

**О НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНАХ В СЛОИСТЫХ ПОЛЫХ ВОЛНОВОДАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИЕ СЛОИ, ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ**

*Рассмотрена неосесимметричная задача о распространении нормальных волн в слоистых полых волноводах с пьезокерамическими слоями, поляризованными в окружном направлении. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты электродами, которые закорочены. На границах раздела слоев выполняется условие совместной работы смежных слоев без скольжения и отрыва и непрерывности электрического поля. После разделения переменных и учета замкнутости волновода в окружном направлении разрешающие функции представлены в виде комбинации стоячих волн в окружном направлении и бегущих волн в продольном направлении. В результате исходная трехмерная задача в частных производных сведена к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Полученная задача решена с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска по радиальной координате. Приведены результаты численного анализа задачи о распространении неосесимметричных волн в слоистом волноводе с чередованием металлических и пьезокерамических слоев, поляризованных в окружном направлении.*

Ультразвуковые методы неразрушающего контроля элементов конструкций предполагают понимание природы распространения акустических волн в волноводах. Пьезокерамические волноводы в виде кругового цилиндра широко распространены в акустоэлектронике. Поэтому понятен интерес к исследованию волновых процессов, происходящих в пьезокерамических телах цилиндрической формы. Настоящее исследование может оказаться полезным для таких приложений как, например, обнаружение дефектов и включений конечных размеров в поперечном сечении волновода.

Вопросу распространения акустоэлектрических волн в однородных цилиндрических волноводах посвящено значительное количество работ. Начиная с Похгаммера [19] и Кри [18], вопросу распространения упругих гармонических волн в изотропных и анизотропных цилиндрах кругового поперечного сечения посвящены работы [14, 16, 17] и др.

Когда материал цилиндра пьезоэлектрический, задача существенно усложняется в связи с необходимостью учета связанности полей [1, 2, 7, 8]. В случае осевой поляризации пьезокерамики задача о распространении акустоэлектрических волн в пьезокерамическом цилиндре допускает представление решения в виде комбинации цилиндрических функций [6, 20–22]. Для других направлений поляризации такого представления не найдено. Осесимметричную задачу о распространении акустоэлектрических волн в однородных пьезокерамических волноводах исследовали ранее [3, 12, 15]. Неосесимметричную задачу – в работах [4, 9–11]. Для слоистых же цилиндров, кроме удовлетворения решений на ограничивающих тело поверхностях, необходимо также удовлетворять условия сопряжения, что приводит к повышению порядка систем уравнений. Была предпринята попытка [13] исследовать волновые процессы в слоистых пьезокерамических структурах. Для решения этих задач использовали метод, основанный на разложении искомых функций в степенные ряды. Однако из-за сложности его реализации не удалось получить подробную количественную информацию.

Цель настоящей работы – исследование распространения неосесимметричных волн в слоистых волноводах, содержащих пьезокерамические слои, поляризованные в окружном направлении. При этом боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и покрыты электродами, которые закорочены.

Неосесимметричные движения  $i$ -го слоя в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^i}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^i}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения электростатики для  $i$ -го слоя

$$\frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} = 0; E_r^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial r}; E_\theta^i = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi^i}{\partial \theta}; E_z^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial z}. \quad (2)$$

Соотношения Коши для  $i$ -го слоя

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{u_r^i}{r}; \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; 2\varepsilon_{r\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r}; \\ 2\varepsilon_{rz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; 2\varepsilon_{\theta z}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

здесь  $\sigma_{jk}^i$  – компоненты тензора напряжений;  $\rho^i$  – плотность материала;  $\omega$  – круговая частота;  $u_j^i$  – компоненты вектора перемещений;  $D_j^i$  – компоненты вектора электрической индукции;  $E_j^i$  – компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\phi^i$  – электростатический потенциал;  $\varepsilon_{jk}^i$  – компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для  $i$ -го пьезокерамического слоя, поляризованного в окружном направлении

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= c_{11}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_z^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{33}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_z^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{12}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_z^i; \\ \sigma_{\theta z}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{\theta z}^i - e_{15}^i E_z^i; \sigma_{r\theta}^i = 2c_{55}^i \varepsilon_{r\theta}^i - e_{15}^i E_r^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2c_{66}^i \varepsilon_{rz}^i; D_\theta^i = e_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{33}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{13}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_\theta^i; \\ D_r^i &= 2e_{15}^i \varepsilon_{r\theta}^i + \varepsilon_{11}^i E_r^i; D_z^i = 2e_{15}^i \varepsilon_{\theta z}^i + \varepsilon_{11}^i E_z^i, \end{aligned} \quad (4)$$

а для изотропного слоя

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{zz}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{rz}^i. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $c_{jk}^i$  – компоненты тензора модулей упругости;  $e_{jk}^i$  – компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{jk}^i$  – компоненты тензора диэлектрической прони-

цаемости материала;  $\nu^i$  – коэффициент Пуассона;  $E^i$  – модуль Юнга.

На боковых поверхностях цилиндра (при  $r = R_0 \pm h$ ) задаем следующие граничные условия: поверхности свободны от внешних усилий  $\sigma_{rr}^1 = \sigma_{r\theta}^1 = \sigma_{rz}^1 = \sigma_{rr}^N = \sigma_{r\theta}^N = \sigma_{rz}^N = 0$  и покрыты электродами, которые закорочены,  $\varphi^1 = \varphi^N = 0$ .

На поверхностях контакта  $r = r_i$  имеют место условия совместной работы  $i$ -го и  $(i+1)$ -го слоев без скольжения и отрыва и непрерывности электрического поля:

$$\sigma_{rr}^i = \sigma_{rr}^{i+1}; \sigma_{r\theta}^i = \sigma_{r\theta}^{i+1}; \varphi^i = \varphi^{i+1}; u_r^i = u_r^{i+1}; u_z^i = u_z^{i+1}; D_r^i = D_r^{i+1}. \quad (6)$$

Здесь  $R_0$  – радиус серединной поверхности цилиндра;  $h$  – половина толщины цилиндра. В дальнейшем индекс  $i$  опускаем.

В качестве основных неизвестных выбираем функции, через которые формулируются условия контакта смежных слоев и условия на ограничивающих тело поверхностях. Разрешающую систему уравнений для данного класса задач записываем так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left( \frac{c_{13}}{c_{11}} - 1 \right) \sigma_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r^2 c_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \\ &- \left( \frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r - \frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\Delta_4}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} &= \frac{c_{13}}{r c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \left( e_{15} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\Delta_1}{r^2 c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi + \frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\ &- \left( \frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + c_{55} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\theta - \left( \frac{\Delta_3}{c_{11}} + c_{55} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= \frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \left( \frac{\Delta_6}{c_{11}} + e_{15} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z} + \frac{\Delta_3}{r c_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \\ &- \left( \frac{\Delta_3}{c_{11}} + c_{55} \right) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \left( \frac{c_{55}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_7}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{15}}{\Delta} \sigma_{r\theta} - \frac{c_{55}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{c_{11}} \sigma_{rr} + \frac{e_{13}}{r c_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{c_{13}}{r c_{11}} u_r + \frac{c_{13}}{r c_{11}} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (7) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta + \frac{e_{51}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{c_{66}} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{15}}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} + \left( \frac{\Delta_8}{c_{11}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon_{11} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi + \frac{\Delta_1}{r^2 c_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ &+ \left( \frac{\Delta_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - e_{15} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_\theta - \left( \frac{\Delta_6}{c_{11}} + e_{15} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} D_r. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:  $\Delta = c_{55} \varepsilon_{11} + e_{15}^2$ ;  $\Delta_1 = c_{13} e_{13} - c_{11} e_{33}$ ;

$\Delta_2 = c_{11} c_{33} - c_{13}^2$ ;  $\Delta_3 = (c_{11} - c_{12}) c_{13}$ ;  $\Delta_4 = (c_{11} - c_{13}) e_{13}$ ;  $\Delta_5 = c_{11} e_{33} - c_{13} e_{13}$ ;

$\Delta_6 = (c_{11} - c_{12}) e_{13}$ ;  $\Delta_7 = c_{11}^2 - c_{12}^2$ ;  $\Delta_8 = c_{11} \varepsilon_{33} + e_{13}^2$ .

Для изотропного материала

$$c_{11} = c_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad c_{12} = c_{21} = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad c_{66} = \frac{E}{4(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad e_{ij} = 0.$$

Используем метод разделения переменных, а также замкнутость цилиндрического тела в направлении окружной координаты. Тогда разрешающие

функции представляем в виде стоячих волн в окружном направлении и бегущих в направлении:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{rz}(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); \varphi = h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \\ u_r &= hu_1(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); u_\theta = hu_2(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \\ u_z &= hu_3(r) \cos m\theta \sin(kz - \omega t); D_r = D_r(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя разложение (8), систему (7), граничные и смежные условия превращаем в краевую задачу на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dr} &= A(x, \Omega)\mathbf{R}; \quad B(-1) = 0; \quad B(1) = 0; \quad \mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_\theta, u_z, D_r\} \\ A &= \|a_{lm}\| \quad (l, m = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (9)$$

Ненулевые элементы матрицы  $A$  равны:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \tilde{x} \left( \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} - 1 \right); \quad a_{11} = \tilde{x} \left( \frac{\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} - 1 \right); \quad a_{12} = m\tilde{x}; \quad a_{13} = k; \quad a_{14} = -\frac{m\tilde{x}^2\Delta_1}{\tilde{c}_{11}}; \\ a_{15} &= \left( \frac{\tilde{x}^2\Delta_2}{\tilde{c}_{11}} - \Omega^2 \right); \quad a_{16} = -\frac{m\tilde{x}^2\Delta_2}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{17} = \frac{k\tilde{x}\Delta_3}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{21} = -\frac{m\tilde{x}\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{22} = -2\tilde{x}; \\ a_{24} &= k^2\tilde{e}_{15} - \frac{m^2\tilde{x}^2\Delta_1}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{25} = -\frac{m\tilde{x}^2\Delta_2}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{26} = \frac{m^2\tilde{x}^2\Delta_2}{\tilde{c}_{11}} + k^2\tilde{c}_{55} - \Omega^2; \\ a_{27} &= \left( \frac{\Delta_3}{\tilde{c}_{11}} + \tilde{c}_{55} \right) mk\tilde{x}; \quad a_{31} = -\frac{k\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{33} = -\tilde{x}; \quad a_{34} = -\left( \frac{\Delta_6}{\tilde{c}_{11}} + \tilde{e}_{15} \right) mk\tilde{x}; \\ a_{35} &= -\frac{k\tilde{x}\Delta_3}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{36} = \left( \frac{\Delta_3}{\tilde{c}_{11}} + \tilde{c}_{55} \right) mk\tilde{x}; \quad a_{37} = m^2\tilde{x}^2\tilde{c}_{55} + \frac{k^2\Delta_7}{\tilde{c}_{11}} - \Omega^2; \quad a_{42} = \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta}; \\ a_{48} &= -\frac{\tilde{c}_{55}}{\Delta}; \quad a_{51} = \frac{1}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{54} = \frac{m\tilde{x}\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{55} = -\frac{\tilde{x}\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{56} = \frac{m\tilde{x}\tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{57} = -\frac{k\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}}; \\ a_{62} &= \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta}; \quad a_{65} = -m\tilde{x}; \quad a_{66} = \tilde{x}; \quad a_{68} = \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta}; \quad a_{73} = \frac{1}{\tilde{c}_{66}}; \quad a_{75} = -k; \quad a_{81} = \frac{m\tilde{x}\tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}}; \\ a_{84} &= -\left( \frac{m^2\tilde{x}^2\Delta_8}{\tilde{c}_{11}} + k^2\tilde{e}_{11} \right); \quad a_{55} = -\frac{m\tilde{x}^2\Delta_1}{\tilde{c}_{11}}; \quad a_{86} = k^2\tilde{e}_{15} - \frac{m^2\tilde{x}^2\Delta_1}{\tilde{c}_{11}}; \\ a_{87} &= -\left( \frac{\Delta_6}{\tilde{c}_{11}} + \tilde{e}_{15} \right) mk\tilde{x}; \quad a_{99} = -\tilde{x}. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0\lambda}}; \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}; x = \frac{r - R_0}{h}; \varepsilon = \frac{h}{R_0}; \tilde{x} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x};$$

$h$  – половина толщины цилиндра;  $\rho$  – плотность его материала;  $R_0$  – радиус срединной поверхности цилиндра;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\lambda = 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

Граничные условия представим в виде:

$$B_1\mathbf{R}(-1) = 0, B_2\mathbf{R}(1) = 0. \quad (10)$$

Матрицы

$$B_1 = B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ниже приведены результаты численного анализа соотношений (9), (10). На рис. 1 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа  $\zeta = \frac{kh}{\pi}$ . При этом  $m = 1$ ,  $\varepsilon = 0,25$ . Цилиндр состоит из трех слоев. Толщина внешних равна  $h/2$ , а внутреннего –  $h$ . Внешние слои – стальные со следующими характеристиками:

$$E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \nu = 0,28; \rho_m = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Внутренний слой – пьезокерамика PZT 4 с такими характеристиками:

$$c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \\ c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_{13} = -5,2 \text{ К/м}^2; e_{15} = 12,7 \text{ К/м}^2; e_{33} = 15,1 \text{ К/м}^2; \varepsilon_{11} = 730; \\ \varepsilon_{33} = 635; \rho_n = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

При  $\varepsilon = 0$  и  $k = 0$  приходим к задаче о колебаниях плоского слоя. Так, для однослойного цилиндра из металла имеем следующие формулы для частот:

$$U(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_m}} = 0; 2,905; 5,81; \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$V(n) = W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho_m}} = 0; 1,606; 3,211; \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \square$$

Для однослойного цилиндра из пьезокерамики PZT 4

$$U(2n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho_n}} = 0; 2,138; 4,277; \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \square$$

$$V(2n) = \pi n \sqrt{\frac{1}{\rho_n} \left( c_{55} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}} \right)} = 2,580; 5,159; \dots \square$$

$$V(2n-1) = \lambda_n \sqrt{\frac{1}{\rho_n} \left( c_{55} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}} \right)} = 0,962; 3,782; \dots \square$$

$$W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho_n}} = 0; 1,003; 2,007; \dots \quad n = 0, 1, 2, \dots \square$$

здесь величины  $\lambda_n$  – ненулевые корни уравнения

$$\lambda \cos \lambda - \frac{e_{15}^2}{e_{15}^2 + c_{55}\varepsilon_{11}} \sin \lambda = 0.$$

Поскольку частота слоистого цилиндра ограничена сверху соответствующей частотой для сплошного металлического цилиндра, а снизу – частотой для сплошного пьезокерамического, для слоистого цилиндра используем аналогичные обозначения.

Сплошные линии – ветви дисперсионных соотношений для слоистого цилиндра, пунктирные – для однородного такой же геометрии из пьезокерамики PZT 4, штрихпунктирные – для однородного такой же геометрии из металла. Частота собственных колебаний слоистого цилиндра лежит в некоем «коридоре» между собственной частотой для однослойного цилиндра из пьезокерамики и частотой для однослойного из стали.

На рис. 2 представлена зависимость первых четырех частот от безразмерного волнового числа для значения  $m = 2$ . Материал и геометрия цилиндра такие же, как и для случая, представленного на рис. 1. Сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики PZT 4, штрихпунктирными – для однородного такой же геометрии из металла.

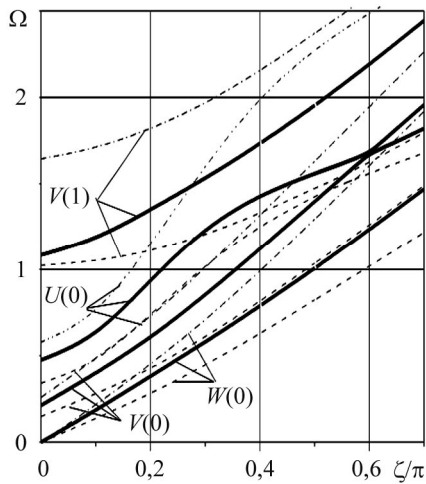


Рис. 1.

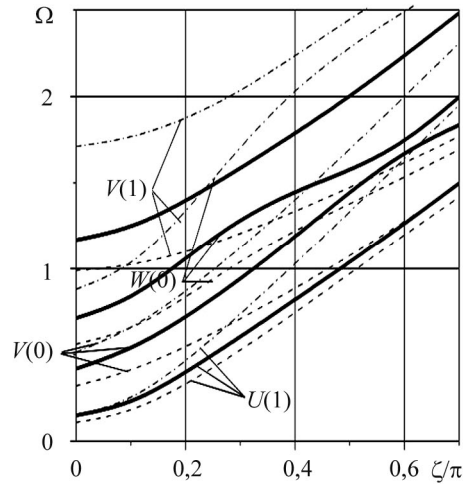


Рис. 2.

Как известно, краевая задача (9), (10) о распространении нормальных волн в слоистом цилиндрическом волноводе математически совпадает с задачей о свободных неосесимметричных колебаниях слоистого цилиндра с шарнирным опиранием на торцах. Рассмотрим трехслойный цилиндр со следующими геометрическими характеристиками: внутренний радиус –  $R_{внутр.} = 3$ , внешний –  $R_{внешн.} = 5$  и длина –  $L = 10$  безразмерных единиц.

При таком выборе геометрических характеристик значение  $\varepsilon = \frac{h}{R_0} = 0,25$  совпадает со значениями, принятыми для расчетов в предыдущей задаче.

Для того чтобы определить собственные частоты колебаний данного цилиндра необходимо найти точки пересечения дисперсионных ветвей (для значений  $m = 0, m = 3, m = 4, \dots$ ) с линиями  $\zeta = 0, 1; 0, 2; \dots$  и расположить их в порядке возрастания.

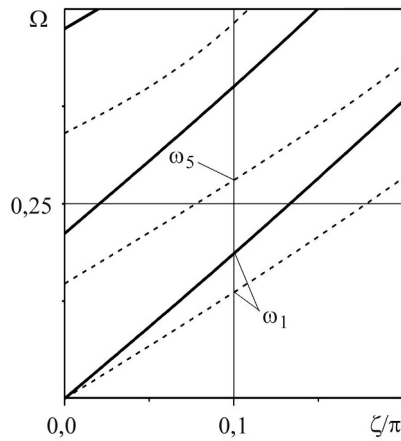


Рис. 3.

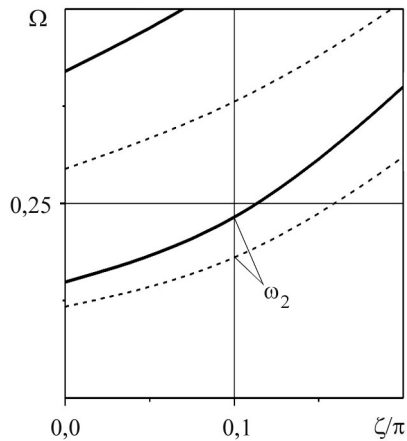


Рис. 4.

Анализ частотного спектра показывает, что для того, чтобы определить первые пять собственных частот, достаточно четырех первых значений  $m$  (рис. 3–6):  $m = 0$  (рис. 5),  $m = 1$  (рис. 3),  $m = 2$  (рис. 4) и  $m = 3$  (рис. 6). Сплошной линией обозначены дисперсионные кривые для неоднородного цилиндра, а пунктирной – для однородного из пьезокерамики PZT 4.

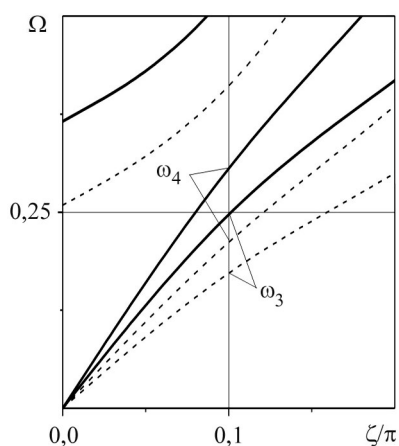


Рис. 5.

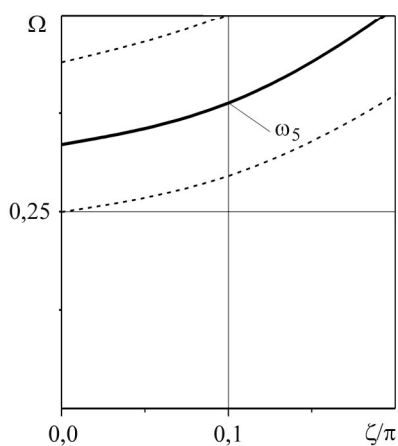


Рис. 6.

В табл. 1 приведены числовые значения первых пяти частот для трехслойного и сплошного пьезокерамического цилиндров. Показано также количество полуволн в окружном и осевом направлениях, а также, к какой относительной погрешности при вычислении собственных частот приведет игнорирование неоднородности.

Таблица.1

№ частоты	Много-слойный цилиндр	Число полуволн в окружном направлении	Число полуволн в осевом направлении	Сплошной цилиндр из пьезокерамики PZT 4	Число полуволн в окружном направлении	Число полуволн в осевом направлении	Относительное расхождение в %
1	0,1834	1	1	0,1346	1	1	26,6
2	0,2129	2	1	0,1651	2	1	22,5
3	0,2667	0	1	0,1849	0	1	30,7
4	0,3242	0	1	0,2232	0	1	31,2
5	0,3726	3	1	0,2781	1	1	25,4

Как видно первая собственная частота не является собственной частотой осесимметричных колебаний, таковыми являются только третья и четвертая собственные частоты. При этом третья частота является частотой продольных колебаний, а четвертая – крутильных. Собственные частоты, полученные в данной работе для сплошного цилиндра из пьезокерамики PZT 4, полностью совпадают с полученными на основании подхода, разработанного в работе [5]. Естественно, что объем работ при этом совершенно разный. Однако, помимо собственных частот, нам удалось получить также информацию о формах колебаний. Расхождение в значениях частот довольно существенное. Учитывая тот факт, что толщина пьезокерамического слоя и суммарная толщина металлических слоев одинаковы, а собственные частоты для слоистого цилиндра лежат в «коридоре» значений собственных частот для соответствующих однородных цилиндров, можно предположить, что значения собственных частот колебаний слоистого цилиндра можно приближенно определить как среднее арифметическое собственных частот колебаний соответствующих однородных цилиндров. В табл. 2 приведены результаты такого сравнения.

Таблица 2.

№ частоты	Многослойный цилиндр	Среднее значение частоты	Относительное расхождение в %
1	0,1834	0,1736	5,3
2	0,2124	0,1972	7,2
3	0,2667	0,2530	5,2
4	0,3242	0,3092	4,6
5	0,3726	0,3482	6,5

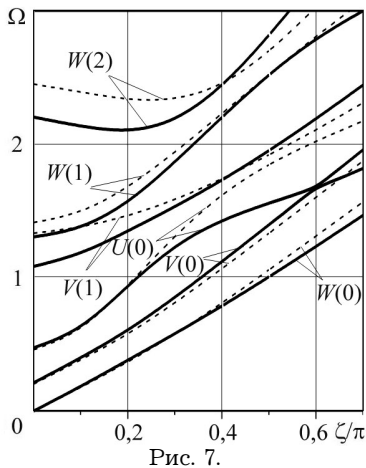


Рис. 7.

Как видно из таблицы, это вполне допустимо, поскольку первые собственные частоты лежат в низкочастотной области. Для более высоких частот расхождение будет значительным. Это видно из рис. 7, где сравнены соответствующие частоты для  $m = 1$ . Сплошными линиями обозначены частоты собственных колебаний слоистого цилиндра, а пунктирными – среднее значение частот колебаний однородных цилиндров.

- Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С.75–84.
- Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Особливості числового розв'язування зв'язаних задач про визначення електромагнітних, теплових і механічних полів у деформуваних термочутливих електропровідних тілах за квазіусталених електромагнітних навантажень // Там же. – 2007. – **50**, № 3. – С. 166–177.
- Григоренко А. Я., Лоза И. А., Шульга Н. А. Распространение осесимметричных волн в полом пьезокерамическом цилиндре // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 3 – С. 35–39.
- Григоренко А. Я., Лоза И. А., Шульга Н. А. Распространение неосесимметричных волн в пьезокерамическом полом цилиндре // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 6. – С. 11–16.
- Григоренко А. Я., Лоза И. А. О неосесимметричных колебаниях полых пьезокерамических цилиндров с окружной поляризацией // Там же. – 2010. – **46**, № 10. – С. 78–84.
- Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе // Дефектоскопия. – 1975. – № 4. – С. 27–32.
- Карнаухов В. Г., Ткаченко Я. В., Зражевська В. Ф. Дослідження гармонічних коливань сферичної оболонки з фізично нелінійного п'єзоелектричного матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, №1. – С.125–129.
- Ковалев Ю. Д., Стативка Е. Н. Изгиб пьезокерамического неоднородного слоя при скользящей заделке его торцов // Там же. – 2006. – **49**, № 3. – С. 86–95.
- Лоза И. А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в полом цилиндрическом волноводе, поляризованном в окружном направлении // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 12. – С. 19–23.
- Лоза И. А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в полом пьезокерамическом цилиндре с радиальной поляризацией // Там же. – 1985. – **21**, № 1. – С. 22–27.



11. Лоза И. А., Шульга Н. А. Распространение акустоэлектрических волн в пьезо-керамическом полом цилиндре и слое // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 86–90.
12. Лоза И. А., Шульга Н. А. Кинематический анализ распространения акустоэлектрических волн в полом пьезокерамическом цилиндре с осевой поляризацией // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 1. – С. 115–120.
13. Лоза И. А., Медведев К. В., Шульга Н. А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в слоистых цилиндрах // Там же. – 1987. – 23, № 8. – С. 3–6.
14. Шульга Н. А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре // Там же. – 1974. – 10, № 1. – С. – 14–18.
15. Шульга Н. А., Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные электроупругие волны в полом пьезокерамическом цилиндре // Там же. – 1984. – 20, № 1. – С. 26–32.
16. Achenbach J. Wave Propagation in Elastic Solids. – 1984. North-Holland, New York, 576 p.
17. Armenakas A., Reitz E. Propagation of harmonic waves in orthotropic circular cylindrical shells // J. Appl. Mech. – 1973. – 40. – P. 168–147.
18. Chree C. // Quart. J. Math. – 1890. – 24. – P. 340–354.
19. Pochhammer L. J. Reine Angew// Math. – 1876. – 81. –P. 324
20. Paul H. S. Torsional vibration of circular cylinder of piezoelectric  $\beta$ -quartz // Arch. Mech. Stosow / – 1962. – 14, № 5. – P. 127–134.
21. Paul H. S. Vibration of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystals // J. Acoust. Soc. Amer. – 1966. – 40, № 5. – P. 1077–1080.
22. Shatalov Y., Every A. G., Yenwong-Fai A. S. Analysis of non-axisymmetric wave propagation in a homogeneous piezoelectric solid circular cylinder of transversely isotropic material // I. J. Solids and Struct. – 2009. – 46. – P. 837–850.

#### **ПРО НЕОСЕСИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ У ПОРОЖНИСТИХ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРАХ З П'ЄЗОКЕРАМІЧНИМИ ШАРАМИ, ПОЛЯРИЗОВАНИМИ В КОЛОВОМУ НАПРЯМІ.**

*Розглянуто задачу про поширення неосесимметричних хвиль у порожнистих шаруватих циліндрах з п'єзокерамічними шарами, поляризованими у коловому напрямі. Бічні поверхні циліндра вільні від навантажень та вкриті тонкими закороченими електродами. На поверхнях поділу шарів виконуються умови сумісної роботи без проковзування та відриву, а також неперервності по електричному полю. Після розділення змінних і врахування замкненості хвилеводу у коловому напрямі, функції розв'язку подано у вигляді комбінації стоячих хвиль у коловому напрямі та біжучих у поздовжньому. В результаті вихідну тривимірну задачу у частинних похідних зведено до крайової задачі на власні значення у звичайних диференціальних рівняннях. Задачу розв'язано стійким методом дискретної ортогоналізації в поєднанні з методом покорокового пошуку. Наведені результати чисельного аналізу задачі про поширення неосесимметричних хвиль у шаруватому хвилеводі з чергуванням металевих та п'єзокерамічних шарів, поляризованих у коловому напрямі.*

#### **ABOUT OF NON AXYSIMMETRICAL WAVES IN HOLLOW MULTILAYERED CYLINDERS WITH PIEZOCERAMIC LAYERS POLARIZED IN CIRCUMFERENTIAL DIRECTION.**

*In this article problem about nonaxisymmetric waves in the hollow multilayered piezoceramic cylinder with piezoceramic lays polarized in circumferential direction is considered. Lateral surfaces are free from external loading and are covered by thin electrodes which are short-circuited. On the surfaces between layers are continuity conditions without slips and breaks. After separate of variables and taking into account that cylindrical shell is closed in circumferential direction, functions of solution are presented by combination standing waves in circumferential direction and progressing wave in axial direction. The initial three-dimensional problem of theory of electroelasticity in the partial derivatives is reduced to the boundary value problem on eigenvalue for the system of ordinary differential equations for the radial coordinate. The problem obtained is solved by stable numerical method of discrete orthogonalisation coupled with the incremental search method. There numerical results for the problem about progressing non axisymmetrical waves in multilayered cylinder with interchanging metal and piezoceramic layers, polarized in circumferential direction are presented.*