УДК 539.3: 534.1

М. В. Марчук[1], В. С. Пакош[1], О. Ф. Лесик[2]

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ДВОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ-СМУГИ З ПОДАТЛИВИМИ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСКУ КОМПОЗИТНИМИ СКЛАДНИКАМИ

Отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь відносно узагальнених переміщень, що описує вільні коливання двошарової пластини-смуги з податливими до трансверсальних зсуву та стиску композитними складниками. Для шарнірного закріплення видовжених країв нижнього складника на лицевій площині отримано аналітичний вираз для спектра власних частот і проаналізовано вплив фізико-механічних характеристик та геометричних параметрів розглянутої структури на їх значення.

Композитні пластини шаруватої структури (зокрема, двошарові) з регульованими характеристиками міцності та матеріаломісткості – одні з найпоширеніших тримких елементів конструкцій і технічних засобів різноманітного цільового призначення. У більшості випадків вони піддаються інтенсивним динамічним, зокрема циклічним, навантаженням. Тому достовірна оцінка такої динамічної характеристики, як спектр власних частот є актуальна проблема при їх проектуванні, щоб запобігти резонансним явищам в експлуатаційних умовах.

Найхарактернішою особливістю деформування тонкостінних елементів із сучасних армованих композитів на полімерній основі (як у статичному, так і динамічному випадках) поряд з анізотропією пружних характеристик є податливість до трансверсальних зсуву та стиску [1]. Слід зазначити, що сьогодні в літературі небагато праць з дослідження коливань композитних пластин з одночасним урахуванням податливості до трансверсальних зсуву та стиску, особливо для їх шаруватої структури за товщиною при дискретному розгляді шарів. Переважна більшість результатів тут отримана за допомогою числових методів [4–6]. Нижче на основі варіанта уточненої теорії пластин, що враховує явно податливість до трансверсального зсуву та неявно – до стиску [2], запропонована математична модель процесу вільних коливань двошарових пластин-смуг за дискретного розгляду їх складників. Отримано аналітичний вираз для спектра власних частот двошарової пластини-смуги за умови шарнірного закріплення видовжених країв на нижній лицевій площині структури. Проаналізовано вплив фізико-механічних характеристик і геометричних параметрів складників структури на значення власних частот. Як частковий випадок отримано вираз для спектра власних частот вільних коливань пластини-смуги з нанесеним на верхню лицеву поверхню тонким захисним покриттям [3].

1. Формулювання задачі. Розглянемо двошарову структуру, що складається з тонких композитних пластин з приведеними фізико-механічними характеристиками і товщинами $2h_i$ (див. рисунок) та густинами ρ_i, $i = 1, 2$ відповідно. Якщо один із тангенціальних розмірів розглянутої структури значно перевищує інший, то маємо двошарову пластину-смугу, характеристики напружено-деформованого стану якої можна вважати залежними лише від двох локальних координат кожної пластини.

Вважаємо, що між пластинами виконуються умови ідеального механічного контакту. Внаслідок дії на міжпластинній площині нормальних і тангенціальних контактних напружень за поперечних коливань такої структури кожний складник зазнає як згинних, так і поздовжніх деформацій. Коливний процес кожної пластини описують [2]:

а) рівняння рівноваги (руху)

$$N_i' + 2\tau_i^- = 0\,, \quad M_i' - Q_i + 2h_i\tau_i^+ = 0\,.$$

$$Q_i' + 2\sigma_i^- = 2\rho_i h_i \ddot{w}_i\,, \qquad i = 1, 2\,, \tag{1}$$

де

$$\tau_i^\pm = \frac{1}{2}[\sigma_{13}^{(i)}(x_1^{(i)}, h_i, t) \pm \sigma_{13}^{(i)}(x_1^{(i)}, -h_i, t)]\,,$$

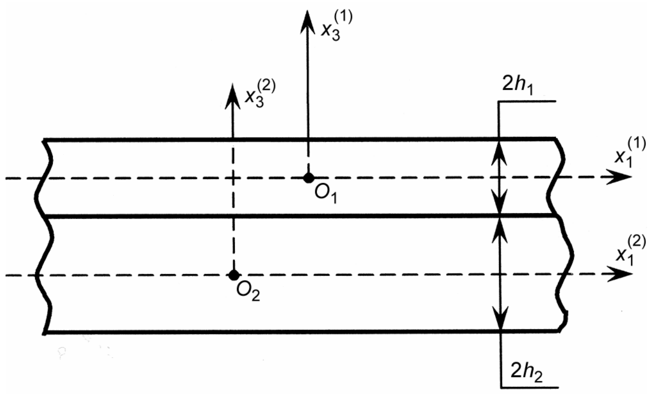
$$\sigma_i^- = \frac{1}{2}[\sigma_{33}^{(i)}(x_1^{(i)}, h_i, t) - \sigma_{33}^{(i)}(x_1^{(i)}, -h_i, t)]\,;$$

б) співвідношення пружності

$$N_i = \bar{B}_i\, \varepsilon_{1i}^0\,, \quad M_i = \bar{D}_i\, \bar{\varepsilon}_{1i}^1\,, \quad Q_i = \Lambda_i\, \varepsilon_{13i}^0\,, \quad i = 1,2\,; \tag{2}$$

в) деформаційні співвідношення

$$\varepsilon_{1i}^0 = u_i'\,, \quad \bar{\varepsilon}_{1i}^1 = \varepsilon_{1i}^1 / h = \gamma_i'\,; \quad \varepsilon_{13i}^0 = \gamma_i + w_i'\,. \tag{3}$$



У рівностях (1)–(3) вжиті загальноприйняті позначення для розтягувальних N_i та перерізувальних Q_i зусиль, згинних моментів M_i у кожній пластині, компонент тензорів напружень $\sigma_{kn}^{(i)}$, переміщень u_i точок серединної площини i-ої пластини в тангенціальному напрямку, кутів повороту γ_i нормальних до серединних площин елементів перед деформуванням, переміщень точок серединної площини вздовж нормальної координати w_i, поздовжньої ε_{1i}^0 та згинної $\bar{\varepsilon}_{1i}^1$ деформацій, деформації трансверсального зсуву ε_{13i}^0, а також для введених жорсткісних характеристик пластин: $\bar{B}_i = 2E_i h_i(1 + \alpha_i) / 3(1 - \nu_i^2)$ – узагальненої жорсткості на розтяг, $\bar{D}_i = h_i^2\, \bar{B}_i / 3$ – узагальненої згинної жорсткості, $\Lambda_i = 2k' h_i G_i'$ – зсувної жорсткості, $\alpha_i = ((1 + \nu_i)(\nu_i')^2 / (1 - \nu - 2\nu\nu'))(E_i / E_i')$, E_i, ν_i – модулів Юнга та коефіцієнтів Пуассона в серединній та еквідистантній їй площинах, E_i', ν_i' – тих же величин у площинах, перпендикулярних до серединної, G_i' – трансверсальних модулів зсуву, $k' = 14/15$. Штрих означає похідну за координатою $x_1^{(i)}$, а крапка – за t.

Крайові умови на кінцях $x = \pm l$ для шарнірного закріплення другої пластини вздовж видовжених сторін на нижній лицевій поверхні мають вигляд

$$N_i(\pm l,t)=0\,,\quad M_i(\pm l,t)=0\,,\ i=1,2\,,$$

$$w^{(1)}(\pm l,-h_1,t)=w^{(2)}(\pm l,h_2,t)\,,\quad w^{(2)}(\pm l,-h_2,t)=0\,. \tag{4}$$

Рівняння (1) разом із співвідношеннями (2), (3) та крайовими умовами (4) складають математичну модель процесу вільних малих коливань двошарової пластини-смуги. Податливість матеріалу i-ого складника до поперечного стиску враховують тут через наявні у виразах для їх жорсткісних характеристик коефіцієнти α_i, що залежать від трансверсальних пружних сталих E_i' та ν_i'.

2. Побудова розв'язку задачі. За вільних коливань розглянутої шаруватої структури на її лицевих площинах маємо:

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1^{(1)},h_1,t)=\sigma_{33}^{(1)}(x_1^{(1)},h_1,t)=0\,,$$

$$\sigma_{13}^{(2)}(x_1^{(2)},-h_2,t)=\sigma_{33}^{(2)}(x_1^{(2)},-h_2,t)=0\,. \tag{5}$$

Наслідком умов ідеального механічного контакту між пластинами за суміщення початків координатних осей $x_1^{(1)}$ та $x_1^{(2)}$ є співвідношення

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1,-h_1,t)=\sigma_{13}^{(2)}(x_1,h_2,t)=\tau(x_1,t)\,,$$

$$\sigma_{33}^{(2)}(x_1,-h_1,t)=\sigma_{33}^{(2)}(x_1,h_2,t)=\sigma(x_1,t)\,, \tag{6}$$

$$u^{(1)}(x_1,-h_1,t)=u^{(2)}(x_1,h_2,t)\,;\ w^{(1)}(x_1,-h_1,t)=w^{(2)}(x_1,h_2,t)\,. \tag{7}$$

Рівняння руху (1) після підставлення в них співвідношень (5) та (6) набувають вигляду

$$N_1'-\tau=0\,,\quad N_2'+\tau=0\,,$$

$$M_1'-Q_1+h_1\tau=0\,,\quad M_2'-Q_2+h_2\tau=0\,,$$

$$Q_1'-\sigma=2\rho_1h_1\ddot{w}_1\,,\quad Q_2'+\sigma=2\rho_2h_2\ddot{w}_2\,. \tag{8}$$

Оскільки на лицевих площинах кожної з пластин тангенціальні $u^{(i)}$ та нормальні $w^{(i)}$ переміщення визначають формули [2]

$$u^{(i)}(x_1,\pm h_i,t)=u_i(x_1,t)\pm h_i\gamma_i(x_1,t)\,,\ w^{(i)}(x_1,\pm h_i,t)=w_i(x_1,t),\ \ i=1,2\,,$$

з рівностей (7) знаходимо:

$$u_1=u_2+h_1\gamma_1+h_2\gamma_2\,,\quad w_1=w_2=w\,. \tag{9}$$

Співвідношення (9) дають можливість виключити із рівнянь рівноваги (8) контактні міжшарові напруження τ та σ і отримати систему трьох розв'язувальних рівнянь

$$(1+\beta_1)\,\gamma_1''-\kappa_1^2+\beta_{12}\gamma_2''=\kappa_1^2w',\qquad \beta_{21}\gamma_1''+(1+\beta_2)\,\gamma_2''-\kappa_2^2\gamma_2=\kappa_2^2w',$$

$$\lambda_1\gamma_1^1+\lambda_2\gamma_2^1+w''=\frac{1}{c_2^2}\,\ddot{w}, \tag{10}$$

де $\lambda_i=\Lambda_i/\Lambda,\ \ \kappa_i^2=\Lambda/\bar{D}_i,\ \ \beta_i=3\bar{B}_i/B,\quad i=1,2;\ \ \Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2;\ B=\bar{B}_1+\bar{B}_2;$

$$\frac{1}{c_2^2}=\frac{2(\rho_1h_1+\rho_2h_2)}{\Lambda};\quad \beta_{12}=3\ \frac{h_2}{h_1}\frac{\bar{B}_2}{B};\quad \beta_{21}=3\ \frac{h_1}{h_2}\frac{\bar{B}_1}{B}\,.$$

Якщо шукані функції w та γ_1, γ_2 подати у вигляді

$$w(x,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos\lambda_n x\right) e^{i\omega t}, \quad \gamma_i(x,t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{in} \sin\lambda_n x\right) e^{i\omega t}, \qquad i = 1, 2, \qquad (11)$$

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l},$$

то задовольнимо крайові умови (4). Після підставлення (11) в (10) отримуємо нескінченну систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів w_n, γ_{1n}, γ_{2n}, котра складається з незалежних підсистем третього порядку:

$$[(1+\beta_1)\lambda_n^2 + \kappa_1^2]\,\gamma_{1n} + \beta_{12}\lambda_n^2\gamma_{2n} = \kappa_1^2\lambda_n\, w_n,$$

$$\beta_{21}\lambda_n^2\gamma_{1n} + [(1+\beta_2)\lambda_n^2 + \kappa_2^2]\,\gamma_{2n} = \kappa_2^2\lambda_n\, w_n$$

$$\lambda_1\alpha_n\gamma_{1n} + \lambda_2\alpha_n\gamma_{2n} - \lambda_n^2 w_n = -\frac{\omega_n^2}{c^2} w_n, \qquad (12)$$

$n = \overline{1,\infty}$; ω_n – n-на власна частота.

Наслідком умови нетривіальності розв'язку підсистеми (12) є вираз для квадратів значень власних частот:

$$\omega_n^2 = \alpha_n^4 \frac{c_2^2}{\alpha_n^2 + a^2/b^2}, \qquad (13)$$

де

$$a^2 = \alpha_n^2\{[\lambda_1(1+\beta_2) - \lambda_2\beta_{21}]\kappa_1^2 + [\lambda_2(1+\beta_1) - \lambda_1\beta_{12}]\kappa_2^2\} + \kappa_1^2\kappa_2^2,$$

$$b^2 = 4\alpha_n^2 + [(1+\beta_2)(1-\lambda_1) + \lambda_2\beta_{21}]\kappa_1^2 + [(1+\beta_1)(1-\lambda_2) + \lambda_1\beta_{12}]\kappa_2^2.$$

$$\lambda_1 = \Lambda_1/\Lambda, \ \ \lambda_2 = \Lambda_2/\Lambda, \ \ \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

3. Часткові випадки.

3.1. Пластина-смуга з тонким покриттям. Якщо верхню пластину вважати за тонке порівняно з нижньою захисне покриття, то в ньому можна знехтувати згинний момент M_1. Ввівши до розгляду вираз для спектра безрозмірних частот за формулою

$$\bar{\omega}_n = l\,\omega_n\sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}, \qquad (14)$$

з (13) для їх значень отримуємо:

$$\bar{\omega}_n = \varepsilon k_n^2 a_n, \qquad (15)$$

де $\varepsilon = h_2/l$ – параметр тонкостінності пластини, $k_n = \dfrac{2n+1}{2}\pi$,

$$a_n^2 = \frac{1+\alpha_2}{1+\eta}\frac{1+a^2+\beta^2}{(1+\beta^2)(1+\alpha_2)k_n^2\varepsilon^2(E_2/G_2) + 3(1-\nu_2^2)},$$

$$a^2 = \frac{3\bar{B}_1}{B_1+B_2}\frac{h_1}{h_2}, \quad \beta^2 = 3\bar{B}_1/\bar{B}_2.$$

3.2. Податлива до трансверсальних зсуву та стиску пластина-смуга. Цей випадок отримуємо, поклавши $h_1/h_2 = 0$. Тоді з (13) для спектра безрозмірних частот (14)

$$\bar{\omega}_n = k_n^2 \varepsilon \sqrt{\frac{1+\alpha_2}{\delta^2 + k_n^2 \varepsilon^2 (1+\alpha_2)(E_2 / G_2')/k'}}\ , \qquad (16)$$

де $\delta^2 = 3(1-\nu_2^2)$.

3.3. Зсувну модель С. П. Тимошенка одержимо, поклавши у виразі для коефіцієнта α_2 значення $E_2 / E_2' = 0$. Тоді спектр безрозмірних власних частот визначає формула

$$\bar{\omega}_n = k_n^2 \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\delta^2 + k_n^2 \varepsilon^2 (E_2 / G_2')/k'}}\ . \qquad (17)$$

3.4. Класична теорія. Якщо матеріал пластини неподатливий до трансверсального зсуву, тобто $E_2 / G_2' = 0$, то для $\bar{\omega}_n$ маємо:

$$\bar{\omega}_n = k_n^2 \varepsilon / \delta\ . \qquad (18)$$

4. Аналіз результатів та висновки. Числові розрахунки виконані для двошарової пластини-смуги при $E_1 / E_2 = 0,2$, $\nu_1 = 0,2$, $\nu_2 = 0,375$, $E_i / G_i = 2(1+\nu_i)$, $\rho_1 / \rho_2 = 0,2$, $h_1 / h_2 = 1,0$, $\varepsilon = 0,05$. У таблиці в першому рядку наведені обчислені за формулою (17) значення безрозмірних частот $\bar{\omega}_n$ для $n = 0,1,2$ з використанням приведених за товщиною жорсткісних характеристик, тобто без урахування дискретності. У другому рядку – значення цих же власних частот, обчислені за формулою (13) при $E_i / E_i' = 0$, у третьому – ті ж власні частоти, обчислені за формулою (13), але при $E_i / E_i' = 1$.

№ варіанта \ $\bar{\omega}_n$	$\bar{\omega}_0$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$
1	0,1465	1,2089	2,9247
2	0,1288	1,0124	2,4822
3	0,1350	1,0956	2,6204

Отже, враховуючи дискретність будови за товщиною, можна зменшити значення власних частот, а беручи до уваги податливість – підвищити.

У подальшому відповідні дослідження доцільно виконати для ширшого діапазону зміни геометричних та фізико-механічних характеристик розглянутого конструктивного тонкостінного елемента.

1. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
2. *Осадчук В. А., Марчук М. В.* Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
3. *Пакош В.С.* Власні частоти податливої до трансверсальних зсуву та стиску пластини-смуги з тонким покриттям // Там же. – 2009. – Вип. 7. – С. 172–175.
4. *Latheswary S., Valsarajan K. V., Rao Y.V.K.S.* Free Vibrations Analysis of Laminated Plates using Higher-order Shear Deformation Theory // IE (I) J.-AS. – 2004. – **85**. – P. 18–24.
5. *Zak A.J., Cartmell M.P. and Ostachowicz W.M.* Dynamics of Multi-Layered Composite Plates with SMA Wires // J. of Applied Mechanics, Transactions of the ASME. – 2003. – **70** (3). – P. 313–327.

6. *Zhi Wei, Minqiao Lu, and Jun Zhang*. Numerical Model and Analysis on Dynamics of Composites for Active Damage Detection // Proceedings of International Conference on Intelligent Computing, ICIC 2006, LNAI 4114. – 2006. – P. 649–654.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ С ПОДАТЛИВЫМИ К ТРАНСВЕРСАЛЬНЫМ СДВИГУ И СЖАТИЮ КОМПОЗИТНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ

Получено разрешающую систему дифференциальных уравнений относительно обобщенных перемещений, описывающую свободные колебания двухслойной пластины-полосы с податливыми к трансверсальным сдвигу и сжатию композитными составляющими. Для шарнирного закрепления удлиненных краев нижней составляющей на лицевой плоскости получено аналитическое выражение для спектра собственных частот и проанализировано влияние физико-механических характеристик и геометрических параметров рассмотренной структуры на их значения.

FREE VIBRATIONS OF TWO-LAYERED PLATES-STRIP WITH COMPOSITE COMPONENTS PLIABLE TO TRANSVERSAL SHEAR AND COMPRESSION

The solving system of the differential equations relative generalized displacements, describing the free vibrations of a two-layer plate-strip with pliability to transversal shear and compression the composite components is obtained. For a case of elongated edges of lower component of a plate-strip hinged on the facial plane an analytical expression for the spectrum of fundamental frequencies has been obtained and the influence of physical and mechanical characteristics and geometrical parameters of the considered structure on their values has been analyzed.

[1]Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[2]Тернопільський нац. економічний ун-т
МОН України, Тернопіль

Одержано
21.10.10