

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БЕЗМЕЖНОГО ЦИЛІНДРА ЗА ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ЗАКРУТУ РОЗПОДІЛЕНИМ ПО БІЧНІЙ ПОВЕРХНІ НАВАНТАЖЕННЯМ

Запропонована фізично коректна математична модель симетричного та антисиметричного закруту циліндра поверхневим навантаженням за існування поверхневого межового шару.

Вступ. Класична математична модель осесиметричного скручування круглих циліндрів поверхневим навантаженням побудована [1] на основі системи рівнянь рівноваги в напруженнях та умов сумісності деформацій у напруженнях Бельтрамі–Мічела. Проте, як відомо, задача теорії пружності в напруженнях некоректна, оскільки існує невідповідність між кількістю невідомих і рівнянь, з одного боку, та кількістю рівнянь і крайових умов – з іншого.

Нижче для побудови математичної моделі осесиметричного скручування циліндра поверхневим навантаженням за відсутності дилатації використані рівняння рівноваги у переміщеннях (рівняння Ляме) і зведені до одного рівняння в частинних похідних відносно двох не рівних нулю компонент вектора локального жорсткого повороту $\mathbf{\Omega} = 0,5 \operatorname{rot} \mathbf{u}$, які визначає одна компонента вектора пружного переміщення \mathbf{u} .

Загальні співвідношення. Пружний ізотропний циліндр з радіусом твірної R віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$. За умови незмінюваності об'єму $\theta(\alpha, \beta, \gamma) = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, за відсутності дилатації компоненти вектора пружного переміщення $R\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ в циліндричній системі координат будуть такі:

$$u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad u_\gamma(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad u_\beta = u_\beta(\alpha, \gamma).$$

Тоді рівняння Ляме

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$$

зведемо до одного диференціального рівняння в частинних похідних

$$\partial_\gamma \omega_\alpha - \partial_\alpha \omega_\gamma = 0 \tag{1}$$

відносно компонент $\omega_\alpha(\alpha, \gamma)$ і $\omega_\gamma(\alpha, \gamma)$ вектора $\mathbf{\Omega}$, які визначаються компонентою $u_\beta(\alpha, \gamma)$ вектора \mathbf{u} і у циліндричній системі:

$$2\omega_\alpha(\alpha, \gamma) = -\partial_\gamma u_\beta, \quad 2\omega_\gamma(\alpha, \gamma) = \alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha u_\beta), \quad 2\omega_\beta(\alpha, \gamma) = 0. \tag{2}$$

Якщо ввести ключову функцію $Q(\alpha, \gamma)$ таку, що $u_\beta(\alpha, \gamma) = \partial_\alpha Q$, то відповідно до подань (2) рівняння (1) набуде вигляду

$$\partial_\alpha \left[\alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha Q) + \partial_\gamma^2 Q \right] = 0.$$

Для його виконання досить прийняти, що функція $Q(\alpha, \gamma)$ є розв'язком рівняння Лапласа

$$\alpha^{-1} \partial_\alpha (\alpha \partial_\alpha Q) + \partial_\gamma^2 Q = 0 \tag{3}$$

в області $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq |\gamma| < \infty$. За відомою функцією $Q(\alpha, \gamma)$ та законом Гука віднайдемо ненульові компоненти тензора напружень

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) = \mu \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right), \quad \sigma_{\beta\gamma} = \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha \partial \gamma},$$

де $\mu = E/2(1+\nu)$ – модуль зсуву. Розв’язок рівняння (3) у заданій області подамо інтегралом Фур’є

$$Q(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty A(\xi) I_0(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi + \int_0^\infty B(\xi) I_0(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi.$$

Тоді компонента

$$u_\beta(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \xi A(\xi) I_1(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi + \int_0^\infty \xi B(\xi) I_1(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi, \quad (4)$$

де $I_k(\xi\alpha)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду порядку k ; $A(\xi)$ і $B(\xi)$ – довільні функції, які забезпечують існування компоненти $u_\beta(\alpha, \gamma)$ в класі функцій C^1 аж до межі циліндра $\alpha = 1$.

За відомою компонентою $u_\beta(\alpha, \gamma)$ можна віднайти усі характеристики напружено-деформованого стану в циліндрі. Зокрема, за формулами (2)

$$\begin{aligned} 2\omega_\alpha(\alpha, \gamma) &= \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) I_1(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi - \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) I_1(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi, \\ 2\omega_\gamma(\alpha, \gamma) &= \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) I_0(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi + \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) I_0(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

а за законом Гука компоненти тензора напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma) &= -\mu \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) I_1(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi + \mu \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) I_1(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi, \\ \sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) &= \mu \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) I_2(\xi\alpha) \cos \xi\gamma d\xi + \mu \int_0^\infty \xi^2 B(\xi) I_2(\xi\alpha) \sin \xi\gamma d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Отже, за закруту циліндра поверхневим навантаженням без дилатації його напружений стан визначають тільки дотичні напруження.

Формулювання симетричної крайової задачі та її розв’язок. Для знаходження невідомих функцій $A(\xi)$ і $B(\xi)$, які поданнями (4)–(6) визначають напружено-деформований стан у циліндрі, необхідно сформулювати певну крайову задачу. Розглянемо спочатку задачу, коли під дією навантаження циліндр із зацемленими на безмежності торцями закручується на певний кут, в результаті чого виникає поле поворотів $\omega_\gamma(\alpha, \gamma)$, розподіл якого на поверхні $\alpha = 1$ циліндра є симетричний відносно площини $\gamma = 0$. При цьому одержимо таку крайову умову і умову на безмежності:

$$2\omega_\gamma(1, \gamma) = \Omega_0 f(\gamma^2) \quad (0 \leq |\gamma| < \infty), \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} f(\gamma^2) = 0. \quad (7)$$

Оскільки основною вимогою коректного розв’язку крайової задачі математичної фізики є його неперервна залежність від крайових умов, то відповідно до подання (5) ця вимога буде виконана, якщо $B(\xi) = 0$ і

$$\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) I_0(\xi) \cos \xi\gamma d\xi = \Omega_0 f(\gamma^2) \quad (0 \leq |\gamma| < \infty), \quad (8)$$

тобто для визначення функції $A(\xi)$ необхідно розв’язати інтегральне рівняння першого роду.

Функцію $A(\xi) \in [0, \infty)$ подамо рядом за парними поліномами Ерміта, які

утворюють повну і ортогональну систему функцій на проміжку $0 \leq |\xi| < \infty$. При цьому матимемо:

$$\xi^2 A(\xi) I_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-p\xi^2} H_{2n}(q\xi) \quad (p > 0, \quad q > \sqrt{p}), \quad (9)$$

де a_n – не визначені коефіцієнти.

Якщо ряд (9) підставити в інтегральне рівняння (8) і обчислити інтеграл, то одержимо знову такий ряд за поліномами Ерміта:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(1 - \frac{q^2}{p}\right)^n e^{-\gamma^2/4p} H_{2n}(\lambda\gamma) = 2\Omega_0 f(\gamma^2) \quad 0 \leq |\gamma| < \infty, \quad (10)$$

де параметр $\lambda = q/2\sqrt{p}\sqrt{q^2 - p}$ і $H_{2n}(-\lambda\gamma) = H_{2n}(\lambda\gamma)$. Обидві частини рівності (10) помножимо $e^{-\sigma\gamma^2} H_{2m}(\lambda\gamma)$ та проінтегруємо в межах $(-\infty, +\infty)$ і внаслідок ортогональності поліномів Ерміта одержимо:

$$a_n = \frac{2\Omega_0 (-1)^n p^n q}{\pi (q^2 - p)^{n+1/2} 2^{2n} (2n)!} \int_0^{\infty} f(\gamma^2) e^{-\sigma\gamma^2} H_{2n}(\lambda\gamma) d\gamma, \quad (11)$$

де параметр $\sigma = [4(q^2 - p)]^{-1} > 0$. За відомими коефіцієнтами a_n і поданням (9) визначимо функцію $A(\xi)$, що дає можливість за формулами (4)–(6) віднайти напружено-деформований стан у циліндрі, який згідно з виразом (11) для коефіцієнтів a_n залежатиме від параметрів p і q .

Приклад симетричного закруту. Як приклад застосування наведених вище результатів розглянемо частковий випадок, коли

$$2\omega_\gamma(1, \gamma) = \frac{\Omega_0}{2\pi\sqrt{\pi p}} e^{-\gamma^2/4p}, \quad (12)$$

де величина $\Omega_0 = \text{const}$ – інтенсивність вектора $\mathbf{\Omega} = 0,5 \text{ rot } \mathbf{u}$, тобто

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\gamma(1, \gamma) d\gamma = \frac{\Omega_0}{\sqrt{\pi p}} \int_0^{\infty} e^{-\gamma^2/4p} d\gamma = \Omega_0, \quad (13)$$

і дамо його механічне трактування. Зазначимо, що за означенням (12) при $p = 0$ компонента $\omega_\gamma(1, \gamma) = 0$, крім точки $\gamma = 0$, де вона має особливість типу $p^{-1/2}$. Отже, параметр $p > 0$ ставу інтенсивність Ω_0 вектора $\mathbf{\Omega} = 0,5 \text{ rot } \mathbf{u}$ трансформує у певний закон розподілу цієї характеристики на поверхні циліндра. Тому слід згадати виявлену раніше [2] на межі тіла матеріальну поверхню (наноплівку) з певними реологічними властивостями, яка формується в результаті реставрації поверхні. Отже, відповідно до подання (13) параметр $p > 0$ може слугувати зведеною механічною характеристикою такого поверхневого шару.

За крайової умови (12) після обчислення інтеграла (11)

$$a_0 = \frac{\Omega_0}{\pi^2}, \quad a_n = 0, \quad n \in N$$

і не залежить від параметра $p > 0$. Тоді, оскільки $H_0(q\xi) = 1$, за формулою (9) визначимо:

$$\xi^2 A(\xi) = \frac{\Omega_0}{\pi^2} \frac{e^{-p\xi^2}}{I_0(\xi)}. \quad (14)$$

Якщо вираз функції $A(\xi)$ (14) підставити у подання (4)–(6), то для характеристик напружено-деформованого стану знайдемо:

$$u_{\beta}(\alpha, \gamma) = \frac{\Omega_0}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-p\xi^2} \frac{I_1(\xi\alpha)}{\xi I_0(\xi)} \cos \xi\gamma d\xi; \quad (15)$$

$$2\omega_{\alpha}(\alpha, \gamma) = \frac{\Omega_0}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-p\xi^2} \frac{I_1(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \sin \xi\gamma d\xi,$$

$$2\omega_{\gamma}(\alpha, \gamma) = \frac{\Omega_0}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-p\xi^2} \frac{I_0(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \cos \xi\gamma d\xi; \quad (16)$$

$$\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma) = -\frac{\Omega_0\mu}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-p\xi^2} \frac{I_1(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \sin \xi\gamma d\xi,$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) = \frac{\Omega_0\mu}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-p\xi^2} \frac{I_2(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \cos \xi\gamma d\xi. \quad (17)$$

Отже, відповідно до виразів (15)–(17) можна стверджувати, що вектор Ω сталої напруженості Ω_0 трансформується у певний розподіл характеристик напруженого стану, котрий детермінований параметром $p > 0$. Причому, за крайової умови (12) напружений стан в циліндрі визначатимуть симетрично розподілені відносно площини $\gamma = 0$ фізичні напруження $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma)$, які на поверхні $\alpha = 1$ досягають максимальних значень.

Зауважимо, що інтеграли у виразах (15)–(17) за умови $p > 0$ існують і є обмеженими на поверхні циліндра $\alpha = 1$, чим забезпечується виконання основної вимоги [3] коректного розв'язку крайової задачі – його неперервної залежності від крайових умов.

Формулювання антисиметричної задачі та її розв'язок. Розглянемо тепер задачу, коли циліндр із защемленими на безмежності торцями закручується відносно площини $\gamma = 0$ у протилежні сторони. Тоді одержимо крайову задачу з умовою

$$2\omega_{\gamma}(1, \gamma) = \Omega_0\gamma f(\gamma^2) \quad (0 \leq |\gamma| < \infty), \quad \lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} f(\gamma^2) = 0. \quad (18)$$

У цьому випадку у поданні (5) функція $A(\xi) = 0$, а для визначення функції $B(\xi)$ маємо інтегральне рівняння першого роду

$$\int_0^{\infty} \xi^2 B(\xi) I_0(\xi) \sin \xi\gamma d\xi = \Omega_0\gamma f(\gamma^2) \quad (0 \leq |\gamma| < \infty). \quad (19)$$

Функцію $B(\xi)$ подамо рядом за непарними поліномами Ерміта

$$\xi^2 B(\xi) I_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-p\xi^2} H_{2n+1}(q\xi) \quad (p > 0, \quad q > \sqrt{p}) \quad (20)$$

з невизначеними коефіцієнтами a_n .

Якщо ряд (20) підставити в інтегральне рівняння (19) і обчислити інтеграл, то знову таки одержимо ряд за поліномами Ерміта із заданою правою частиною:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{n+1}} (q^2 - p)^{n+1/2} e^{-\gamma^2/4p} H_{2n+1}(\lambda\gamma) = \Omega_0\gamma f(\gamma^2) \quad 0 \leq |\gamma| < \infty, \quad (21)$$

де $\lambda = q / 2\sqrt{p}\sqrt{q^2 - p}$ і $H_{2n+1}(-\lambda\gamma) = -H_{2n+1}(\lambda\gamma)$.

Обидві частини рівності (21) помножимо на $e^{-\sigma\gamma^2} H_{2n+1}(\lambda\gamma)$ та проінтегруємо в межах $(-\infty, +\infty)$. Внаслідок ортогональності поліномів Ерміта

$$a_n = \frac{\Omega_0 (-1)^n p^{n+1/2} q}{\pi (q^2 - p)^{n+1} 2^{2n} (2n+1)!} \int_0^\infty e^{-\sigma\gamma^2} \gamma f(\gamma^2) H_{2n+1}(\lambda\gamma) d\gamma, \quad (22)$$

де $\sigma = [4(q^2 - p)]^{-1}$. За відомими коефіцієнтами a_n і поданнями (20) визначимо функцію $B(\xi)$, а відтак за формулами (4)–(6) – напружено-деформований стан у циліндрі, який відповідно до виразу (22) для коефіцієнтів a_n залежатиме від параметрів $p \geq 0$ і $q > \sqrt{p}$.

Приклад антисиметричного закруту. Розглянемо випадок, коли $f(\gamma^2) = e^{-\gamma^2/4p}$. Тоді за формулою (22)

$$a_0 = \frac{2\Omega_0 p \sqrt{p}}{\sqrt{\pi} q}, \quad a_n \equiv 0, \quad \forall n \in N$$

і функція $B(\xi)$ згідно з поданням (20) набуде вигляду

$$\xi B(\xi) I_0(\xi) = \frac{4\Omega_0 p \sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} e^{-p\xi^2}, \quad (23)$$

де враховано, що $H_1(q\xi) = 2q\xi$. Тепер за відомою функцією (23) $B(\xi)$ і поданнями (4)–(6) віднайдемо усі характеристики напружено-деформованого стану:

$$u_\beta(\alpha, \gamma) = \frac{4\Omega_0 p \sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} \frac{I_1(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \sin \xi\gamma d\xi; \quad (24)$$

$$2\omega_\alpha(\alpha, \gamma) = -\frac{4\Omega_0 p \sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} \frac{I_1(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \xi \cos \xi\gamma d\xi,$$

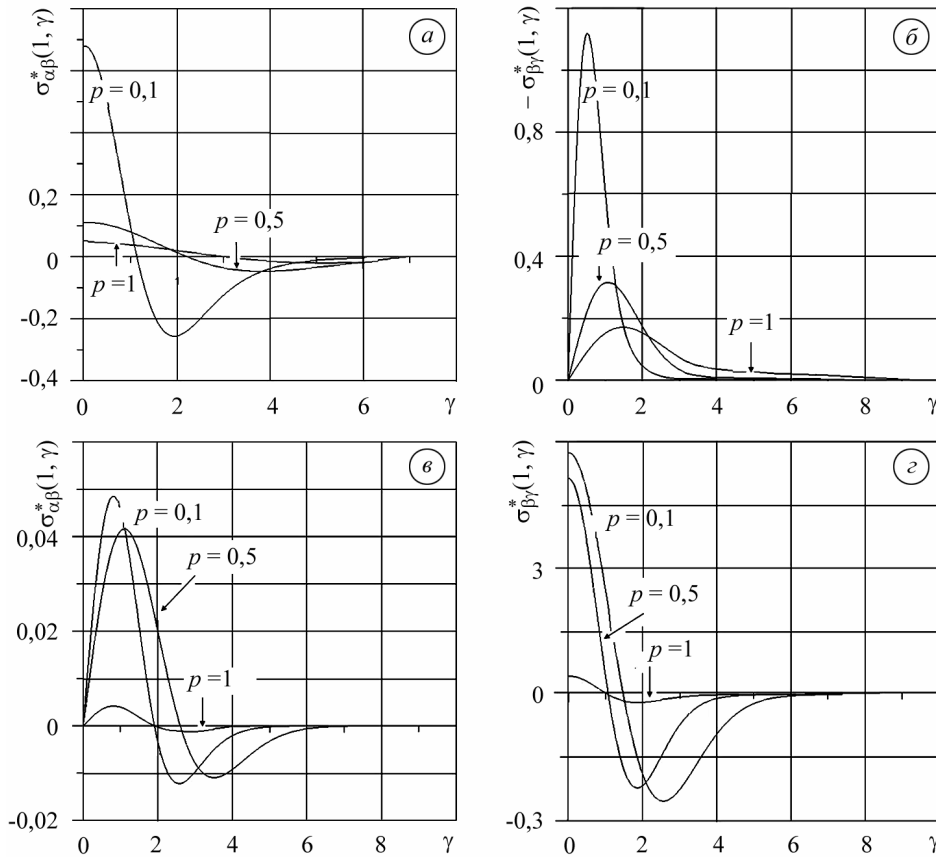
$$2\omega_\gamma(\alpha, \gamma) = \frac{4\Omega_0 p \sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} \frac{I_0(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \xi \sin \xi\gamma d\xi;$$

$$\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma) = \frac{4\Omega_0 p \sqrt{p}}{\mu \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} \frac{I_1(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \xi \cos \xi\gamma d\xi, \quad (25)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) = \frac{4\Omega_0 \mu p \sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-p\xi^2} \frac{I_2(\xi\alpha)}{I_0(\xi)} \xi \sin \xi\gamma d\xi. \quad (26)$$

Отже, відповідно до подань (21)–(26) напружено-деформований стан залежить від параметра $p > 0$. Причому, за крайової умови (18) напружений стан у циліндрі визначатимуть симетрично розподілені відносно площини $\gamma = 0$ зрізальні напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma)$, які у площині $\gamma = 0$ досягають максимального значення.

Числовий аналіз напруженого стану за симетричного закруту. Числовий аналіз дотичних напружень $\sigma_{\alpha\beta}^*(\alpha, \gamma) = \sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) \pi^2 / \mu \Omega_0$ і зрізальних дотичних напружень $\sigma_{\beta\gamma}^*(\alpha, \gamma) = \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \beta) \pi^2 / \mu \Omega_0$ виконано за формулами (17) на поверхні циліндра $\alpha = 1$ відносно площини $\gamma = 0$ залежно від параметра $p > 0$.



На рис. (графік *a*) подано розподіл поверхневого дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}^*(1, \gamma)$ вздовж осі $\gamma > 0$ для різних значень параметра p . Аналіз числових розрахунків вказує на те, що цей параметр визначає ступінь локалізації напружень та їх максимальні значення. При цьому поверхневе дотичне напруження $\sigma_{\alpha\beta}^*(1, \gamma)$ має один максимум у площині $\gamma = 0$ і два максимуми протилежного знаку справа і зліва площини $\gamma = 0$, що забезпечує рівновагу циліндра.

Графік *б* ілюструє розподіл зрізального дотичного напруження $\sigma_{\beta\gamma}^*(1, \gamma)$ вздовж осі $\gamma > 0$. Це напруження має один максимум, який визначається параметром p і лежить в області зміни знаку поверхневого дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}^*(1, \gamma)$. Зазначимо, що у теорії закруту Сен-Венана дотичні напруження $\sigma_{\alpha\beta}^*(1, \gamma)$ вважають рівними нулю.

Числовий аналіз напруженого стану за антисиметричного закруту. Числовий аналіз дотичних напружень $\sigma_{\alpha\beta}^*(\alpha, \gamma) = \sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma)/4\mu\Omega_0$ і зрізуючих напружень $\sigma_{\beta\gamma}^*(\alpha, \gamma) = \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma)/4\mu\Omega_0$ виконано за формулами (26) на поверхні циліндра $\alpha = 1$ відносно площини $\gamma = 0$.

На графіку *в* зображено розподіл поверхневого дотичного напруження $\sigma_{\alpha\beta}^*(1, \gamma)$ вздовж осі $\gamma > 0$ для різних значень параметра p . Це напруження має максимуми із зміною знаку, але вони зміщені вправо і вліво відносно площини $\gamma = 0$.

Графік z ілюструє зрізальне напруження наведено графік розподілу зрізуючого напруження $\sigma_{\alpha\gamma}^*(1, \gamma)$, яке має один максимум у площині $\gamma = 0$ і два максимума протилежного знаку зліва і справа від площини $\gamma = 0$. При цьому максимальне значення поверхневого напруження $\sigma_{\alpha\beta}^*(1, \gamma)$ знаходиться в області зміни знаку зрізальні напруження $\sigma_{\beta\gamma}^*(1, \gamma)$.

Висновки. Вперше запропоновано фізично коректну математичну модель закруту циліндра поверхневим навантаженням, яка враховує можливість існування поверхневого межового шару з певними механічними властивостями, окресленими параметром $p > 0$. Доведено, що рівень дотичних напружень і їх локалізація на поверхні циліндра визначає параметр $p > 0$, який можна трактувати як зведену механічну характеристику поверхневого межового шару. З'ясовано, що рівень поверхневих дотичних напружень $\sigma_{\alpha\beta}(1, \gamma)$ які в теорії закруту Сен-Венана приймаються рівними нулю, зіставний із зрізальними напруженнями $\sigma_{\beta\gamma}(1, \gamma)$.

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматиз, 1963. – 686 с.
2. Наумовец А. Г. Использование поверхностных фазовых переходов для управления свойствами поверхности // Прогресивні матеріали і технології. – К., 2003. – Т. 2. – С. 319–350.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Изд-во Мир, 1964. – 230 с.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КРУЧЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВДОЛЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАГРУЖЕНИЕМ

Предложена физически корректная математическая модель симметричного и антисимметричного скручивания цилиндра поверхностным нагружением при наличии поверхностного граничного слоя.

INFINITE CYLINDER STRESSEDLY-DEFORMED STATE IN THE CONDITION OF AXISYMMETRICAL TORSION ACHIEVED BY THE HELP OF LATERAL SURFACE LOADING

Physically correct mathematical model of a symmetric and skew-symmetric torsion by surface load in a condition of surface boundary layer is solved.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
11.11.10