УДК 517.98

О. Г. Тарас

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРОДОВЖЕННЯ АРЕНСА НА СПЕКТР АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВІЙ АЛГЕБРІ

Побудовано продовження операції множення банахової алгебри A у простір максимальних ідеалів аналітичних функцій обмеженого типу в A і досліджено його властивості. Це продовження узагальнює відоме продовження Аренса.

Нехай X – банаховий простір над полем комплексних чисел C, а X^* – простір лінійних неперервних функціоналів на X.

Відомо, що, використовуючи т. зв. продовження Арона–Бернера ([2, 5]), довільне неперервне n-лінійне відображення можна продовжити до неперервного n-лінійного відображення $\tilde{B} : X^{**} \times \ldots \times X^{**} \to C$ так:

$$\tilde{B}(x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}) = \lim_{\alpha_1} \ldots \lim_{\alpha_n} B(x_{\alpha_1}, \ldots x_{\alpha_n}),$$

де для кожного k, (x_{α_k}) – це напрямленість у X, збіжна в $*$-слабкій топології до $x_k^{**} \in X^{**}$. Така напрямленість існує, оскільки за відомою теоремою Голдстейна куля простору X є щільна у кулі простору X^{**} у $*$-слабкій топології.

Нехай A – деяка банахова алгебра над полем комплексних чисел. Продовження Аренса полягає у тому, що операцію множення алгебри A продовжуємо у алгебру A^{**}, розглядаючи добуток в A як приклад білінійного відображення і використовуючи продовження Арона–Бернера:

$$x^{**} \cdot y^{**} = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} x_\alpha \cdot y_\beta,$$

де x_α, y_β – напрямленості, збіжні у *-слабкій топології до $x^{**} \in A^{**}$ і $y^{**} \in A^{**}$ відповідно. Детальніше про продовження Аренса можна знайти у праці [1].

Мета статті – побудова продовження операції множення з алгебри A до $H_b^*(A)$ і $M_b(A)$, де $H_b(A)$ – алгебра аналітичних функцій обмеженого типу на A, а $M_b(A)$ – спектр (множина характерів) цієї алгебри. Оскільки $A \subset A^{**} \subset M_b(A) \subset H_b^*(A)$, то продовження операції добутку алгебри A до $H_b^*(A)$ і $M_b(A)$ можна вважати узагальненням продовження Аренса. Зауважимо, що якщо $A^{**} = M_b(A)$ (як, наприклад, для алгебри $A = c_0$), то побудоване у статті продовження збігається з продовженням Аренса.

Зауважимо, що кожен функціонал $\varphi \in H_b^*(X)$ є неперервний відносно топології рівномірної збіжності на деякій кулі в X. *Радіус-функцію* $R(\varphi)$ функціонала φ визначають як інфімум всіх $r > 0$ таких, що φ є неперервний в нормі рівномірної збіжності на кулі B_r. Відомо [3], що радіус-функцію функціонала $\varphi \in H_b^*(X)$ можна визначити за формулою

ISSN 1810-3022. **Прикл. проблеми мех. і мат.** – 2010. – **Вип.** 8. – **С.** 78–83.

$$R(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \sup \|\varphi_n\|^{1/n},$$

де φ_n – звуження φ на підпростір n-однорідних поліномів.

Означення і попередні відомості

Означення 1. Підмножину Ω банахового простору X називають *скінченно відкритою*, якщо її перетин з довільним скінченновимірним афінним підпростором є відкритою множиною в цьому підпросторі.

Означення 2. Відображення $f:\Omega \to Y$ називають G-*аналітичним*, якщо звуження f на $E\cap\Omega$ є аналітичним відображенням для довільного скінченновимірного афінного підпростору E (еквівалентно для довільного одновимірного афінного підпростору $E \in X$).

Означення 3. G-аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині $\Omega \subset X$ зі значеннями в Y, називають *аналітичним*, якщо воно неперервне.

Означення 4. Аналітичну функцію називають *функцією обмеженого типу*, якщо вона обмежена на обмежених підмножинах в X. Простір $H_b(X)$ аналітичних функцій обмеженого типу є алгеброю Фреше відносно поточкового множення і топології, заданої зліченною системою мультиплікативно опуклих норм p_r:

$$p_r(f) = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| < r, r \in Q\}.$$

Означення 5. Аналітичну функцію f називають n-*однорідним поліномом*, якщо $f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$ для довільного $\lambda \in C$. Простір n-однорідних поліномів позначають $P(^n X)$. Кожну аналітичну функцію $f \in H_b(X)$ подають у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

де $f_n \in P(^n X)$ і ряд праворуч збігається рівномірно на обмежених множинах. Детальніше про аналітичні функції на банахових просторах можна дізнатись із монографій [6, 7].

Означення 6. *Спектром* комутативної топологічної алгебри A називають множину характерів $M(A)$ неперервних гомоморфізмів алгебри A в C. Кожен характер природно ототожнюють з його ядром, яке є максимальним ідеалом в A, а довільний елемент $x \in A$ можна зобразити у вигляді функції x на $M(A)$: $x(\varphi) = \varphi(x)$, де $\varphi \in M(A)$.

Спектр алгебри $H_b(X)$ (позначають $M_b = M_b(X)$) досліджували раніше [3, 4, 8, 9, 10]. Арон, Коул і Гамелін довели [3], що для довільного $\varphi \in \mathrm{M}_b$ існує напрямленість $\{x_\alpha\} \subset X$ така, що

$$\varphi(P) = \lim_{\alpha} P(x_\alpha) \tag{1}$$

для довільного полінома P.

Основні результати

Нехай A – банахова алгебра; $H_b(A)$ – алгебра аналітичних функцій обмеженого типу. Позначатимемо $x \cdot y$ добуток елементів $x, y \in A$.

Для довільного фіксованого елемента $x \in X$ оператор зсуву τ_x визначають на $H_b(X)$ рівністю

$$(\tau_X f)(y) = f(x+y), \qquad f \in H_b(X).$$

Відомо, що $\tau_X f \in H_b(X)$ і для кожного фіксованого функціонала $\varphi \in H_b^*(X)$ функція

$$x \to \varphi(\tau_X f), \quad x \in X$$

належить $H_b(X)$ (див [3]). Для довільних $\varphi, \psi \in H_b^*(X)$ операцію згортки $\varphi * \psi$ в $H_b(X)$ визначає рівність

$$(\varphi * \psi)(f) = \varphi(\psi(\tau_X f)), \qquad f \in H_b(X).$$

Таку операцію згортки $*$ можна вважати "адитивною". За аналогією означимо "мультиплікативну" згортку.

Позначимо Q_X оператор, який діє на $H_b(A)$, так: $(Q_X f)(y) = f(x \cdot y)$, $f \in H_b(A)$, де x – фіксований елемент з A.

Твердження 1. Для довільної $f \in H_b(A)$ і довільного фіксованого $x \in A$ значення оператора $Q_X f$ належить $H_b(A)$.

Доведення. Нехай B_r – куля радіуса r з центром у нулі. Очевидно, що $B_r \cdot x \subset B_{r \cdot \|x\|}$, де $B_r \cdot x = \{y \cdot x \mid x \in A, y \in B_r\}$.

Отже, $\sup\limits_{\forall y \in B_r \cdot x} | f(y) | \leq \sup\limits_{\forall y \in B_{r \cdot \|x\|}} | f(y) |$, тому $\| Q_X f \|_r \leq \| f \|_{r \cdot \|x\|}$ або

$$\| f(x \cdot y) \|_r \leq \| f \|_{r \cdot \|x\|}. \tag{2}$$

Отже, $(Q_X f)(y)$ – обмежена функція від аргументу y на довільній кулі радіуса r. З іншого боку, відображення $y \to y \cdot x$ – лінійне, функція f – аналітична, отже, функція $(Q_X f)(y)$ – аналітична як композиція аналітичних відображень. Тому $Q_X f \in H_b(A)$.

Твердження доведено.

Розглянемо $H_b^*(A)$ – спряжений простір до $H_b(A)$. Визначимо для довільних функціоналів $\varphi, \psi \in H_b^*(A)$ згортку

$$\varphi \bullet \psi(f) = \varphi(\psi(f(x \cdot y))), \tag{3}$$

де ψ діє на $f(x \cdot y)$ як на функцію від y, а φ – на $\psi(f(x \cdot y))$ як на функцію від x. Цю операцію згортки можна вважати продовженням операції множення алгебри A на $H_b^*(A)$. Щоб це показати, введемо допоміжну функцію $g(x) = \psi(f(x \cdot y)) = Q_X^* \psi(f)$ для будь-якого фіксованого x (Q_X^* – спряжений оператор до Q_X).

Твердження 2. Для будь-якого функціонала $\psi \in H_b^*(A)$ функція $g(x) = \psi(f(x \cdot y)) \in H_b(A)$.

Доведення. Легко бачити, що $g(x)$ є аналітична функція, тому достатньо показати, що $g(x)$ обмежена на кулях радіуса r.

Функціонал ψ згідно з означенням радіус-функції неперервний на $B_{R(\psi)+\varepsilon}$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, тому $| \psi(g) | \leq c \| g \|_{R(\psi)+\varepsilon}$ для деякої константи c. Отже, на основі (2), маємо:

$$|\psi(f(x\cdot y))|\le c\,\|f(x\cdot y)\|_{R(\psi)+\varepsilon}=c\,\|Q_x f\|_{R(\psi)+\varepsilon}\le$$
$$\le c\,\|f\|_{(R(\psi)+\varepsilon)\|x\|}=c\,\|f\|_{R(\psi)\|x\|+\varepsilon\|x\|}.$$

Оскільки ця нерівність виконується для будь-якого $\varepsilon>0$, то вона виконуватиметься і при $\varepsilon=0$. За фіксованого y, $g(x)=\psi(f(x\cdot y))$ є функціонал з $H_b^*(A)$ від f. Встановлена нерівність показує, що цей функціонал неперервний відносно $\sup$-норми на кулі радіуса $R(\psi)\|x\|$.

Тому, за означенням, його радіус-функція задовольняє нерівність $R(g(x))\le R(\psi)\|x\|$. Отже, функція $g(x)$ обмежена на кулі B_r.

Твердження доведено.

Важливою є така теорема.

Теорема 1. Для довільних функціоналів $\varphi,\psi\in H_b^*(A)$ операція згортки не виводить за межі $H_b^*(A)$, тобто $\varphi\bullet\psi\in H_b^*(A)$ і $R(\varphi\bullet\psi)\le R(\varphi)\cdot R(\psi)$.

Доведення. Нехай $\varepsilon>0$. Виберемо для довільної функції $f\in H_b(A)$ сталі $c,d>0$ такі, щоб

$$|\varphi(f)|\le c\,\|f\|_{R(\varphi)+\varepsilon}, \tag{4}$$

$$|\psi(f)|\le d\,\|f\|_{R(\psi)+\varepsilon}. \tag{5}$$

Розглянемо $|g(x)|$, $g(x)=\psi(f(x\cdot y))$. На основі нерівностей (4), (5), (2) легко бачити, що $|g(x)|=|\psi(Q_x f)|\le d\,\|Q_x f\|_{R(\psi)+\varepsilon}\le d\,\|f\|_{(R(\psi)+\varepsilon)\|x\|}$. Перейшовши до супремуму в цій нерівності $\sup\limits_{\|x\|\le R(\varphi)+\varepsilon}|g(x)|\le d\sup\limits_{\|x\|\le R(\varphi)+\varepsilon}\|f\|_{(R(\psi)+\varepsilon)\|x\|}$, отримаємо:

$$\|g\|_{R(\varphi)+\varepsilon}\le d\,\|f\|_{(R(\psi)+\varepsilon)(R(\varphi)+\varepsilon)}. \tag{6}$$

Використовуючи нерівність (6), маємо:

$$|\varphi\bullet\psi(f)|=|\varphi(g)|\le c\,\|g\|_{R(\varphi)+\varepsilon}\le cd\,\|f\|_{(R(\psi)+\varepsilon)(R(\varphi)+\varepsilon)}.$$

Оскільки ця нерівність виконується для довільного $\varepsilon>0$, то вона виконуватиметься для $\varepsilon=0$:

$$|\varphi\bullet\psi(f)|\le cd\,\|f\|_{R(\varphi)R(\psi)},$$

тобто функціонал $\varphi\bullet\psi$ є неперервний на $H_b(X)$ відносно норми рівномірної збіжності на кулі радіуса $R(\varphi)R(\psi)$. Тому, згідно з означенням радіус-функції,

$$R(\varphi\bullet\psi)\le R(\varphi)R(\psi)$$

а отже, $\varphi\bullet\psi\in H_b{}^*(A)$.

Теорему доведено.

Таким чином, ввели операцію множення між функціоналами φ та ψ і показали, що вона коректно визначена на $H_b^*(A)$.

Відомо, що $M_b(A)\subset H_b^*(A)$. Дослідимо вигляд згортки (3) на спектрі $M_b(A)$.

З означення згортки та формули (1) випливає теорема.

Теорема 2. Нехай φ, $\psi \in M_b(A)$, напрямленості $(x_\alpha),(y_\beta) \subset A$ збіжні в слабко поліноміальній топології $M_b(A)$, тобто такі, що $P(x_\alpha) \to \varphi(P)$ і $P(y_\beta) \to \psi(P)$ для деяких $\varphi, \psi \in M_b$ і кожного полінома $P \in H_b(A)$. Тоді для кожного полінома $P \in H_b(A)$ виконується

$$\varphi \bullet \psi(P) = \lim_\beta \lim_\alpha P(x_\alpha \cdot y_\beta). \tag{7}$$

Легко бачити, що згортка (3) загалом не є комутативна, навіть якщо A комутативна. Якщо A нерегулярна за Аренсом (наприклад, $A = l_1$), то продовження операції множення у A^{**} вже не буде комутативним (див. [3], і тим більше продовження у $M_b(A) \supset A^{**}$.

Твердження 3. Операція згортки (3) асоціативна.

Доведення. Розглянемо згортку трьох функціоналів:

$$\varphi \bullet (\theta \bullet \xi)(f) = \varphi\big((\theta \bullet \xi)(Q_y f)\big) = \varphi\Big(\theta\big(\xi(Q_x Q_y f)\big)\Big).$$

З іншого боку,

$$((\varphi\bullet\theta)\bullet\xi)(f) = (\varphi\bullet\theta)\big(\xi(Q_y f)\big) = \varphi\big(\theta(Q_x \xi(Q_y f))\big) =$$

$$= \varphi\Big(\theta\big(\xi(Q_{yx} f)\big)\Big) = \varphi\Big(\theta\big(\xi(Q_x Q_y f)\big)\Big).$$

Отже, асоціативність виконується.

Твердження доведено.

Зауважимо, що з теореми 2 випливає, що операція множення і згортка $\bullet$ є нарізно непевна в слабко поліноміальній топології на $M_b(X)$, а той факт, що границя (7), взагалі кажучи, залежить від порядку, означає, що множення і мультиплікативна згортка можуть бути сукупно розривними в слабко поліноміальній топології.

Для довільного $z \in A$ позначимо δ_z – елемент з $M_b(A)$, який визначає формула $\delta_z(f) = f(z)$, $f \in H_b(X)$.

Наслідок. Нехай A – регулярна за Аренсом, $z_1, z_2 \in A, \varphi \in M_b(A)$. Тоді виконується дистрибутивний закон

$$\varphi \bullet \delta_{z_1+z_2} = \varphi \bullet \delta_{z_1} * \varphi \bullet \delta_{z_2}.$$

Доведення. Достатньо перевірити цю рівність на щільній підмножині $P(A) \subset H_b(A)$. Згідно з теоремою 2, для довільного полінома P маємо:

$$\varphi \bullet \delta_{z_1+z_2}(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha(z_1 + z_2)) = \lim_\alpha P(x_\alpha z_1 + x_\alpha z_2) =$$

$$= \lim_{\alpha_1} \lim_{\alpha_2} P(x_{\alpha_1} z_1 + x_{\alpha_2} z_2) = \varphi \bullet \delta_{z_1} * \varphi \bullet \delta_{z_2}.$$

Наслідок доведено.

1. *Arens R.* The adjoint of a bilinear operation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1951. – **2**. – P. 839–848.
2. *Aron R.M., Berner P.D.* A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings // Bull. Soc. Math. France. – 1978. – **106**. –P. 3–24.
3. *Aron R.M., Cole B.J.,* and *Gamelin T.W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – **415**. – P. 51–93.
4. *Aron R.M., Cole B.J.,* and *Gamelin T.W.* Weak-star continuous analytic functions // Can. J. Math. – 1995. – **47**. – P. 673–683.

5. ***Davie A.M., Gamelin T.W.*** A theorem on polynomial-star aproximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – **106**. – P. 351–356.
6. Mujica J. Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space // Archiv der Mathematik. – 2001. – **76**. – P. 292–298.
7. ***Zagorodnyuk A.*** Spectra of Algebras of Entire Functions on Banach Spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – **134**. – P. 2559–2569.
8. ***Zagorodnyuk A.*** Spectra of Algebras of Analytic Functions and Polynomials on Banach Spaces // Contemporary Math. – 2007. – **435**. – P. 381–194.

ОБОБЩЕНИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ АРЕНСА НА СПЕКТР АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ

Построено продолжение операции умножения банаховой алгебры A *в пространство максимальных идеалов алгебры аналитических функций ограниченного типа в* A *и изучены его свойства. Это продолжение обобщает известное продолжение Аренса.*

A GENERALIZFTION OF ARENS' EXTENSION TO SPECTRA OF ANALYTIC FUNCTIONS ON A BANACH ALGEBRA

An extension of multiplication in Banach algebra A *to the space of maximal ideals of analytic functions of bounded type is constructed and some properties of the extension are studied. This extension generalizes the well-known Arens' extension.*

Прикарпатський нац. ун-т
імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
05.10.10