r_{p-1}^2 u_p^{*s}(r_{p-1}) + V_{ap}^{*s}(\rho),$$

$$V_{bp}^s(\rho) = \mu_p(r_p) u_p^{*s}(r_p) \frac{1}{r_p} - \mu_p(\rho) u_p^{*s}(\rho) \frac{1}{\rho} + V_{bp}^{*s}(\rho); \quad (15)$$

$$V_{ap}^{*t}(\rho) = \frac{M_{2p}^- R_{1p}^{*t} + r_p^3 M_{1p}^+ R_{2p}^{*t}}{r_p^3 Q} b_p^*(\rho) - k_p^* V_{tp}(\rho), \quad b_p^*(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} c_p^*(r) r^2 dr,$$

$$V_{bp}^{*t}(\rho) = \frac{M_{2p}^+ R_{1p}^{*t} - M_{1p}^- r_{p-1}^3 R_{2p}^{*t}}{Q} b_p(\rho) + k_p^* \left[ 3 \int_{\rho}^{r_p} \frac{\mu_p(r) V_{tp}^*(r)}{r^4} dr - \int_{\rho}^{r_p} \frac{\mu_p(r) \Phi_p(r)}{r} dr \right],$$

$$V_{ap}^{*y}(\rho) = \frac{M_{2p}^- R_{1p}^{*y} + r_p^3 M_{1p}^+ R_{2p}^{*y}}{r_p^3 Q} b_p^*(\rho), \quad V_{bp}^{*y}(\rho) = \frac{M_{2p}^+ R_{1p}^{*y} - r_{p-1}^3 M_{1p}^- R_{2p}^{*y}}{Q} b_p(\rho),$$

$$b_p(\rho) = \int_{\rho}^{r_p} \frac{\mu_p(r)}{r^4} dr, \quad L_{1p}^s = H_{1p}^s + 18\gamma_1 r_0^2 u_1^s(r_0), \quad L_{2p}^s = H_{2p}^s + 6 \frac{\gamma_n c_{0p}}{r_n c_{0n}} u_n^s(r_n);$$

$H_{1p}^s, H_{2p}^s$  визначають з урахуванням (15).

Аналогічно знаходимо переміщення, що відповідають першому наближенню, в такій ж кусково-неоднорідній кулі, але тепер вважатимемо, що область  $r_{p-1} < r < r_p$  складена з  $n_p$  концентричних сферичних шарів, кожен з яких має модулі пружності  $E_p(t_p, r)$ , коефіцієнти Пуассона  $\nu_p(t_p, r)$  і коефіцієнти лінійного розширення  $\alpha_{tp}(t_p, r)$  ( $p = \overline{1, n}$ ). У цьому випадку відповідні формули для переміщень матимуть також вигляд (14), в яких тепер вхідними будуть відповідні параметри задачі термопружності для  $N$  шарової кулі, де  $N = \sum_{p=1}^n n_p$ .

У подальшому порівнюємо переміщення, підраховані на основі перших наближень для  $n$  і  $N$  шарових куль. Якщо різниця між їх значеннями на одних і тих самих поверхнях знаходиться не в межах заданої точності, то збільшуємо  $n_p$ , повторюємо процедуру знаходження перших наближень і порівнюємо на тих самих поверхнях значення переміщень, отримані в суміжних процедурах. Такий процес продовжуємо, доки не досягнемо заданої точності.

Зауважимо, що радіальні деформації і напруження, які відповідають (13), визначимо за формулами

$$\begin{aligned}\frac{du_p^{*s}(\rho)}{d\rho} &= \Lambda_{sp}^*(\rho) - \frac{2}{\rho^3} V_{sp}^*(\rho) + \frac{1}{3Q} [R_{1p}^{*s} \Phi_{4p}(\rho) - R_{2p}^{*s} \Phi_{3p}(\rho)], \\ \sigma_{rp}^{*s}(\rho) &= \sigma_p^{*s(1)}(\rho), \quad \sigma_{\phi p}^{*s}(\rho) = \sigma_p^{*s(2)}(\rho), \\ \sigma_p^{*s(j)}(\rho) &= \frac{E_{0p}}{1 + \nu_{0p}} \left[ \frac{\delta_j}{\rho^3} V_{sp}^*(\rho) - \delta_{j2} \Lambda_{sp}^*(\rho) \right] + \frac{c_{0p}^*}{3Q} [R_{1p}^{*s} \Psi_p^{*(1j)}(\rho) - R_{2p}^{*s} \Psi_p^{*(2j)}(\rho)],\end{aligned}$$

де

$$\Psi_p^{*(1j)}(\rho) = \delta_j M_{2p}^+ \frac{k_{0p}^+}{\rho^3} - \frac{M_{2p}^-}{r_p^3}, \quad \Psi_p^{*(2j)}(\rho) = M_{1p}^+ + \delta_j M_{1p}^- r_{p-1}^3 \frac{k_{0p}^+}{\rho^3}, \quad k_{0p}^+ = \frac{1 - 2\nu_{0p}}{1 + \nu_{0p}}.$$

**Числовий приклад.** Нехай на внутрішній і зовнішній поверхнях три-складової кулі задано відповідно тепловий потік  $q_0 = 0.349 \cdot 10^6$  Вт/м<sup>2</sup> і температура  $t_c = 0^\circ\text{C}$ . Перший складник кулі виготовлений з функціонально-градієнтного матеріалу [5] на основі кераміки  $\text{ZrO}_2$  і сплаву  $\text{Ti-6Al-4V}$ . Другий і третій – відповідно з цих же кераміки і сплаву. Порівнювали статичний термопружний стан такої кулі, підрахований з і без урахування залежності від температури ФМХ кераміки і сплаву.

З урахуванням температурної залежності ФМХ першого шару мали вигляд

$$\begin{aligned}\lambda_t(t, r) &= \{(1 - P_*^{1/3})/\lambda_0 + P_*^{1/3}/[(1 - P_*^{2/3})\lambda_0 + P^{2/3}\lambda_a]\}^{-1}, \\ E(t, r) &= E_0(1 - P_*)/\{1 + P_*(5 + 8\nu(t, r))(37 - 8\nu(t, r))/[8(1 + \nu(t, r))(23 + 8\nu(t, r))]\}, \\ \alpha_t(t, r) &= (\alpha_m(t)K_m V + \alpha_c(t)K_c(1 - V))/(K_m V + K_c(1 - V)), \\ \nu(t, r) &= \nu_m(t)V + \nu_c(t)(1 - V), \\ \lambda_0 &= \lambda_c(t) + 3\lambda_c(t)[\lambda_m(t) - \lambda_c(t)]V/[3\lambda_c(t) + (\lambda_m(t) - \lambda_c(t))(1 - V)], \\ E_0 &= E_c(t)[E_c(t) + (E_m(t) - E_c(t))V^{2/3}]/[E_c(t) + (E_m(t) - E_c(t))(V^{2/3} - V)], \\ K_m &= E_m(t)/[2(1 - \nu_m(t))], \quad K_c = E_c(t)/[2(1 - \nu_c)].\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}0.1 \leq m_* \leq 30, P_* &= Ah(r - r_0)[1 - h(r - r_0)], \quad V = [h(r - r_0)]^{m_*}, \quad h = (r_1 - r_0)^{-1}, \\ 0 \leq A < 4; \lambda_m(t) &= 5.741 + 0.017t \text{ [Вт/м } ^\circ\text{C]}, \quad E_m(t) = 107.275 - 0.0565t \text{ [ГПа]}, \\ \alpha_m(t) &= 8.747 \cdot 10^{-6} + 4.09 \cdot 10^{-9}t - 2.69 \cdot 10^{-12}t^2 \text{ [} ^\circ\text{C}^{-1}\text{]}, \quad 0^\circ\text{C} \leq t \leq 827^\circ\text{C}, \\ \alpha_m(t) &= 10.22911 \cdot 10^{-6} \text{ [} ^\circ\text{C}^{-1}\text{]}, \quad 827^\circ\text{C} \leq t \leq 1527^\circ\text{C}; \quad \nu_m(t) = 0.297 + 32 \cdot 10^{-6}t, \\ \lambda_c(t) &= 1.776 + 0.273 \cdot 10^{-3}t + 0.116 \cdot 10^{-6}t^2 \text{ [Вт/м } ^\circ\text{C]}, \\ E_c(t) &= 117.86 - 54.72 \cdot 10^{-3}t - 8.1 \cdot 10^{-6}t^2 \text{ [ГПа]},\end{aligned}$$

$\alpha_c(t) = 9.0868 \cdot 10^{-6} - 11.965 \cdot 10^{-9}t + 12.7 \cdot 10^{-12}t^2$  [°C<sup>-1</sup>],  $\nu_c(t) = 0.3$ ; величини з індексами «*m*» і «*c*» – ФМХ сплаву і кераміки відповідно;  $\lambda_a$  – коефіцієнт теплопровідності повітря.

Залежностям ФМХ другого і третього складників відповідали наведені вище величини з індексами «*c*» і «*m*».

Незалежні від температури ФМХ кераміки і сплаву були такі ж, як у праці [5]:  $\lambda_m(t) = 7.5$  [Вт/м °C],  $E_m(t) = 116.7$  [ГПа],  $\alpha_m(t) = 9.5$  [°C<sup>-1</sup>],  $\nu_m(t) = \nu_c(t) = 0.3$ ,  $\lambda_c(t) = 2.09$  [Вт/м °C],  $E_c(t) = 115$  [ГПа],  $\alpha_c(t) = 10 \cdot 10^{-6}$  [°C<sup>-1</sup>].

Розподіли в складниках температур  $t_i(\rho)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) знаходили зі системи інтегральних рівнянь [4]

$$t_3(\rho) = t_c + t_s r_0^2 \int_{\rho}^{r_3} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(3)}[t_3(\xi)]} d\xi, \quad t_2(\rho) = t_3(r_2) + t_s r_0^2 \int_{\rho}^{r_2} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(2)}[t_2(\xi)]} d\xi,$$

$$t_1(\rho) = t_2(r_1) + t_s r_0^2 \int_{\rho}^{r_1} \frac{\lambda_{s1}}{\xi^2 \lambda_t^{(1)}[t_1(\xi), \xi]} d\xi, \quad (t_s = q_0 l / \lambda_{s1}), \quad (16)$$

яку розв'язували методом послідовних наближень при  $\lambda_a = 0.03$  [Вт/м °С],  $r_0 = 0.25$ ,  $r_1 = 0.275$ ,  $r_2 = 0.3125$ ,  $r_3 = 1$ ,  $l = 0.08$  м,  $m_* = 1$ ,  $A = 3.74$ .

Визначаючи термопружний стан, складники кулі поділили відповідно на двадцять, чотири і вісім шарів. У співвідношеннях для функцій Гріна ФМХ збігалися з відповідними неоднорідних шарів на їх серединних поверхнях.

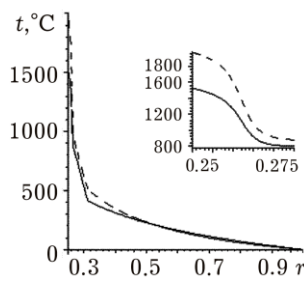


Рис. 1.

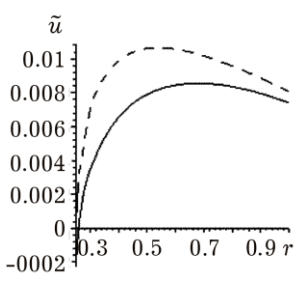


Рис. 2.

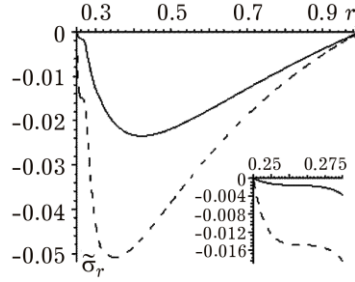


Рис. 3.

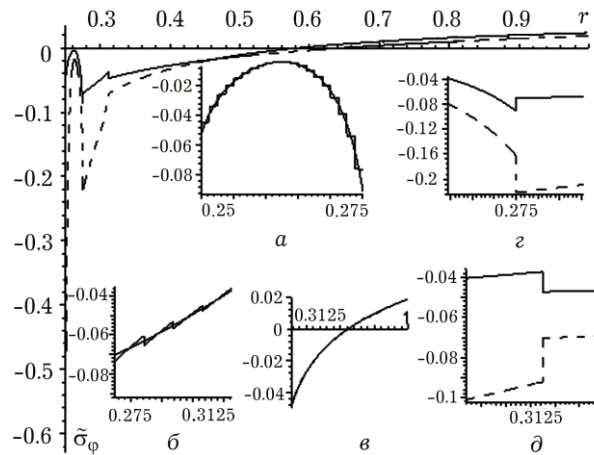


Рис. 4.

На рис. 1-4 зображено розподіли по товщині кулі температури, безрозмірних переміщень  $\tilde{u} = u/(\alpha_* t_*)$  ( $\alpha_* t_* = 0.01527$ ) і напружень  $\tilde{\sigma}_j = \sigma_j/(E_* \alpha_* t_*)$  ( $j = r, \varphi$ ;  $E_* = 60$  [ГПа]). Суцільним лініям відповідають залежні від температури ФМХ сплаву і кераміки, а штриховим – сталі. Крім того, на рис. 1 і 3 подано розподіли відповідно температури і радіальних напружень по товщині першого складника; на рис. 4 – розподіли колових напружень по товщині першого (а), другого (б) і третього (в) складників, які побудовані на основі нульового і першого наближень, та в приповерхневих областях першої (г) і другої (д) поверхонь поділу. Зауважимо, що графіки, побудовані на основі нульового і першого наближень, для переміщень і радіальних напружень збіглися у всіх складниках, а колових напружень – лише у третьому.

На внутрішній поверхні за температурнозалежних ФМХ температура майже на 449°C нижча, а абсолютні значення колових напружень у десять

разів менші, ніж за сталих. Якщо за температурнозалежних ФМХ діаметр цієї поверхні зменшується, то за сталих збільшується. Радіальні напруження стискальні. Максимальні їх значення, які досягаються в третьому складнику, за температурнозалежних ФМХ у двічі менші, ніж за сталих.

**Висновки.** Запропоновано методикау визначення термопружного стану, зумовленого одновимірним температурним полем та поверхневими навантаженнями, в кусково-неоднорідній термочутливій порожнистій ізотропній кулі, яка передбачає отримання з використанням узагальнених функцій і функції Гріна задачі пружності для шаруватої кулі зі сталими ФМХ відповідних систем інтегро-алгебричних рівнянь для радіальних переміщень та їх роз'язання методом послідовних наближень, обмеженим лише першим наближенням. Методика апробована на задачі термопружності для три-складової термочутливої кулі, перший складник якої виготовлений з функціонально-градієнтного матеріалу. Встановлено істотний вплив температурної залежності ФМХ на розподіли температури, переміщень і напружень.

1. Процюк Б. В. Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсально-ізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 95–109.
2. Процюк Б. В. Термопружний стан кусково-неоднорідних термочутливих сферичних тіл за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Мех.-мат. – 2012. – Вип.76. – С. 196–208.
3. Процюк Б. В., Синюта В. М. Визначення термопружного стану кусково-неоднорідної термочутливої кулі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 78–84.
4. Процюк Ю. Б. Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 151–161.
5. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Thermal Stresses. – 1994. – 17. – P. 471–487.

#### ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ПОЛОГО ИЗОТРОПНОГО ШАРА

*Определено термоупругое состояние, обусловленное центрально-симметричным температурным полем и поверхностными нагрузками, в слоистом полой изотропном шаре с учетом зависимости от температуры и координаты физико-механических характеристик (ФМХ). При этом использованы обобщенные функции, функция Грина задачи упругости для слоистого шара с постоянными ФМХ составляющих. Числовые исследования выполнены для трехслойного шара, первый слой которого изготовлен из функционально-градиентного материала.*

#### THERMOELASTIC STATE OF PIECEWISE INHOMOGENOUS THERMOSENSITIVE HOLLOW ISOTROPIC SPHERE

*The thermoelastic state caused by a centrally symmetric temperature field and surface loads is determined in layered isotropic sphere with regard to the dependence on temperature and coordinate of physical-mechanical characteristics (PMC). In this case generalized functions and Green's function of elasticity problem for layered sphere with constant PMC of components were used. Numerical studies were carried out for a three-layered sphere with first layer made of functionally graded material.*