

ПІДХІД ДО ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТИХ ТІЛ З ПОРОЖНИНАМИ ПАРАЛЕЛЕПЕДІАЛЬНОЇ ФОРМИ

Проілюстровано підхід до розв'язування тривимірних стаціонарних задач теплопровідності для шаруватих тіл з порожнинами паралелепіпедальної форми, який ґрунтується на використанні узагальнених функцій і функцій Гріна відповідних задач для суцільних шаруватих тіл. Наведено числові результати для двоскладового півпростору з порожниною, що має форму куба, за нагрівання концентрованим потоком тепла.

Методи визначення з використанням узагальнених функцій дво- і тривимірних стаціонарних температурних полів в однорідних тілах з порожнинами прямокутного поперечного перерізу наведено раніше [2]. До отриманих задач для диференціальних рівнянь з узагальненими похідними і правими частинами, які відіграють роль зосереджених на поверхнях порожнин джерел тепла з невідомими інтенсивностями, застосовано відповідні інтегральні перетворення або фундаментальні розв'язки.

Нижче запропоновано підхід до знаходження тривимірних стаціонарних розподілів температур у шаруватих тілах з такими ж порожнинами, але у їх складових. Підхід, який передбачає використання узагальнених функцій та функцій Гріна відповідних задач для суцільних шаруватих тіл, проілюстровано на задачі теплопровідності для кусково-однорідного півпростору.

Формулювання задачі. Розглянемо віднесену до декартової системи координат X, Y, Z область, яку займають ідеально контактуючі шар товщиною H і півпростір $Z > H$ з паралелепіпедальною порожниною $A \leq X \leq A + A_0$, $B \leq Y \leq B + B_0$, $C \leq Z \leq C + C_0$ (рис. 1). Зовнішня поверхня шару нагрівається тепловим потоком, інтенсивність якого $q^*(X, Y)$ ($q^*(X, Y) \rightarrow 0$, якщо $X, Y \rightarrow \pm\infty$). Через поверхні порожнини здійснюється конвективний теплообмін з середовищем нульової температури.

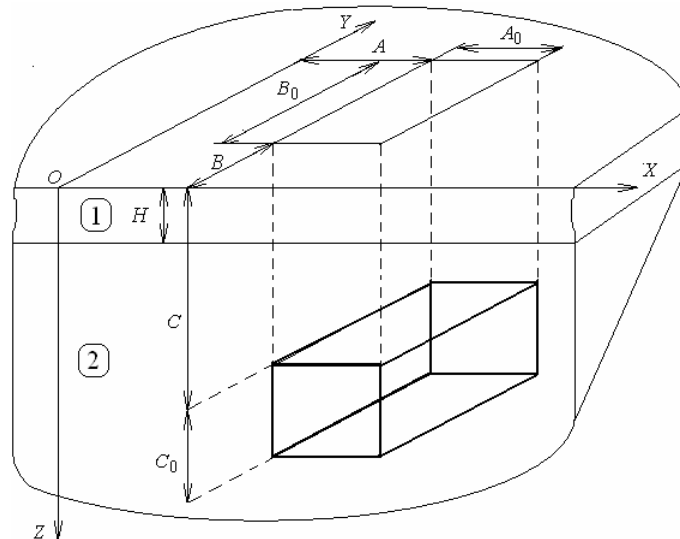


Рис. 1. Двоскладовий півпростір з паралелепіпедальною порожниною.

Для визначення стаціонарних температурних полів $t_i(x, y, z)$ маємо рівняння теплопровідності

$$\Delta t_p = 0, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad p = 1, 2, \quad (1)$$

умови контакту

$$t_2|_{z=h+0} = t_1|_{z=h-0}, \quad -\lambda_t^{(2)} \frac{\partial t_2}{\partial z} \Big|_{z=h+0} = -\lambda_t^{(1)} \frac{\partial t_1}{\partial z} \Big|_{z=h-0} \quad (2)$$

і крайові умови

$$-\frac{\partial t_1}{\partial z} \Big|_{z=+0} = \frac{\bar{q}_0}{K_\lambda} q(x, y), \quad t_1, t_2 \rightarrow 0 \text{ при } x, y \rightarrow \pm\infty, \quad t_2 \rightarrow 0, \text{ якщо } z \rightarrow \infty; \quad (3)$$

$$-\frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=a-0} = \gamma t_2|_{x=a-0}, \quad -\frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=a+a_0+0} = -\gamma t_2|_{x=a+a_0+0},$$

$$y \in (b, b + b_0), \quad z \in (c, c + c_0),$$

$$-\frac{\partial t_2}{\partial z} \Big|_{z=c-0} = \gamma t_2|_{z=c-0}, \quad -\frac{\partial t_2}{\partial z} \Big|_{z=c+c_0+0} = -\gamma t_2|_{z=c+c_0+0},$$

$$y \in (b, b + b_0), \quad x \in (a, a + a_0),$$

$$-\frac{\partial t_2}{\partial y} \Big|_{y=b-0} = \gamma t_2|_{y=b-0}, \quad -\frac{\partial t_2}{\partial y} \Big|_{y=b+b_0+0} = -\gamma t_2|_{y=b+b_0+0},$$

$$x \in (a, a + a_0), \quad z \in (c, c + c_0). \quad (4)$$

Тут $x = X/l$; $y = Y/l$; $z = Z/l$; $a = A/l$; $a_0 = A_0/l$; $b = B/l$; $b_0 = B_0/l$; $c = C/l$; $c_0 = C_0/l$; $h = H/l$; $\gamma = \alpha l / \lambda_t^{(2)}$; $\bar{q} = q_0 l / \lambda_t^{(2)}$, $q(x, y) = q^*(x, y) / q_0$, q_0 – максимальна інтенсивність теплового потоку; $K_\lambda = \lambda_t^{(1)} / \lambda_t^{(2)}$, α – коефіцієнт тепловіддачі; $\lambda_t^{(i)}$ – коефіцієнти теплопровідності шару і півпростору; l – характерний розмір; градієнти температури відносяться до точок тіл, які розміщені у безпосередній близькості до їх поверхонь [4].

Формулювання задачі теплопровідності в термінах узагальнених функцій та інтегральне подання її розв'язку. Розглянемо функцію $t(x, y, z)$, яка збігається з шуканими функціями у відповідних областях і дорівнює нулю в області, що займає порожнина, тобто

$$t(x, y, z) = t_1(x, y, z) + [t_2(x, y, z) - t_1(x, y, z)]S(z - h) - t_2(x, y, z)M_1(x)M_2(y)M_3(z), \quad (5)$$

де

$$M_1(x) = [S(x - a) - S(x - a - a_0)], \quad M_2(y) = [S(y - b) - S(y - b - b_0)],$$

$$M_3(z) = [S(z - c) - S(z - c - c_0)]; \quad S(\zeta) - \text{функція Гевісайда.}$$

Отримаємо рівняння для її визначення. Для цього використаємо рівняння з класичними похідними

$$\Delta t = 0, \quad (6)$$

з якого, як легко перекопатися, випливає система рівнянь (1).

Перейдемо у рівнянні (6) до узагальнених похідних. Враховуючи правило диференціювання функцій [1], що мають розрив першого роду, та умови (2), (4), знайдемо:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right\}_{y,z} &= \left\{ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right\}_{\kappa,\lambda} + \left\{ \gamma \left[t_2|_{x=a-0} \delta(x-a) + t_2|_{x=a+a_0+0} \delta(x-a-a_0) \right] + \right. \\
 &+ \left. \left[-t_2|_{x=a-0} \delta'(x-a) + t_2|_{x=a+a_0+0} \delta'(x-a-a_0) \right] \right\} M_2(y) M_3(z), \\
 \left\{ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right\}_{y,z} &= \left\{ \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right\}_{\kappa,\lambda} + \left\{ \gamma \left[t_2|_{y=b-0} \delta(y-b) + t_2|_{y=b+b_0+0} \delta(y-b-b_0) \right] + \right. \\
 &+ \left. \left[-t_2|_{y=b-0} \delta'(y-b) + t_2|_{y=b+b_0+0} \delta'(y-b-b_0) \right] \right\} M_1(x) M_3(z), \\
 \left\{ \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right\}_{y,z} &= \left\{ \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right\}_{\kappa,\lambda} + \frac{\lambda_t^{(1)} - \lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(2)}} \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=h-0} \delta(z-h) + \\
 &+ \left\{ \gamma \left[-t_2|_{z=c-0} \delta(z-c) + t_2|_{z=c+c_0+0} \delta(z-c-c_0) \right] - \right. \\
 &\left. - t_2|_{z=c-0} \delta'(z-c) + t_2|_{z=c+c_0+0} \delta'(z-c-c_0) \right\} M_1(x) M_2(y). \quad (7)
 \end{aligned}$$

Додамо почленно рівності (7) з урахуванням (6). У результаті одержимо для нововведеної функції таке рівняння з узагальненими похідними:

$$\Delta t + \frac{\lambda_t^{(2)} - \lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}} \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=h-0} \delta(z-h) = w_t(x, y, z), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}
 w_t(x, y, z) &= \left\{ \gamma \left[t_2|_{x=a-0} \delta(x-a) + t_2|_{x=a+a_0+0} \delta(x-a-a_0) \right] + \right. \\
 &+ \left. \left[-t_2|_{x=a-0} \delta'(x-a) + t_2|_{x=a+a_0+0} \delta'(x-a-a_0) \right] \right\} M_2(y) M_3(z) + \\
 &+ \left\{ \gamma \left[t_2|_{y=b-0} \delta(y-b) + t_2|_{y=b+b_0+0} \delta(y-b-b_0) \right] + \right. \\
 &+ \left. \left[-t_2|_{y=b-0} \delta'(y-b) + t_2|_{y=b+b_0+0} \delta'(y-b-b_0) \right] \right\} M_1(x) M_3(z) + \\
 &+ \left\{ \gamma \left[t_2|_{z=c-0} \delta(z-c) + t_2|_{z=c+c_0+0} \delta(z-c-c_0) \right] + \right. \\
 &+ \left. \left[-t_2|_{z=c-0} \delta'(z-c) + t_2|_{z=c+c_0+0} \delta'(z-c-c_0) \right] \right\} M_1(x) M_2(y). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Розв'язок цього рівняння, що задовольняє крайові умови

$$- \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=+0} = \frac{\bar{q}_0}{K_\lambda} q(x, y), \quad t \rightarrow 0, \text{ якщо } x, y \rightarrow \pm\infty, \quad t \rightarrow 0, \text{ якщо } z \rightarrow \infty, \quad (10)$$

які випливають з (3), (5), подамо в інтегральній формі [7]:

$$\begin{aligned}
 t(M_0) &= - \int_{+0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(M, M_0) \lambda_t(z) w_t(M) dx dy dz + \\
 &+ \frac{\bar{q}_0 \lambda_t^{(1)}}{K_\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(M, M_0) q(x, y) dx dy, \quad (11)
 \end{aligned}$$

де $\lambda_t(z) = \lambda_t^{(1)} + (\lambda_t^{(2)} - \lambda_t^{(1)}) S(z-h)$; $G(M, M_0)$ – функція Гріна для суцільного кусково-однорідного півпростору, отримана як частковий випадок з праці [5], визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 G(M, M_0) &= G_1(M, M_0) + [G_2(M, M_0) - G_1(M, M_0)] S(z-h), \\
 G_p(M, M_0) &= G_{p1}(M, M_0) + [G_{p2}(M, M_0) - G_{p1}(M, M_0)] S(z_0 - h), \quad (12)
 \end{aligned}$$

В ЯКИХ

$$\begin{aligned}
4\pi\lambda_t^{(1)}G_{11}(M, M_0) &= G_{11}^*(M, M_0) = \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z-z_0} + \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z+z_0} + \\
&+ \nu \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left(\frac{1}{R}\Big|_{\eta=z+\xi_{1n}} + \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z+\xi_{2n}} + \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z-\xi_{1n}} + \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z-\xi_{2n}} \right), \\
4\pi\lambda_t^{(2)}G_{22}(M, M_0) &= G_{22}^*(M, M_0) = \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left(\frac{1}{R}\Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} - \nu \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z+\xi_{4n}} \right), \\
2\pi\lambda_t^{(2)}G_{12}(M, M_0) &= G_{12}^*(M, M_0) = K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left[\frac{1}{R}\Big|_{\eta=z-\xi_{3n}} + \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right], \\
2\pi\lambda_t^{(2)}G_{21}(M, M_0) &= G_{21}^*(M, M_0) = K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left[\frac{1}{R}\Big|_{\eta=z+\xi_{5n}} + \frac{1}{R}\Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right]. \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\text{Тут } R = \sqrt{d^2 + \eta^2}, \quad d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2; \quad \nu = \frac{K_\lambda - 1}{K_\lambda + 1}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(2)}},$$

$$K_\lambda^* = \frac{1}{K_\lambda + 1}; \quad \xi_{1n} = 2(n+1)h + z_0, \quad \xi_{2n} = 2(n+1)h - z_0, \quad \xi_{3n} = 2nh + z_0, \\ \xi_{4n} = 2(n-1)h + z_0, \quad \xi_{5n} = 2nh - z_0; \quad M, M_0 - \text{ точки відповідно з координатами } x, y, z; x_0, y_0, z_0.$$

Підставимо в подання (11) співвідношення (9), (12) з урахуванням (13):

$$\begin{aligned}
2^p \pi t_p(M_0) &= 2^p \pi T_p(M_0) - \\
&- \int_c^{c+c_0} \int_b^{b+b_0} \left[\left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) + \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} t_2(M) \Big|_{x=a-0} \right] dydz - \\
&- \int_c^{c+c_0} \int_b^{b+b_0} \left[\left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) - \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial x} \right) \Big|_{x=a+a_0} t_2(M) \Big|_{x=a+a_0+0} \right] dydz - \\
&- \int_a^{a+a_0} \int_b^{b+b_0} \left[\left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) + \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial z} \right) \Big|_{z=c} t_2(M) \Big|_{z=c-0} \right] dydx - \\
&- \int_a^{a+a_0} \int_b^{b+b_0} \left[\left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) - \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial z} \right) \Big|_{z=c+c_0} t_2(M) \Big|_{z=c+c_0+0} \right] dydx - \\
&- \int_c^{c+c_0} \int_a^{a+a_0} \left[\left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) + \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial y} \right) \Big|_{y=b} t_2(M) \Big|_{y=b-0} \right] dx dz - \\
&- \int_c^{c+c_0} \int_a^{a+a_0} \left[\left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) - \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial y} \right) \Big|_{y=b+b_0} t_2(M) \Big|_{y=b+b_0+0} \right] dx dz, \\
p &= 1, 2, \quad (14)
\end{aligned}$$

де

$$T_1(M_0) = \frac{\bar{q}_0}{2\pi K_\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \left[\frac{1}{R}\Big|_{\eta=z_0} + \nu \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left(\frac{1}{R}\Big|_{\eta=\xi_{1n}} + \frac{1}{R}\Big|_{\eta=\xi_{2n}} \right) \right] dx dy;$$

$$T_2(M_0) = \frac{\bar{q}_0}{\pi} K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) \frac{1}{R} \Big|_{\eta=\xi_{3n}} dx dy. \quad (15)$$

Зведення задачі до системи лінійних алгебричних рівнянь. Розіб'ємо поверхні порожнини на елементарні прямокутники. Відповідні області визначимо парами нерівностей: $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = \overline{1, n_x}$; $y_{j-1} \leq y \leq y_j$, $j = \overline{1, n_y}$; $z_{k-1} \leq z \leq z_k$, $k = \overline{1, n_z}$. Тут $x_0 = a$, $x_{n_x} = a + a_0$; $y_0 = b$, $y_{n_y} = b + b_0$; $z_0 = c$, $z_{n_z} = c + c_0$; n_x, n_y, n_z – кількість елементарних відрізків, на які розбиті відповідні сторони паралелепіпеда. Замінивши функцію $t_2(M)$ на відповідних поверхнях на кожному з прямокутників її середнім значенням, зокрема значенням у центрі прямокутника, з (14) одержимо:

$$\begin{aligned} 2^p \pi t_p(M_0) \approx 2^p \pi T_p(M_0) - \\ - \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} t_2(a - 0, y_s^j, z_s^k) \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) + \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} dy dz - \\ - \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} t_2(a + a_0 + 0, y_s^j, z_s^k) \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) - \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial x} \right) \Big|_{x=a+a_0} dy dz - \\ - \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} t_2(x_s^i, y_s^j, c - 0) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) + \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial z} \right) \Big|_{z=c} dy dx - \\ - \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} t_2(x_s^i, y_s^j, c + c_0 + 0) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) - \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial z} \right) \Big|_{z=c+c_0} dy dx - \\ - \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{i=1}^{n_x} t_2(x_s^i, b - 0, z_s^k) \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) + \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial y} \right) \Big|_{y=b} dx dz - \\ - \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{i=1}^{n_x} t_2(x_s^i, b + b_0 + 0, z_s^k) \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\gamma G_{2p}^*(M, M_0) - \frac{\partial G_{2p}^*(M, M_0)}{\partial y} \right) \Big|_{y=b+b_0} dx dz, \quad (16) \end{aligned}$$

де $x_s^i = (\bar{x}_{i-1} + \bar{x}_i)/2$; $y_s^j = (\bar{y}_{j-1} + \bar{y}_j)/2$; $z_s^k = (\bar{z}_{k-1} + \bar{z}_k)/2$.

Обчислюючи відповідні інтеграли, знаходимо:

$$\begin{aligned} 2^p \pi t_p(M_0) \approx 2^p \pi T_p(M_0) - \\ - \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} t_2(a - 0, y_s^j, z_s^k) K_{jk}^{pa}(M_0) - \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{j=1}^{n_y} t_2(a + a_0 + 0, y_s^j, z_s^k) K_{jk}^{pa_0}(M_0) - \\ - \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} t_2(x_s^i, y_s^j, c - 0) K_{ji}^{pc}(M_0) - \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} t_2(x_s^i, y_s^j, c + c_0 + 0) K_{ji}^{pc_0}(M_0) - \\ - \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{i=1}^{n_x} t_2(x_s^i, b - 0, z_s^k) K_{ik}^{pb}(M_0) - \sum_{k=1}^{n_z} \sum_{i=1}^{n_x} t_2(x_s^i, b + b_0 + 0, z_s^k) K_{ik}^{pb_0}(M_0), \quad (17) \end{aligned}$$

де

$$K_{jk}^{pa}(M_0) = \gamma I_{jk}^{px}(a, x_0, y_0, z_0) + J_{jk}^{px}(a, x_0, y_0, z_0);$$

$$K_{jk}^{pa_0}(M_0) = \gamma I_{jk}^{px}(a + a_0, x_0, y_0, z_0) - J_{jk}^{px}(a + a_0, x_0, y_0, z_0);$$

$$K_{ji}^{pc}(M_0) = \gamma I_{ji}^{pz}(x_0, y_0, c, z_0) + J_{ji}^{pz}(x_0, y_0, c, z_0);$$

$$K_{ji}^{pc_0}(M_0) = \gamma I_{ji}^{pz}(x_0, y_0, c + c_0, z_0) - J_{ji}^{pz}(x_0, y_0, c + c_0, z_0);$$

$$K_{ik}^{pb}(M_0) = \gamma I_{ik}^{py}(x_0, b, y_0, z_0) + J_{ik}^{py}(x_0, b, y_0, z_0);$$

$$K_{ji}^{pb_0}(M_0) = \gamma I_{ik}^{py}(x_0, b + b_0, y_0, z_0) - J_{ji}^{py}(x_0, b + b_0, y_0, z_0);$$

$$\begin{aligned} I_{jk}^{2x}(x, x_0, y_0, z_0) &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{y_{j-1}}^{y_j} G_{22}^*(M, M_0) dy dz = \\ &= D_{jk}^x \Big|_{\eta=z-z_0} - \upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n D_{jk}^x \Big|_{\eta=z+\xi_{4n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n D_{jk}^x \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{jk}^{2x}(x, x_0, y_0, z_0) &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial G_{22}^*(M, M_0)}{\partial x} dz dy = \\ &= - \left[\varphi_1 \Big|_{\eta=z-z_0} - \upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n \varphi_1 \Big|_{\eta=z+\xi_{4n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n \varphi_1 \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right] \Big|_{z_{k-1}}^{z_k} \Big|_{y_{j-1}}^{y_j}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ki}^{2y}(x_0, y, y_0, z_0) &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} G_{22}^*(M, M_0) dx dz = \\ &= D_{ki}^y \Big|_{\eta=z-z_0} - \upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n D_{ki}^y \Big|_{\eta=z+\xi_{4n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n D_{ki}^y \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{ki}^{2y}(x, x_0, y_0, z_0) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial G_{22}^*(M, M_0)}{\partial y} dz dx = \\ &= - \left[\varphi_2 \Big|_{\eta=z-z_0} - \upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n \varphi_2 \Big|_{\eta=z+\xi_{4n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n \varphi_2 \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right] \Big|_{z_{k-1}}^{z_k} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ji}^{2z}(x_0, y_0, z, z_0) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} G_{22}^*(M, M_0) dy dx = \\ &= D_{ji}^z \Big|_{\eta=z-z_0} - \upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n D_{ji}^z \Big|_{\eta=z+\xi_{4n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n D_{ji}^z \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{ji}^{2z}(x_0, y_0, z, z_0) &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial G_{22}^*(M, M_0)}{\partial z} dx dy = \\ &= - \left[\varphi_3 \Big|_{\eta=z-z_0} - \upsilon \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n \varphi_3 \Big|_{\eta=z+\xi_{4n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n \varphi_3 \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right] \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \Big|_{y_{j-1}}^{y_j}; \end{aligned}$$

$$I_{jk}^{1x}(x, x_0, y_0, z_0) = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{y_{j-1}}^{y_j} G_{21}^*(M, M_0) dy dz = K_{\lambda}^* \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon^n \left[D_{jk}^x \Big|_{\eta=z+\xi_{5n}} + D_{jk}^x \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right];$$

$$\begin{aligned}
 J_{jk}^{1x}(x, x_0, y_0, z_0) &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial G_{21}^*(M, M_0)}{\partial x} dz dy = \\
 &= -K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left[\varphi_1 \Big|_{\eta=z+\xi_{5n}} + \varphi_1 \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right] \Big|_{z_{k-1}}^{z_k} \Big|_{y_{j-1}}^{y_j}; \\
 I_{ki}^{1y}(x_0, y, y_0, z_0) &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} G_{21}^*(M, M_0) dx dz = K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left[D_{ki}^y \Big|_{\eta=z+\xi_{5n}} + D_{ki}^y \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right]; \\
 J_{ki}^{1y}(x, x_0, y_0, z_0) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial G_{21}^*(M, M_0)}{\partial y} dz dx = \\
 &= -K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left[\varphi_2 \Big|_{\eta=z+\xi_{5n}} + \varphi_2 \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right] \Big|_{z_{k-1}}^{z_k} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}; \\
 I_{ji}^{1z}(x_0, y_0, z, z_0) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} G_{21}^*(M, M_0) dy dx = K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left[D_{ji}^z \Big|_{\eta=z+\xi_{5n}} + D_{ji}^z \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right]; \\
 J_{ji}^{1z}(x_0, y_0, z, z_0) &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial G_{21}^*(M, M_0)}{\partial z} dx dy = \\
 &= -K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \left[\varphi_3 \Big|_{\eta=z+\xi_{5n}} + \varphi_3 \Big|_{\eta=z+\xi_{3n}} \right] \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \Big|_{y_{j-1}}^{y_j}; \\
 D_{jk}^x &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \Psi_j dz, \quad D_{ji}^z = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Psi_j dx, \quad \Psi_j = \ln \frac{y_j - y_0 + R \Big|_{y=y_j}}{y_{j-1} - y_0 + R \Big|_{y=y_{j-1}}}; \\
 D_{ki}^y &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} \Psi_i^y dz, \quad \Psi_i^y = \ln \frac{x_i - x_0 + R \Big|_{x=x_i}}{x_{i-1} - x_0 + R \Big|_{x=x_{i-1}}}; \\
 \varphi_1 &= \operatorname{arctg} \frac{\eta(y - y_0)}{(x - x_0)R}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\eta(x - x_0)}{(y - y_0)R}, \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{\eta R}.
 \end{aligned}$$

Середні значення функції $t_2(M_0)$ на кожному прямокутнику знаходимо зі системи лінійних алгебричних рівнянь, яку отримаємо зі співвідношень (17) при $p = 2$ у результаті послідовного підставлення замість її аргументів координат центрів відповідних прямокутників.

Числовий приклад. Нехай $q^*(x, y) = q_0 e^{-k_c[(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2]}$, де $k_c = \bar{k}_c l^2$, \bar{k}_c – коефіцієнт зосередженості [3]; $x_c = X_c/l$, $y_c = Y_c/l$, X_c , Y_c – координати центра плями нагріву. За такого розподілу інтенсивності теплового потоку визначення $T_p(M_0)$ зведемо до обчислення інтеграла

$$T^*(x_0, y_0, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R} e^{-k_c[(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2]} dx dy. \quad (18)$$

Зробивши у (18) заміни $x = r \cos \varphi + x_c$, $y = r \sin \varphi + y_c$, $x_0 = r_0 \cos \varphi_0 + x_c$, $y_0 = r_0 \sin \varphi_0 + y_c$, одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k_c[(x-x_c)^2+(y-y_c)^2]} \frac{1}{R} dx dy = \int_0^{\infty} r e^{-k_c r^2} dr \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \eta^2}} = H(r_0, \eta).$$

Тут згідно з працею [8]

$$H(r_0, \eta) = 4 \int_0^{\infty} r e^{-k_c r^2} \frac{\mathbf{K}(k) dr}{\sqrt{(r+r_0)^2 + \eta^2}} \quad (19)$$

або, врахувавши

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \sqrt{(r+r_0)^2 + \eta^2} \int_0^{\infty} e^{-\eta \xi} J_0(r \xi) J_0(r_0 \xi) d\xi, \quad \int_0^{\infty} r e^{-k_c r^2} J_0(r \xi) dr = \frac{1}{2k_c} e^{-\xi^2/(4k_c)},$$

$$H(r_0, \eta) = \frac{\pi}{k_c} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2/(4k_c)} e^{-\eta \xi} J_0(r_0 \xi) d\xi, \quad (20)$$

де $k^2 = \frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + \eta^2}$; $\mathbf{K}(k)$ – еліптичний інтеграл першого роду; $J_0(\zeta)$ – функція Бесселя нульового порядку.

Тоді з (15) на основі (19), отримаємо:

$$T_1(M_0) = \frac{2\bar{q}_0}{\pi K_\lambda} \left\{ T^*(x_0, y_0, z_0) + \nu \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n [T^*(x_0, y_0, \xi_{1n}) + T^*(x_0, y_0, \xi_{2n})] \right\},$$

$$T_2(M_0) = \frac{\bar{q}_0}{\pi} K_\lambda^* \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n T^*(x_0, y_0, \xi_{3n}), \quad (21)$$

де

$$T^*(x_0, y_0, \eta) = H(r_0, \eta) \Big|_{r_0 = \sqrt{(x_0-x_c)^2 + (y_0-y_c)^2}}, \quad (22)$$

з формули (20)

$$T_1(M_0) = \frac{\bar{q}_0}{2k_c K_\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2/(4k_c)} \left\{ e^{-\xi z_0} + \nu \frac{e^{-\xi(2h-z_0)} + e^{-\xi(2h+z_0)}}{1 - \nu e^{-2\xi h}} \right\} \times$$

$$\times J_0\left(\xi \sqrt{(x_0-x_c)^2 + (y_0-y_c)^2}\right) d\xi,$$

$$T_2(M_0) = \frac{\bar{q}_0 K_\lambda^*}{k_c} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/(4k_c) - \xi z_0}}{1 - \nu e^{-2\xi h}} J_0\left(\xi \sqrt{(x_0-x_c)^2 + (y_0-y_c)^2}\right) d\xi, \quad (23)$$

причому

$$T_1(M_0) \Big|_{x_0=x_c, y_0=y_c} = \frac{\bar{q}_0}{2K_\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{k_c}} \left(f(z_0 \sqrt{k_c}) + \nu \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n [f(\xi_{1n} \sqrt{k_c}) + f(\xi_{2n} \sqrt{k_c})] \right),$$

$$T_2(M_0) \Big|_{x_0=x_c, y_0=y_c} = \bar{q}_0 K_\lambda^* \sqrt{\frac{\pi}{k_c}} \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n f(\xi_{3n} \sqrt{k_c}), \quad f(\eta) = \exp(\eta^2) \operatorname{erfc}(\eta). \quad (24)$$

Крім того, на основі (20), якщо $\eta = 0$, відповідно знаходимо:

$$H(r_0, 0) = \pi \sqrt{\frac{\pi}{k_c}} I_0\left(\frac{1}{2} k_c r_0^2\right) e^{-k_c r_0^2/2}, \quad (25)$$

$$T^*(x_0, y_0, 0) = \pi \sqrt{\frac{\pi}{k_c}} \left[I_0\left(\frac{1}{2} k_c r_0^2\right) e^{-k_c r_0^2/2} \right] \Big|_{r_0 = \sqrt{(x_0-x_c)^2 + (y_0-y_c)^2}}, \quad (26)$$

де $I_0(\zeta)$ – модифікована функція Бесселя нульового порядку.

Підраховували при $K_\lambda = 0.4$, $l = 1/\sqrt{k_c}$, $h = 0.5$, $a = b = 0$, $c = 0.8$, $a_0 = b_0 = c_0 = 0.5$. Для числового інтегрування використовували формули Гауса.

Досліджували точність розв'язку залежно від кількості елементарних квадратів, на які розбивали поверхні куба. Встановили, що при підході до поверхні порожнинами для досягнення необхідної точності потрібно збільшувати кількість розбиттів. Однак дані таблиці, де наведено результати обчислень безрозмірної температури $\theta = t/\bar{q}_0$ при $x_0 = 0.27272$, $y_0 = 0.25$ і різних значень z_0 , засвідчують, що в шарі для досягнення точності з трьома значущими цифрами достатньо обмежитися чотирма розбиттями сторін квадрата.

z_0	$n_x = n_y = n_z$				
	2	4	6	8	10
0.0	1.30967	1.30829	1.30821	1.30827	1.30835
0.25	0.76550	0.76415	0.76409	0.76418	0.76428
$h - 0$	0.29684	0.29637	0.29656	0.29677	0.29694
$h + 0$	0.29684	0.29637	0.29656	0.29677	0.29694
0.60	0.21498	0.21566	0.21609	0.21639	0.21661
0.70	0.11741	0.12211	0.12316	0.12370	0.12404
0.75	0.06109	0.07025	0.07175	0.07247	0.07289
0.78	0.02455	0.03811	0.03967	0.04054	0.04104
0.79	0.01079	0.02796	0.02861	0.02965	0.03036

Розподіл безрозмірних температур у площині $y_0 = 0.25$ для різних значень z_0 при $\gamma = 50$; 0.05 показано відповідно на рис. 2а-г, а для суцільного півпростору, тобто коли відсутня порожнина – на рис. 2. Криві 1–14 відповідають значенням $z_0 = 0$; 0.25; 0.5; 0.6; 0.7; 0.78; 0.9; 1.0; 1.2; 1.35; 1.7; 2.1; 2.5; 3.0.

Як бачимо, найістотніше порожнина впливає на якісний характер поведінки в її приповерхневих областях, причому за більшого і меншого значень γ це проявляється по-різному. З віддаленням від порожнини розподіли температур для меншого значення γ і у суцільному півпросторі практично збігаються.

У подальшому на основі одержаного наближеного розв'язку тривимірної стаціонарної задачі теплопровідності для двоскладового півпростору з паралелепіпедальною порожниною доцільно виконати відповідні дослідження для широкого діапазону теплофізичних та геометричних характеристик, в тому числі для малих товщин шару.

Запропонований підхід можна застосувати для визначення просторових стаціонарних розподілів температур з такими ж порожнинами в шаруватих тілах з більшою кількістю складових, якщо використати функції Гріна відповідних задач для суцільних шаруватих тіл [6].

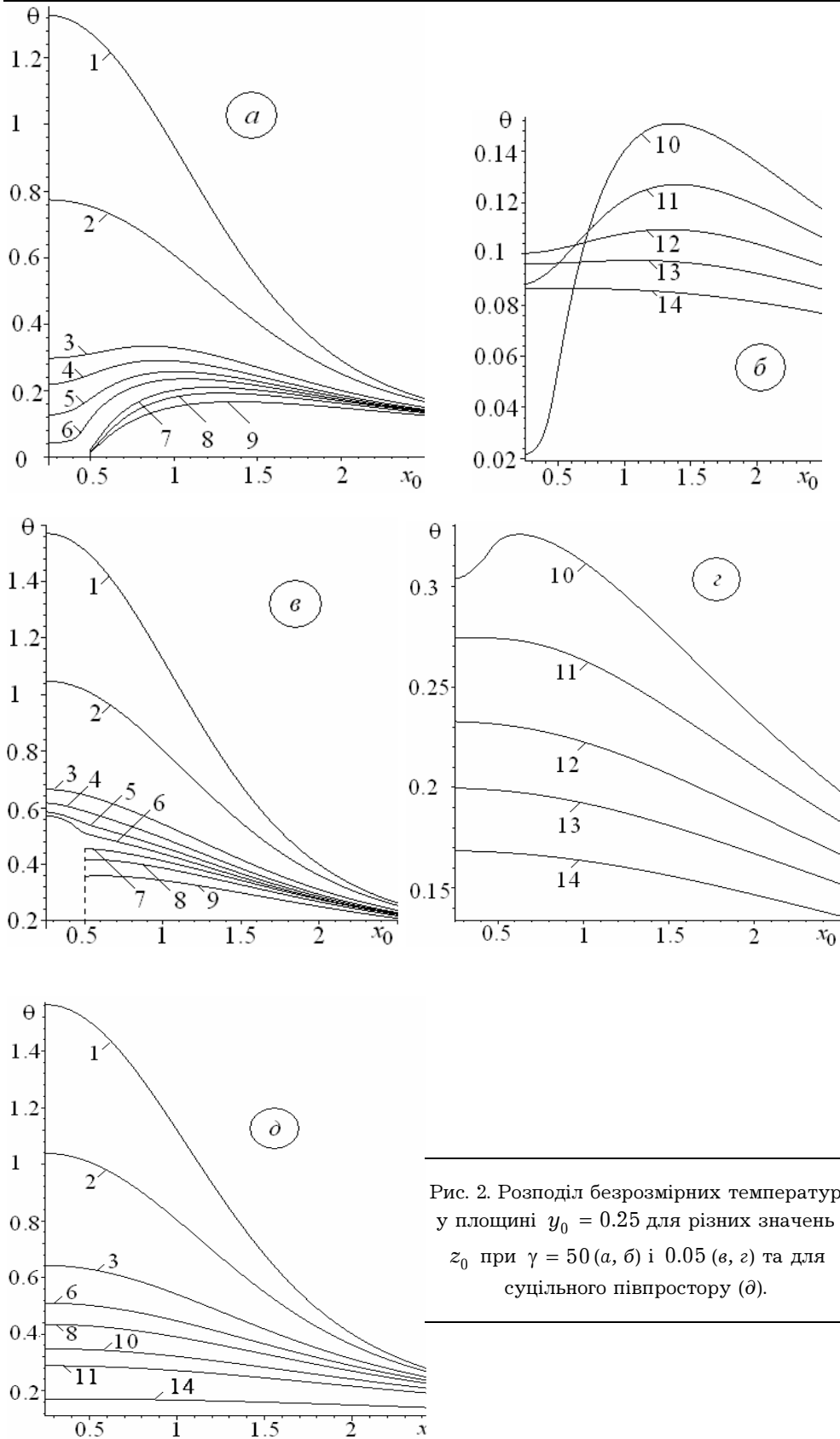


Рис. 2. Розподіл безрозмірних температур у площині $y_0 = 0.25$ для різних значень z_0 при $\gamma = 50$ (а, б) і 0.05 (в, г) та для суцільного півпростору (д).

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
2. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: Справ. / Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, И. В. Зуев, А. Н. Кокора.* – М.: Машиностроение, 1985. – 496 с.
4. *Пехович А. И., Жидких В. М.* Расчеты теплового режима твердых тел. – Л.: Энергия, 1976. – 352 с.
5. *Процюк Б. В., Верба І. І.* Фундаментальний розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – **57**. – С. 170–175.
6. *Процюк Б. В.* Функції Гріна стаціонарних задач теплопровідності для трансверсально-ізотропних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 3. – С. 80–88.
7. *Процюк Б. В.* Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Гріна термопружного стану шаруватих тіл: Автореф. дис. . . . д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 2006.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.

ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Проиллюстрирован подход к решению трехмерных стационарных задач теплопроводности для слоистых тел с полостями параллелепипедальной формы, который основан на использовании обобщенных функций и функций Грина соответствующих задач для сплошных слоистых тел. Приведены численные результаты для двухсоставного полупространства с полостью, имеющей форму куба, при нагреве концентрированным потоком тепла.

NUMERICAL APPROACH TO SOLVING STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR LAYER BODIES WITH AVITIES PARALLELEPIPED FORM

An approach to solving the 3D stationary heat conduction problems for layer bodies with cavities of parallelepiped form is illustrated. The approach is based on utilization of the generalized functions and Green's functions of the corresponding problems for solid layer bodies. The numerical results for a two-component half-space with cavity of a cube form under heating by concentrated heat flux are presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;
Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
21.09.10