

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ТЕРМОНАПРУЖЕННЯ У РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРІ ЗА КУСКОВО-ЗМІННОЇ ТЕМПЕРАТУРИ НА БІЧНІЙ ПОВЕРХНІ

Досліджено осесиметричний напружений стан довгого суцільного циліндра, теплофізичні та термопружні характеристики якого є довільними функціями радіальної координати, за розподілу температури, заданого на бічній поверхні кусково-змінною функцією. Для знаходження температурного поля у циліндрі застосовано методику зведення стаціонарного рівняння теплопровідності з довільно змінним коефіцієнтом теплопровідності до інтегрального рівняння другого роду. Відповідні температурні напруження знайдено у явному вигляді з використанням методу безпосереднього інтегрування. Досліджено вплив гладкості та розривності заданої на бічній поверхні крайової умови на розподіли полів температури та термонапружень.

Вступ. Ефективні методи аналізу термомеханічної поведінки елементів конструкцій, виготовлених з неоднорідних, зокрема функційно-градієнтних, матеріалів – один з домінуючих напрямків механіки деформівного твердого тіла [1, 7, 9, 12]. Особливу увагу вчених привертають тіла обертання, зокрема суцільні та порожнисті циліндри [17, 18]. З одного боку, такі тіла часто застосовують у техніці та промисловості, а з іншого – властивість симетрії, притаманна їх формі, дає можливість знизити розмірність відповідних задач механіки для спрощення розробки та верифікації аналітичних та числових методів вивчення їх механічної поведінки [6]. Переважна більшість досліджень пружної поведінки радіально-неоднорідних циліндричних тіл ґрунтується на використанні гіпотез про плоский напружений чи деформований стани [14]. Випадок, коли напружений стан змінний за осьовою координатою, вивчено гірше, що пояснюють [5, 16] складнішою порівняно з плоскою задачею системою ключових рівнянь [15]. Одним із прикладів таких задач є ситуація, коли зовнішнє силове чи теплове навантаження бічної поверхні має різкий перепад за певного значення осьової змінної, що моделюють кусково-змінною (розривною) функцією. Таке навантаження типове, зокрема, для підгонки обтисненням (shrink-fit problems), коли досліджуване циліндричне тіло втискують у круговий отвір (дещо меншого внутрішнього діаметра) нагрітого порожнистого тіла або обтискують по периферії затискною муфтою чи бандажем. Огляд розв'язків такого класу задач для однорідних циліндрів наведено у працях [8, 13].

Тут розвинуто методику побудови точних аналітичних розв'язків осесиметричних задач термопружності для довгого суцільного радіально-неоднорідного циліндра за кусково-змінною вздовж твірної температурною навантаженням бічної поверхні. Оскільки увагу зосереджували на впливі теплових чинників, термомеханічні властивості (коефіцієнти теплопровідності та лінійного температурного розширення) циліндра прийняли довільними функціями радіальної координати, а решту характеристик матеріалу (модуль пружності та коефіцієнт Пуассона) – сталими. Використовуючи метод безпосереднього інтегрування [15, 16], для визначення температурного поля отримали інтегральне рівняння другого роду, яке розв'язували за допомогою числових (наприклад, методу квадратур), аналітико-числових (методом послідовних наближень) та аналітичних (методом резольвентного ядра) методів [3]. Розраховували відповідні температурні напруження, розв'язуючи систему ключових рівнянь суцільності, до яких звели задачу відомим методом [5, 16]. Отриманий розв'язок має вигляд явної функціональної залежності від теплових чинників і придатний як для безпосереднього обчислення напруженого стану в радіально-неоднорідних циліндрах, так і для верифікації числових та аналітично-числових методів розв'язування цієї чи ана-

логічних задач. Напружений стан розраховували для заданого на бічній поверхні циліндра кусково-сталого (розривного), негладкого (неперервного) та гладкого розподілів температури.

Формулювання задачі. За відсутності масових сил та зовнішніх навантажень осесиметричну пружну рівновагу довгого суцільного циліндра $\rho \leq 1$ описують [6] рівняння рівноваги

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sigma_r) + \rho \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \sigma_\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sigma_{rz}) + \rho \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

та суцільності [15, 16]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_z) + \alpha(\rho)ET) + (1 + \nu)(\sigma_\varphi - \sigma_r) &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_z) + \alpha(\rho)ET) - 2(1 + \nu) \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} & \\ + \frac{\partial}{\partial \rho}(\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_z) + \alpha(\rho)ET) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

у напруженнях за однорідних крайових умов

$$\sigma_r(1, z) = \sigma_{rz}(1, z) = 0 \quad (3)$$

на бічній поверхні $\rho = 1$. Тут $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ і σ_{rz} – відповідно нормальні та дотична складові тензора напружень, які є функціями безрозмірної радіальної $\rho = r/R$ та осьової $z = \zeta/R$ координат; r та ζ – радіальна та осьова координати; R – радіус циліндра; $\alpha = \alpha(\rho)$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення; ν і E – коефіцієнт Пуассона і модуль пружності, які взято сталими. Нерівномірний розподіл напружень у циліндрі спричинений температурним полем T , яке визначають з рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \lambda(\rho) \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \lambda(\rho) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

за нагріву межі

$$T(1, z) = \begin{cases} T_0(z), & |z| \leq h, \\ 0, & |z| > h \end{cases} \quad (5)$$

та за умови обмеженості температури на осі циліндра

$$|T(0, z)| < \infty. \quad (6)$$

Тут $\lambda(\rho)$ – залежний від радіальної координати коефіцієнт теплопровідності ($\lambda(\rho) \neq 0, 0 \leq \rho < 1$); $T_0(z)$ – задана функція; h – безрозмірний сталий параметр. Зауважимо, що крайова умова (5) охоплює випадок, коли температура на бічній поверхні розривна, якщо $z = \pm h$.

Побудова розв'язку температурної задачі. Для побудови розв'язку задачі теплопровідності (4)–(6) скористаємось інтегральним перетворенням Фур'є [2] за осьовою змінною:

$$\bar{f}(\rho) \equiv \overline{f(\rho; s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, z) \exp(-isz) dz, \quad (7)$$

де s – параметр перетворення; $i^2 = -1$. У просторі перетворення задача (4)–(6) має вигляд

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} \right) \frac{d\bar{T}}{d\rho} - s^2 \bar{T} = 0, \quad (8)$$

$$|\bar{T}(0)| < \infty, \quad \bar{T}(1) = \bar{t}_0, \quad \bar{t}_0 = \int_{-h}^h T_0(z) \exp(-isz) dz. \quad (9)$$

Якщо $T_0 = \text{const}$, легко визначити $\bar{t}_0 = -is^{-1} \text{sh}(ish)$.

Після перенесення виразу з $\lambda(\rho)$ у праву частину рівняння (8), його розв'язок для лівої частини, який задовольняє умови (9), знайдемо у вигляді

$$\bar{T} = \bar{t}_0 \frac{I_0(sp)}{I_0(s)} + \int_0^1 \bar{T}(\eta) \mathbf{K}(\rho, \eta) d\eta, \quad (10)$$

де $\mathbf{K}(\rho, \eta) = \mathbf{K}(\rho, \eta) - \frac{I_0(sp)}{I_0(s)} \mathbf{K}(1, \eta)$;

$$\mathbf{K}(\rho, \eta) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d \ln(\lambda(\eta))}{d\eta} \chi_{00}(\rho, \eta) \right) \text{sgn}(\rho - \eta);$$

$$\chi_{lm}(\rho, \eta) = I_l(sp) K_m(s\eta) - (-1)^{l+m} K_l(sp) I_m(s\eta);$$

$I_m(sp)$ та $K_m(sp)$ – функції Бесселя порядку m першого та другого роду.

Для побудови розв'язку інтегрального рівняння (10) розвинуті числові, аналітико-числові та аналітичні методики [3]. Числовий розв'язок будують, наприклад, замінюючи інтеграл у рівнянні (10) на квадратурний аналог [10, 11], розбивши діапазон інтегрування $[0, 1]$ на відповідну кількість проміжків. Записавши квадратурний аналог (10) у вузлах розбиття, отримують систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення температури у вузлових точках.

Числово-аналітичний розв'язок рівняння (10) одержують методом послідовних наближень [4], взявши за початкове наближення його вільний член.

Для побудови аналітичного розв'язку застосовують метод резольвентного ядра [15]. За такого підходу температурне поле знайдемо у вигляді

$$\bar{T} = \bar{t}_0 \psi(\rho), \quad (11)$$

де $\psi(\rho) = \frac{I_0(sp)}{I_0(s)} + \int_0^1 \frac{I_0(s\eta)}{I_0(s)} \mathfrak{X}(\rho, \eta) d\eta$, а резольвенту визначимо як суму

$$\mathfrak{X}(\rho, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{R}_{n+1}(\rho, \eta)$$

повторних інтегральних ядер

$$\mathbf{R}_{n+1}(\rho, \eta) = \int_0^1 \mathbf{R}_1(\rho, r) \mathbf{R}_n(r, \eta) dr, \quad \mathbf{R}_1(\rho, \eta) = \mathbf{K}(\rho, \eta).$$

Знайшовши розв'язок рівняння (10), температуру у фізичній області відшукаємо за допомогою оберненого перетворення Фур'є [2]:

$$f(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{T}(\rho) \exp(isz) ds. \quad (12)$$

Для визначення термонапружень, які відповідають температурному полю (11) та є розв'язками задачі (1)–(3) у просторі перетворення (7), застосуємо метод безпосереднього інтегрування [5, 16]. Побудований так розв'язок має вигляд

$$\bar{\sigma}_r(\rho) = \frac{sE}{\rho(1-\nu)} \left(sp t_{00}(\rho) - t_{10}(\rho) + (\mu(\rho) + 2s(1-\nu)\vartheta_1(\rho) - s^3\rho\vartheta_2(\rho)) \frac{t_{10}(1)}{\mu(1)} + \right. \\ \left. + (s^3(1-\rho^2)I_1(s)I_1(sp) - s^2\vartheta_1(\rho) - s\mu(\rho)) \frac{t_{00}(1)}{\mu(1)} \right), \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_\varphi(\rho) = \frac{sE}{\rho(1-\nu)} \left(t_{10}(\rho) - \frac{\rho}{s} \alpha(\rho) \bar{T}(\rho) - (\mu(\rho) + 2sI_0(s)\vartheta(\rho)) \frac{t_{10}(1)}{\mu(1)} + s(s\vartheta_1(\rho) + 2I_1(s)\vartheta(\rho)) \frac{t_{00}(1)}{\mu(1)} \right), \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}_z(\rho) = \frac{E}{1-\nu} \left(s^2 (s^2\vartheta_2(\rho) + 2((1-\nu)I_1(s) - sI_0(s))I_0(sp)) \frac{t_{10}(1)}{\mu(1)} - s^2 t_{00}(\rho) - \alpha(\rho) \bar{T}(\rho) + s^3 (2I_1(s)I_0(sp) - s\vartheta_3(\rho)) \frac{t_{00}(1)}{\mu(1)} \right), \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}(\rho) = \frac{is^2E}{1-\nu} \left(t_{10}(\rho) - \frac{\mu(\rho)}{\mu(1)} t_{10}(1) + s^2\vartheta_1(\rho) \frac{t_{00}(1)}{\mu(1)} \right), \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\rho) &= I_0(s)I_1(sp) - \rho I_1(s)I_0(sp), & \vartheta_2(\rho) &= I_1(s)I_0(sp) - \rho I_0(s)I_1(sp), \\ \vartheta_3(\rho) &= I_0(s)I_0(sp) - \rho I_1(s)I_1(sp), & \vartheta(\rho) &= \nu sp I_0(sp) + (1-\nu)I_1(sp), \\ \mu(\rho) &= (s^2 + 2 - 2\nu) I_1(s)I_1(sp) - s^2\rho I_0(s)I_0(sp), \end{aligned}$$

$$t_{lm}(\rho) = \bar{t}_0 \int_0^\rho \eta \alpha(\eta) \psi(\eta) \chi_{lm}(\rho, \eta) d\eta.$$

З розв'язку (11) можна отримати вирази для термонапружень (13)–(16) у радіально-неоднорідному циліндрі, які явно визначено через задане на поверхні температурне поле (9). Відповідні вирази у фізичній області легко отримати, підставляючи (13)–(16) у формулу (12).

Числовий приклад та обговорення. З використанням розв'язків (11) для температурного поля та (13)–(16) для компонент тензора напружень розрахуємо тепловий та термонапружений стани циліндра, коефіцієнт теплопровідності якого $\lambda(\rho) = \lambda_0 (1 + \rho^2)$ за температурного навантаження (5), де

$$T_0 = T^* = \text{const}, \quad h = 1; \quad (17)$$

$$T_0 = \frac{5T^*}{(5-h^5)h} (1-z^4), \quad h = 1; \quad (18)$$

$$T_0 = \frac{T^*}{\text{Erf}(h)} \exp(-z^2), \quad h = 10. \quad (19)$$

Тут $\lambda_0 = \text{const}$; $\text{Erf}(h) = \int_0^h \exp(-z^2) dz$. Коефіцієнт теплопровідності $\lambda(\rho)$ на осі

циліндра має значення λ_0 , зростає зі збільшенням аргументу і набуває на бічній поверхні значення $2\lambda_0$. Температурне навантаження (17) має вигляд ступінчастої функції з розривом першого роду, якщо $z = \pm h$. Функція (18) задає неперервне температурне поле на бічній поверхні, яке має злам при $z = \pm h$. Теплове навантаження (19) є гладкою фінітною функцією. Зауважимо, що в усіх випадках (17)–(19) середньоінтегральна температура поверхні однакова.

Наведено розподіли температурного поля, розрахованого за формулами (11), (12), (17)–(19) поблизу межі (рис. 1а) та вздовж радіуса у центральному поперечному перерізі (рис. 1б). Біля поверхні циліндра температурне поле повторює профіль навантаження і спадає з наближенням до осі циліндра. Найшвидше спадання в центральному поперечному перерізі $z = 0$ спостерігається для гладкого навантаження (19), що пояснюють шириною зони нагріву поверхні. Найкращий прогрів осі циліндра у вказаному перерізі досягається за навантаження (18) внаслідок його локальної концентрації.

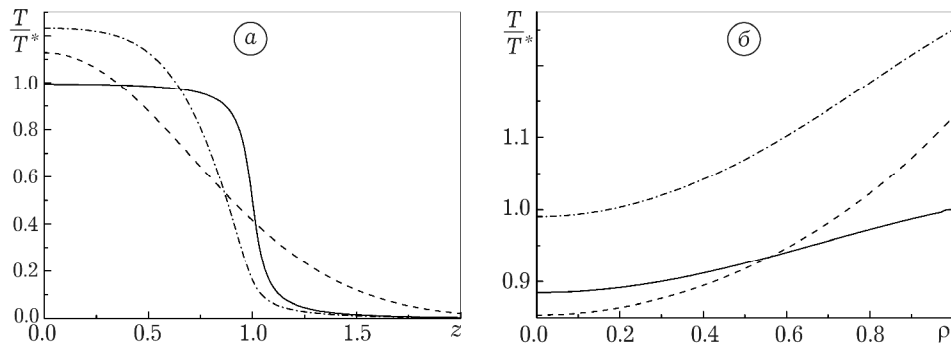


Рис. 1. Розподіли температури (11) за осовою координатою при $\rho = 0.95$ (а) та за радіальною координатою при $Z = 0$ (б), коли теплове навантаження (5) взято у вигляді (17) – суцільні лінії; (18) – штрихові; (19) – штрих-пунктирні.

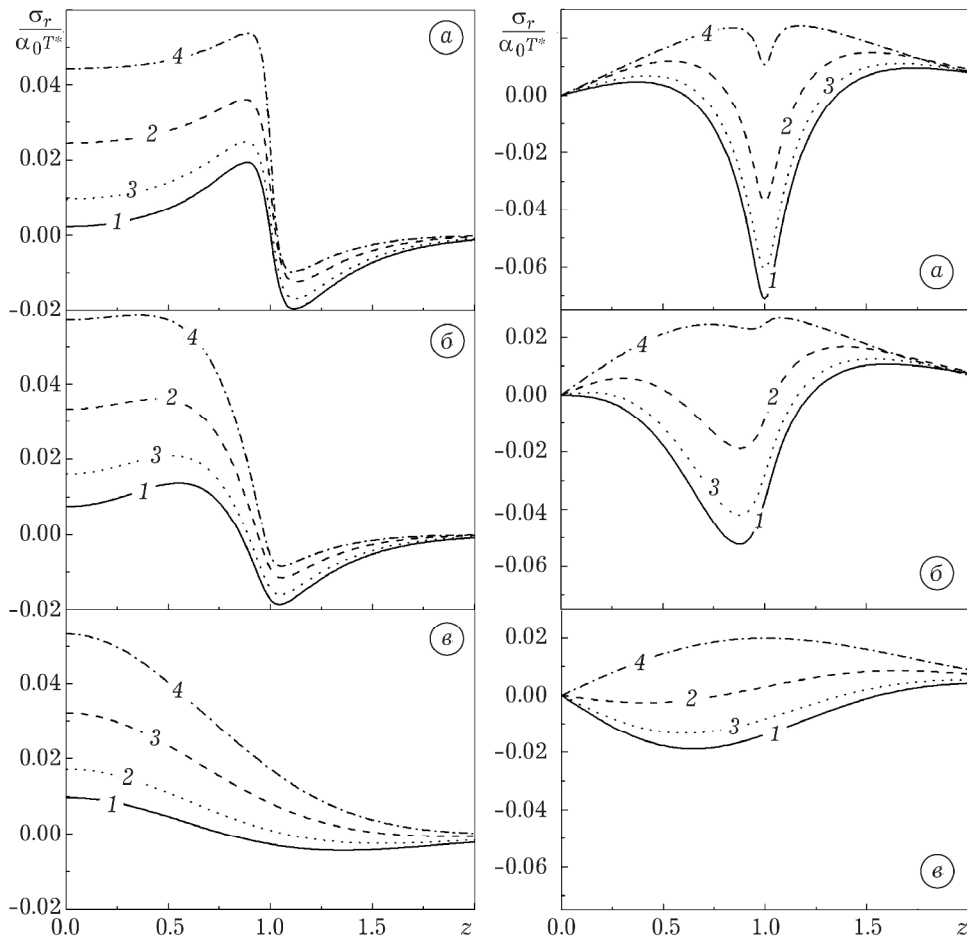


Рис. 2. Безрозмірні радіальні та дотичні напруження, розраховані для $\rho = 0.95$ за теплового навантаження (5), де T_0 взято у вигляді (17), (18) та (19) (відповідно а, б та в) при $m = 0$ (криві 1); 1 (криві 2); 1/4 (криві 3); 4 (криві 4).

За знайденим температурним полем розраховували компоненти тензора напружень для $\alpha(\rho) = \alpha_0(1 + \rho^m)$, де $\alpha_0 = \text{const}$, $m = 0; 1; 4; 1/4$. Розподіли радіальних та дотичних напружень при $\rho = 0.95$ наведено на рис. 2. Обчислені

напруження на межі задовольняють однорідні крайові умови (3). За розривного (рис. 2а) та негладкого (рис. 2б) на бічній поверхні температурного поля радіальні напруження мають різкий перепад при $z \rightarrow \pm h \pm 0$, який відсутній за гладкого навантаження (рис. 2в). При цьому за навантаження (17) з наближенням до лінії розриву радіальні напруження зростають за абсолютним значенням. Для навантаження (18) таке зростання слабше. Дотичні напруження за навантаження (17) мають локальний екстремум в околі $z = \pm h$. Отже, на термонапружений стан циліндра суттєво впливає характер залежності коефіцієнта лінійного теплового розширення від радіальної координати.

Висновки. Розвинуто методику побудови розв'язків осесиметричних задач теплопровідності та термопружності для довгого суцільного циліндра, теплофізичні та термопружні властивості якого є довільними функціями радіальної координати, за змінного вздовж твірної теплового навантаження бічної поверхні. За допомогою зведення до інтегрального рівняння і з використанням методу резольвентного ядра відповідну задачу теплопровідності розв'язано в явному вигляді. Проаналізовано тепловий та термонапружений стани циліндра за кусково-сталого, негладкого та гладкого теплового навантажень за різних залежностей коефіцієнта лінійного теплового розширення від радіальної координати. Виявлено, що з наближенням до ділянок, де спостерігаються різкі перепади температурного поля, радіальні напруження є неперервні, проте мають перепад із тенденцією до зростання.

1. Айзикович С. М., Александров В. М., Белоконь А. В., Кренев Л. И. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. – М.: Физматлит, 2006. – 240 с.
2. Брычков Ю. А., Прудников А. Л. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
3. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
4. Вігак В. М., Калиняк Б. М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – 48, № 2. – С. 60–67.
5. Вігак В., Токовий Ю., Ясінський А. Побудова розв'язків квазістатичних осесиметричних задач пружності та термопружності в напруженнях для довгого циліндра // Машинознавство. – 2004. – № 7. – С. 12–16.
6. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высш. шк., 1975. – 526 с.
7. Кушнір Р. М., Попович В. С. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 410 с.
8. Плевако В. П. Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред. – Харків: Основа, 1997. – 160 с.
9. Токовий Ю. В. Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 144–151.
10. Чиж А. І., Токовий Ю. В. Аналітично-числовий розв'язок плоскої неосесиметричної задачі термопружності в переміщеннях для радіально-неоднорідного порожнистого циліндра // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 85–91.
11. Шевчук В. А., Калиняк Б. М. Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покриттями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 35–41.
12. Elishakoff I., Pentaras D., Gentilini C. Mechanics of functionally graded material structures. – Singapore: World Sci. Pub., 2016. – 324 p.
13. Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J. Eng. Math. – 2013. – 78, № 1. – P. 143–166.

14. Tokovyy Y. V., Ma, C.-C. Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains // J. Therm. Stresses. – 2008. – 31, № 9. – P. 892–913.
15. Tokovyy Y. V., Ma, C.-C. Axisymmetric stresses in an elastic radially inhomogeneous cylinder under length-varying loadings // J. App. Mech. Trans. ASME. – 2016. – 83. – P. 111007–1–7.
16. Vihak V. M., Yasinsky A. V., Tokovyy Y. V., Rychahivskyy A. V. Exact solution of the axisymmetric thermoelasticity problem for a long cylinder subjected to varying with-respect-to-length loads // J. Mech. Behavior Mat. – 2007. – 18, № 2. – P. 141–148.
17. Wang Z. W., Zhang Q., Xia L. Z., Wu J. T., Liu P. Q. Thermomechanical analysis of pressure vessels with functionally graded material coating // J. Pres. Ves. Tech. – 2016. – 138. – P. 011205–1–10.
18. Yildirim V. Exact thermal analysis of functionally graded cylindrical and spherical vessels // Int. J. Eng. Appl. Sci. – 2017. – 9, № 2. – P. 112–126.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ В РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ КУСОЧНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследовано осесимметричное напряженное состояние длинного сплошного цилиндра, теплофизические и термоупругие характеристики которого представлены произвольными функциями радиальной координаты, при распределении температуры, заданного на боковой поверхности кусочно-переменной функцией. Для нахождения температурного поля в цилиндре применена методика сведения стационарного уравнения теплопроводности с произвольно переменным коэффициентом теплопроводности к интегральному уравнению второго рода. Соответствующие температурные напряжения найдены в явном виде с использованием метода непосредственного интегрирования. Исследовано влияние гладкости и разрывности заданного на боковой поверхности граничного условия на распределения полей температуры и термонапряжений.

AXISYMMETRIC THERMAL STRESSES IN A RADially-INHOMOGENEOUS CYLINDER SUBJECTED TO PIECEWISE-VARIABLE TEMPERATURE AT THE LATERAL SURFACE

The analysis of the axisymmetric stress state is conducted for a long solid cylinder whose thermophysical and thermoelastic properties are presented by arbitrary functions of the radial coordinate. The lateral surface of the cylinder is exposed to the temperature presented by a piecewise-variable function. For the determination of the temperature field in the cylinder, we employed the technique based upon the reduction of the stationary heat-conduction equation with an arbitrarily variable heat-conduction coefficient to an integral equation of the second kind. The corresponding thermal stresses are found in an explicit form by making use of the direct integration method. The effect of smoothness and discontinuity of the boundary condition imposed on the lateral surface is analyzed with concern to the distributions of the temperature and thermal stresses in the cylinder.