

**КОМБІНОВАНИЙ ЗГИН З РОЗТЯГОМ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН У ЇЇ ВЕРШИНАХ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ ТА ЛІНІЙНОГО ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ**

*Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів досліджено задачу про сумісну дію згину та розтягу ізотропної пластини, яка містить наскрізну прямолінійну тріщину, береги якої контактують по лінії на верхній основі пластини, а в її вершинах містяться пластичні зони, з урахуванням лінійного зміцнення матеріалу. Розв'язок сформульованої задачі зведено до задач лінійного спряження, на основі яких отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Числово визначено довжину пластичної зони у вершині тріщини за різних силових і механічних параметрів задачі.*

**Вступ.** Розвиток машинобудівних, авіаційних, будівельних, суднобудівних та інших технологій часто пов'язаний із використанням пластинчастих елементів, що обумовлено їх порівняно легкістю. Під час експлуатації таких елементів можуть виникати тріщини, тому важливо знати, як вони впливають на міцність конструкцій. Одним із основних завдань під час оцінки міцності конструкційного елемента з тріщинами є визначення граничного навантаження його руйнування.

Розв'язками плоских задач та задач згину пластин з тріщинами займалися багато авторів, результати яких узагальнено в монографіях [1, 4, 10, 12–14] та ін. Розтяг пластини з тріщинами, на продовженні яких утворилися пластичні зони, розглянуто у працях [3, 4].

У працях [2, 10, 11] наведено критерії руйнування та зроблено огляд досліджень розтягу тіл з тріщинами, у вершинах яких утворилися пластичні зони. Напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з наскрізною тріщиною у пружно-пластичному формулюванні вивчали у працях [6, 7], з ненаскрізною тріщиною – у [8], а однорідної пластини з двома наскрізними тріщинами – у [9].

Нижче з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів досліджена задача про комбінований згин з розтягом ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною за наявності контакту їх берегів за дії однорідного поля зусиль та згинальних моментів на нескінченності, у вершинах яких є пластичні зони з урахуванням лінійного зміцнення матеріалу.

**Формулювання задачі.** Розглянемо однорідну ізотропну пластину завтовшки  $2h$  з прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки  $2l$ . На безмежності пластини згинається рівномірно розподіленими згинальними моментами, а також розтягується рівномірно розподіленими зусиллями  $P, Q$ , які спричинили у вершинах тріщин вузькі пластичні зони з урахуванням лінійного зміцнення матеріалу. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження та контактують по лінії на верхній основі пластини. У серединній її площині виберемо декартову систему координат  $OxOy$  з початком у центрі тріщини, направивши вісь  $Ox$  по тріщині, а вісь  $Oy$  – перпендикулярно до серединної площини.

Довжину пластичних зон у вершинах тріщини позначимо через  $\Delta$ , довжину тріщини з пластичними зонами – через  $2d$ , лінію, де розміщена тріщина, – через  $L$ , а пластичні зони – через  $L_1$  (див. рис. 1).

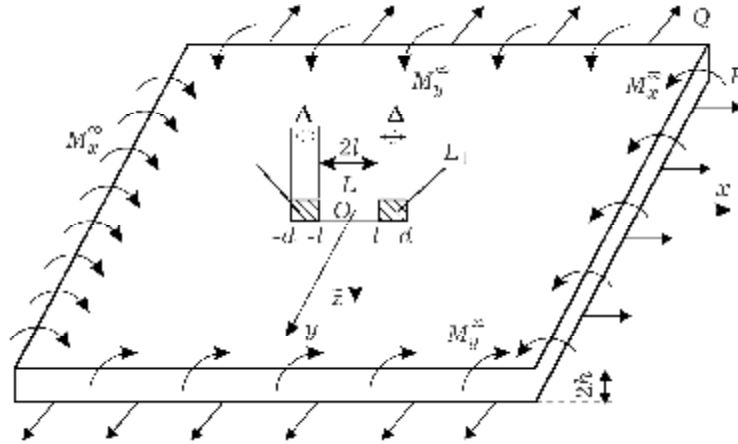


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини.

Оскільки береги тріщини контактують, сформульовану задачу розбиваємо на дві: плоску та задачу згину (класична теорія згину пластин) за таких крайових умов:

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0 \sigma^*(x), M_y^{\pm} = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = -N/(2h), M_y^{\pm} = hN, [v] + h[\partial_y w] = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm} = 0, P_y^{\pm} = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (3)$$

$$\sigma^*(x) = m^* + (1 - m^*)(|x| - l) / (d - l), \quad m^* = \sigma_g / \sigma_{Y1}, \quad (4)$$

де  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  та  $u$  і  $v$  – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення по осях  $Ox$  і  $Oy$  у плоскій задачі;  $\sigma_0$  і  $M_0$  – невідомі нормальне напруження у плоскій задачі та згинальний момент у пластичній зоні, для яких виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [4];  $N$  – контактне зусилля ( $N > 0$ );  $w$  – прогин пластини;  $M_y$  і  $P_y$  – згинальний момент та перерізувальна сила у сенсі Кірхгофа;  $\sigma_B$  і  $\sigma_Y$  – границі міцності та плинності матеріалу;  $[f] = f^+ - f^-$ , де значками “+” і “-” позначено граничне значення відповідної величини, якщо  $y \rightarrow \pm 0$ .

**Побудова розв’язку задачі.** Для визначення напружено-деформованого стану пластини введемо комплексні потенціали плоскої задачі  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  та класичної теорії згину пластини  $\Phi_3(z)$  і  $\Omega_3(z)$  [5, 12]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (6)$$

$$\partial_x g = \Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}, \quad (7)$$

$$f = \Phi_3(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}, \quad (8)$$

де  $\mu = 0.5E/(1 + \nu)$  – модуль зсуву,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини;

$$g = \partial_x w + i \partial_y w, \quad f(x) = \left( M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right) / m, \quad (9)$$

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu), \quad \mathbb{K} = (3 + \nu)/(1 - \nu),$$

$$m = -D(1 - \nu), \quad \partial_\alpha f = \partial f / \partial \alpha,$$

$c'$  – невідома стала,  $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$  – циліндрична жорсткість пластини.

Комплексні потенціали за великих  $|z|$  можна подати у вигляді [5, 12]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Gamma + O(1/z^2), \quad \Omega(z) = \Gamma + \Gamma' + O(1/z^2), \\ \Phi_3(z) &= \mathbb{K}\mathbb{P} + O(1/z^2), \quad \Omega_3(z) = -\mathbb{K}\mathbb{P} - \mathbb{P}' + O(1/z^2), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } \Gamma = \frac{1}{4}(P + Q), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(Q - P), \quad \mathbb{P}' = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1 + \nu)}, \quad \mathbb{P} = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2m}.$$

З крайових умов (1)–(3) можемо записати:

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ \left( M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right)^+ - \left( M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right)^- &= 0, \quad x \in L + L_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо взяти до уваги (5) і (8), то крайові умови (11) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ (\mathbb{K}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^+ - (\mathbb{K}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Враховавши (10) та розв'язавши задачі лінійного спряження (12), одержимо:

$$\Phi(z) = \Omega(z) - \Gamma', \quad \Omega_3(z) = \mathbb{K}\Phi_3(z) - (\mathbb{K} + 1)\mathbb{P}' - \mathbb{P}. \quad (13)$$

З крайових умов (2) і (3), враховавши (5), (8), (9) та залежності (13), матимемо:

$$\begin{aligned} N &= -2h((\Phi^+(x) + \Phi^-(x)) + \Gamma'), \quad x \in L, \\ M_y &= -ic' + m\{\mathbb{K}(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\mathbb{K} + 1)\mathbb{P}' - \mathbb{P}\}, \quad x \in L. \end{aligned} \quad (14)$$

Якщо ввести функцію

$$F(z) = -2h^2\Phi(z) - m\mathbb{K}\Phi_3(z) - h^2\Gamma' + 0.5\{ic' + m((\mathbb{K} + 1)\mathbb{P}' + \mathbb{P})\}, \quad (15)$$

то з другої крайової умови (2) отримаємо:

$$F^+(x) + F^-(x) = 0, \quad x \in L. \quad (16)$$

Беручи до уваги крайові умови (1) та співвідношення (13), на основі (5) і (8) одержимо:

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \Gamma' = \sigma_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (17)$$

$$-ic' + m\{\mathbb{K}(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\mathbb{K} + 1)\mathbb{P}' - \mathbb{P}\} = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1. \quad (18)$$

З (17) і (18) отримаємо, що функція  $F(z)$  (15) задовольняє умову

$$F^+(x) + F^-(x) = c\sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (19)$$

де

$$c = -2h^2\sigma_0 - M_0. \quad (20)$$

Розвиваючи задачу лінійного спряження (16) і (19) у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, матимемо:

$$F(z) = \frac{X_1(z)c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t) dt}{X_1^+(t)(t-z)}, \quad (21)$$

де

$$X_1(z) = \sqrt{z^2 - d^2}. \quad (22)$$

Врахувавши (10), з поведінки функції  $F(z)$ , якщо  $|z| \rightarrow \infty$  (15), на основі (21) можемо записати:

$$-Oh^2 - \frac{1}{2}M_y^\infty = \frac{c}{2\pi} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t) dt}{\sqrt{d^2 - t^2}}. \quad (23)$$

З крайових умов (3), беручи до уваги (5), (8), (9), (13), одержимо:

$$(\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^+ + (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (24)$$

$$(\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x))^+ + (\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1.$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (24) та врахувавши поведінку функцій  $\Phi(z)$  і  $\Phi_3(z)$  на нескінченності (10), матимемо:

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi(z), \quad \bar{\Phi}_3(z) = \Phi_3(z). \quad (25)$$

Із третьої крайової умови (2), врахувавши (6), (7) і (13), одержимо:

$$(\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^+ - (\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^- = 0, \quad x \in L, \quad (26)$$

де

$$\delta = \frac{\kappa + 1}{\mu h(1 + \nu_0)}.$$

Беручи до уваги (14) і (15), отримаємо:

$$(\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x) - G)^+ + (\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x) - G)^- = \mathcal{A}(x), \quad x \in L_1, \quad (27)$$

де

$$G = \frac{1}{\nu_0}((\nu_0 + 1)\nu_0 + \nu_0), \quad \mathcal{A}(x) = \rho\sigma^*(x) - \delta\Gamma', \quad \rho = \frac{2}{\nu_0 m} M_0 + \delta\sigma_0. \quad (28)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (27) візьмемо у вигляді

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) - G = \frac{\mathcal{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\mathcal{A}(t) dt}{\mathcal{X}_0^+(t)(t-z)}, \quad (29)$$

де

$$\mathcal{X}_0(z) = \sqrt{(z^2 - \rho^2)(z^2 - d^2)}.$$

Подамо функції  $\sigma^*(x)$  та  $\mathcal{A}(x)$  так:

$$\sigma^*(x) = a|x| + b, \quad (30)$$

$$\mathcal{A}(x) = B|x| + A, \quad (31)$$

де

$$a = \frac{1-m^*}{d-l}, \quad b = m^* - \frac{(1-m^*)l}{d-l},$$

$$A = \rho b - \delta\Gamma', \quad B = \rho a. \quad (32)$$

Врахувавши (31), (32), формулу (29) перепишемо у вигляді

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) - G = \frac{\rho_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{(B|t| + A) dt}{\rho_0^+(t)(t-z)}. \quad (33)$$

Якщо розвинути праву і ліву частини (33) у ряд за великих  $|z|$  та прирівняти коефіцієнти біля однакових степенів  $z$ , то

$$\delta\Gamma + 2\rho_0 - G = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{(B|t| + A) t dt}{\rho_0^+(t)}. \quad (34)$$

Після відповідних перетворень та обчислення інтегралів [14] у (34) одержимо:

$$M_0 = \frac{\rho_0^2}{6} \left( \sigma_0 - \frac{Q}{2daE(q) + \pi b} \right) + \frac{M_y^\infty}{2daE(q) + \pi b}, \quad (35)$$

де

$$E(q) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad \rho_0 = \frac{4(3+\nu)}{(1+\nu)}, \quad q = \frac{\sqrt{d^2 - l^2}}{d}.$$

Із (15) і (21) отримаємо:

$$2h^2\Phi(z) + m\rho_0\Phi_3(z) = d_1 + m\rho_0\rho_0 - h^2\Gamma' - \frac{X_1(z)c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t) dt}{X_1^+(t)(t-z)}, \quad (36)$$

$$d_1 = 0.5 \left( ic' - m(\rho_0(\rho_0 - 1) - \rho_0) \right).$$

Обчисливши інтеграли у (33), маємо:

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) - G = X_1(z)\rho_1(z)\sqrt{z^2 - l^2} + \frac{A}{2}, \quad (37)$$

де

$$\rho_1(z) = \frac{B}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{|t| dt}{\rho_0^+(t)(t-z)}.$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (36) і (37) відносно  $\Phi(z)$ ,  $\Phi_3(z)$ , одержимо:

$$\Phi(z) = f_4(z)X_1(z) + d_5, \quad \Phi_3(z) = f_3(z)X_1(z) + d_3, \quad (38)$$

$$f_3(z) = (\delta f_2(z) - 2h^2 f_1(z)) / \Delta, \quad f_4(z) = (m\rho_0 f_1(z) - 2f_2(z)) / \Delta,$$

$$f_1(z) = \rho_1(z)\sqrt{z^2 - l^2}, \quad f_2(z) = -\frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t) dt}{X_1^+(t)(t-z)},$$

$$d_3 = (\delta B_2 - 2h^2 B_1) / \Delta, \quad d_5 = (m\rho_0 B_1 - 2B_2) / \Delta,$$

$$\Delta = m\rho_0 - 4h^2, \quad B_1 = 0.5A + G, \quad B_2 = d_1 + m\rho_0\rho_0 - h^2\Gamma'.$$

Після обчислення інтеграла в (23) отримаємо:

$$M_y^\infty = -Qh^2 - \frac{2c}{\pi} \left( a\sqrt{d^2 - l^2} + b \arccos\left(\frac{l}{d}\right) \right). \quad (39)$$

Для знаходження  $\sigma_0$  і  $M_0$  скористаємося умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару на нижній основі пластини [4]:

$$\sigma_0 + 3M_0/(2h^2) = \sigma_Y. \quad (40)$$

Розв'язавши систему рівнянь (35) і (40) відносно  $\sigma_0$  і  $M_0$ , матимемо:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_Y} = \frac{4}{(4 + \eta)} \left( \frac{(2\eta E(q) + \pi b - \pi \xi)}{(\pi \eta + 2\eta E(q))} + \frac{\eta \pi \xi}{4((\pi b + 2\eta E(q)))} \right), \quad (41)$$

$$M_0 = \frac{3M_0}{2h^2 \sigma_Y} = \frac{4}{(4 + \eta)} \left( \frac{\xi \pi}{(\pi \eta + 2\eta E(q))} - \frac{\eta \pi \xi}{4((\pi b + 2\eta E(q)))} \right) + \frac{\eta}{4 + \eta},$$

де

$$\xi = \frac{3M_y^\infty}{2h^2 \sigma_Y}, \quad \eta = \frac{Q}{\sigma_Y}, \quad \xi = \frac{1 - m^*}{1 - \eta}, \quad \eta = \frac{l}{d}.$$

Підставивши вирази  $\sigma_0$  і  $M_0$  (41) у (39), одержимо рівняння для визначення відносної довжини пластичної зони  $\xi = \Delta/l$ :

$$\xi + 3\eta - \frac{2}{\pi} (3\xi + M_0) \left( \eta \sqrt{1 - \eta^2} + \arccos \eta \right) = 0. \quad (42)$$

**Числовий аналіз задачі та висновки.** Числовий аналіз задачі для  $\nu = 0.3$  подано на рис. 2.

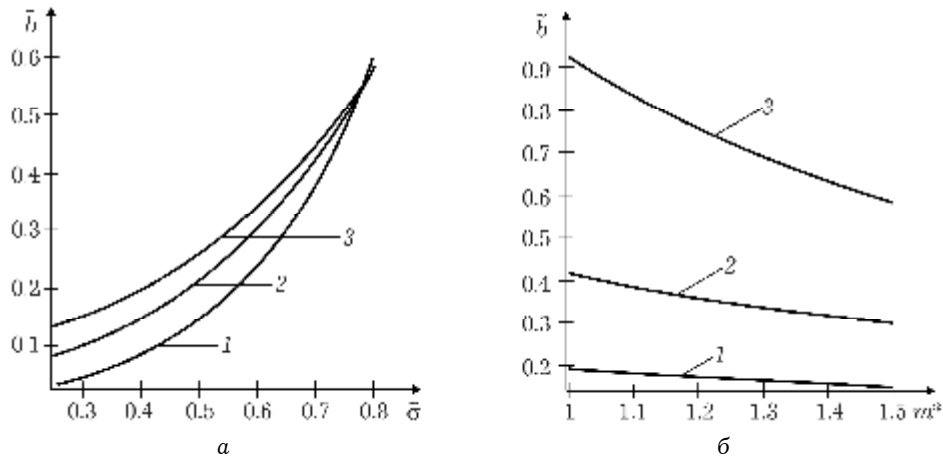


Рис. 2. Залежність зведеної довжини пластичної  $\xi = \Delta/l$  зони від параметрів  $\xi = 3M_y^\infty/2h^2\sigma_Y$  за різних значень  $\eta = Q/\sigma_Y$  (а) та від  $m^*$  за різних значень  $\xi$  (б).

Рис. 2а побудований при  $m^* = 1.5$ , причому кривій 1 відповідає  $\xi = 0$ , кривій 2 –  $\xi = 0.05$ , кривій 3 –  $\xi = 0.1$ , а рис. 2б – при  $\xi = 0.1$ , де кривій 1 відповідає  $\xi = 0.4$ , кривій 2 –  $\xi = 0.6$  кривій 3 –  $\xi = 0.8$ .

Як бачимо, зі зростанням параметра  $\xi$  довжина пластичної зони збільшується незалежно від  $\eta$ , а за фіксованого  $\xi$  зі зростанням  $\eta$  довжина пластичної зони також зростає.

Виявили (рис. 2б), що зі зростанням параметра зміцнення  $m^*$  довжина пластичної зони зменшується за фіксованого  $\mathcal{K}$ , а за фіксованого  $m^*$  зі збільшенням  $\mathcal{K}$  довжина пластичної зони зростає.

Зауважимо, що під час визначення довжини пластичної зони спостережали, що параметр  $N > 0$ .

1. *Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. *Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения. (Обзор) // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.
3. *Каминский А. А., Галатенко Г. В.* Исследование роста усталостных трещин в материале с упрочнением / Прикладная механика. – 1984. – 20, № 4. – С. 54–60.
4. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛЮМ, 2003. – 320 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
6. *Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р., Слободян М. С.* Знаходження довжини пластичних зон біля вершини наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. – 2012. – Вип. 136. – С. 294–300.
7. *Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р.* Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин // Прикл. проблеми механіки і математики – 2006. – Вип. 4 – С. 101–108.
8. *Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р., Слободян М. С.* Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та ненаскрізною тріщиною в ній з урахуванням пластичних зон біля її вершин // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 72. – С. 29–45.
9. *Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р., Слободян М. С.* Двовісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2009. – 52, № 1. – С. 115–121.
10. *Панасюк В. В.* Механіка квазіхрупкого розрушення матеріалів. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
11. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – № 1 С. 49–68.
12. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во БГУ, 1975. – 256 с.
13. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, – 1976. – 444 с.
14. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.

#### КОМБИНИРОВАННЫЙ ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СКВОЗНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН В ЕЕ ВЕРШИНАХ С УЧЕТОМ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ И ЛИНЕЙНОГО УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

С использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов исследована задача о совместном действии изгиба и растяжения изотропной пластинки, которая содержит сквозную прямолинейную трещину, берега которой контактируют по линии на верхнем основании пластинки, а в ее вершинах присутствуют пластические зоны с учетом линейного упрочнения материала. Решение сформулированной задачи сведено к задачам линейного сопряжения, на основании которых получено аналитическое решение задачи в классе функций, ограниченных в вершинах пластических зон. Численно

определена длина пластической зоны в вершине трещины при разных силовых и механических параметрах задачи.

**COMBINATION OF BENDING AND STRAIN OF THE PLATE WITH A THROUGH LINEAR CRACK IN THE PRESENCE PLASTIC ZONES IN ITS TOPS WITH REGARD FOR THE CONTACT OF ITS EDGES AND LINEAR STRENGTHENING OF THE MATERIAL**

*Using methods of the theory of complex variable the problem of compatible action bending and strain of the plate is investigated, with contain the throughout linear crack, the edges of plate are contact along the line on the top basis of the plate and in its tops contain the plastic zones with regard for linear strenthening of the material. The solution of a problem is reduced to a problem of linear conjugation. We obtained a solution of the problem in the class of functions bounded at the tips of the plastic zones. We performed a numerical analysis of the problem and construct graphs of dependences of the lengths of plastic zones at different power and mechanical parameters of problem.*

<sup>1</sup>Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

<sup>2</sup>Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано  
08.10.17