УДК 517.95

Б. Й. Пташник[1], С. М. Репетило[2]

КРАЙОВА ЗАДАЧА ЗІ ЗМІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ З АНАЛІТИЧНИМИ СИМВОЛАМИ

У безмежному шарі досліджено крайову задачу зі змішаними умовами на межі області для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами за просторовими координатами зі змінними за часом коефіцієнтами, що мають аналітичні символи. Встановлено однозначну розв'язність задачі у деяких просторах основних і узагальнених функцій; при цьому використано техніку диференціальних операторів нескінченного порядку, розроблену Ю. А. Дубінським.

Вступ. Задачі для лінійних еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами вивчали у різних аспектах багато авторів [1–5, 7–9, 12–14]. Зокрема, розглянуто [1, 5, 9] задачі з локальними двоточковими та багатоточковими умовами, а в [2–4] – з нелокальними багатоточковими умовами за часовою змінною для рівнянь із псевдодиференціальними операторами з аналітичними символами, досліджено [12–14] задачу Коші та задачі з багатоточковими умовами для рівнянь із дробовими похідними за часом, що містять псевдодиференціальні оператори за просторовими змінними з аналітичними та неаналітичними символами.

У цій статті, яка примикає до праць [1, 4], у $(p+1)$-вимірному шарі ($p \ge 1$) досліджено крайову задачу зі змішаними умовами на межі області для еволюційного рівняння порядку $2n$ ($n \ge 1$) за часовою змінною, що містить псевдодиференціальні оператори за просторовими координатами з аналітичними символами зі змінними за часом коефіцієнтами. Встановлено однозначну розв'язність та побудовано розв'язок задачі у просторах основних і узагальнених функцій, які запроваджені та вивчені у праці [1].

Основні позначення та допоміжні відомості [1]. $\mathbb{Z}_+^p$ – множина точок простору $\mathbb{R}^p$, $p \ge 1$, з цілими невід'ємними координатами, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}_x^p$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p) \in \mathbb{R}_\xi^p$, $\xi^s = \xi_1^{s_1} \cdots \xi_p^{s_p}$, $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_p\xi_p$; $Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \colon 0 < t < T, x \in \mathbb{R}_x^p\}$, $D = \left(D_1, \ldots, D_p\right)$, $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $D^s = D_1^{s_1} \cdots D_p^{s_p}$; $A(D) := \sum_{|s|=0}^{\infty} a_s D^s$, $a_s \in \mathbb{C}$, – псевдодиференціальний оператор, символ якого $A(\xi) := \sum_{|s|=0}^{\infty} a_s \xi^s$ є аналітичною функцією в області $G \subset \mathbb{R}_\xi^p$; $\tilde{\upsilon}(\xi)$ – перетворення Фур'є функції $\upsilon(x)$; $H^{+\infty}(G)$ – простір функцій $\upsilon \in L_2(\mathbb{R}_x^p)$, для яких $\tilde{\upsilon}(\xi)$ є фінітними в області $G \subset \mathbb{R}_\xi^p$; $[H^{+\infty}(G)]^*$ – простір узагальнених функцій над $H^{+\infty}(G)$; $H^{-\infty}(G) = [H^{+\infty}(-G)]^*$, $-G = \{\xi \in \mathbb{R}_\xi^p : -\xi \in G\}$; $C^k\left([0,T], H^{\pm\infty}(G)\right)$ – простір функцій $\upsilon(t, x)$, які для кожного $t \in [0, T]$ є функціями з простору $H^{\pm\infty}(G)$ і неперервно залежать від t разом із похідними за t до порядку k.

Якщо $\upsilon \in H^{+\infty}(G)$, то $A(D)\upsilon(x) := (2\pi)^{-p} \int\limits_G A(\xi)\tilde{\upsilon}(\xi)\exp(ix, \xi)\,d\xi$; якщо $\upsilon \in \left[H^{+\infty}(G)\right]^*$, то для кожної функції $\phi \in H^{+\infty}(G)$ $\langle A(D)\upsilon(x), \phi(x)\rangle :=$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 7–14.

$:= \langle \upsilon(x), A(-D)\phi(x)\rangle$. Простір $H^{+\infty}(G)$ ($[H^{+\infty}(G)]^*$) інваріантний відносно оператора $A(D)$ ($A(-D)$). Для довільної аналітичної в G функції $A(\xi)$ відображення $A(D)$: $H^{\pm\infty}(G) \to H^{\pm\infty}(G)$ (де знакові «+» відповідає знак «+», а знакові «−» − знак «−») є неперервними і утворюють неформальну алгебру псевдодиференціальних операторів, що ізоморфна алгебрі аналітичних у G функцій.

Довільний функціонал $\upsilon \in [H^{+\infty}(G)]^*$

$$\upsilon(x) = A_0(-D)\upsilon_0(x), \tag{1}$$

де $A_0(-D)$ − деякий псевдодиференціальний оператор, такий, що функція $A_0(\xi)$ аналітична в G, а $\upsilon_0 \in L_2(\mathbb{R}_x^p)$ і $\operatorname{supp}\tilde{\upsilon}_0(\xi) \subset G$.

Формулювання задачі. В області Q розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x) := \frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,D)\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} = 0, \ \ (t,x) \in Q, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \phi_r(x), \ \ \left.\frac{\partial^{2r-1}u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \phi_{n+r}(x), \ \ x \in \mathbb{R}_x^p, \ r \in \{1,\dots,n\}, \tag{3}$$

де $A_k(t,D)$, $k \in \{0,1,\dots,2n-1\}$ − лінійні диференціальні оператори (взагалі, нескінченного порядку) з неперервними за t коефіцієнтами, $t \in [0,T]$. Вважатимемо, що для кожного $t \in [0,T]$ символи $A_k(t,\xi)$ цих операторів є аналітичними за ξ функціями в деякій області $G_1 \subset \mathbb{R}_\xi^p$.

Розв'язність у просторі основних функцій. У задачі (2), (3) покладемо формально $D \leftrightarrow \xi$, де $\xi \in G_1$, і розглянемо таку сім'ю $2n$ крайових задач для звичайного диференціального рівняння з параметром ξ:

$$\frac{d^{2n}w_j(t,\xi)}{dt^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,\xi)\frac{d^k w_j(t,\xi)}{dt^k} = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{d^{2(r-1)}w_j(t,\xi)}{dt^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \delta_{rj}, \ \left.\frac{d^{2r-1}w_j(t,\xi)}{dt^{2r-1}}\right|_{t=T} = \delta_{n+r,j}, \ \ r \in \{1,\dots,n\}, \tag{5}$$

де $j \in \{1,\dots,2n\}$, δ_{pq} − символ Кронекера. Позначимо через $v_1(t,\xi),\dots,v_{2n}(t,\xi)$ нормальну фундаментальну систему розв'язків рівняння (4). Оскільки для кожного $t \in [0,T]$ функції $A_k(t,\xi)$ аналітично залежать від ξ в області G_1, то, згідно з теоремою Пуанкаре [10] про аналітичну залежність від параметра розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, кожна функція $v_j(t,\xi)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, аналітична за ξ в області G_1 для кожного $t \in [0,T]$. Для кожного $j \in \{1,\dots,2n\}$ характеристичний визначник [6] задачі (4), (5) такий:

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} v_1(0,\xi) & \dots & v_{2n}(0,\xi) \\ \partial^2 v_1(0,\xi)/\partial t^2 & \dots & \partial^2 v_{2n}(0,\xi)/\partial t^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial^{2n-2}v_1(0,\xi)/\partial t^{2n-2} & \dots & \partial^{2n-2}v_{2n}(0,\xi)/\partial t^{2n-2} \\ \partial v_1(T,\xi)/\partial t & \dots & \partial v_{2n}(T,\xi)/\partial t \\ \partial^3 v_1(T,\xi)/\partial t^3 & \dots & \partial^3 v_{2n}(T,\xi)/\partial t^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial^{2n-1}v_1(T,\xi)/\partial t^{2n-1} & \dots & \partial^{2n-1}v_{2n}(T,\xi)/\partial t^{2n-1} \end{vmatrix}, \quad \xi \in G_1. \tag{6}$$

Для кожного $\xi \in G_1$ розв'язки задач (4), (5) визначають формули

$$w_j(t,\xi) = \sum_{l=1}^{2n} C_{jl} v_l(t,\xi), \quad j \in \{1,\ldots,2n\},$$

де C_{jl}, $l \in \{1,...,2n\}$, визначають зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{2n} C_{jl} \left. \dfrac{d^{2r-2} v_1(t,\xi)}{dt^{2r-2}} \right|_{t=0} = \delta_{rj}, \\ \sum_{l=1}^{2n} C_{jl} \left. \dfrac{d^{2r-1} v_1(t,\xi)}{dt^{2r-1}} \right|_{t=T} = \delta_{n+r,j}, \end{cases} \quad r \in \{1,\ldots,n\},$$

визначник якої збігається з визначником $\Delta(\xi)$.

Позначимо: $G_2 = G_1 \setminus \Gamma_1$, де $\Gamma_1 = \{\xi \in G_1 : \Delta(\xi) = 0\}$. Для кожної із задач (4), (5), якщо $\xi \in G_2$, існує єдиний розв'язок із класу $C^{2n}([0,T])$. Ці розв'язки визначають формули

$$w_j(t,\xi) = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\Delta_{jl}(\xi)}{\Delta(\xi)} v_l(t,\xi), \quad j \in \{1,\ldots,2n\}, \tag{7}$$

де $\Delta_{jl}(\xi)$, $j,l \in \{1,\ldots,2n\}$ – алгебричне доповнення у визначнику $\Delta(\xi)$ елемента, який стоїть на перетині l-го стовпця та j-го рядка. З формул (6), (7) видно, що функції $w_j(t,\xi)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, для кожного $t \in [0,T]$ є аналітичними за ξ в області G_2.

Теорема 1. *Нехай* $\phi_j \in H^{+\infty}(G_2)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u(t,x)$ *задачі (2), (3) з простору* $C^{2n}\left([0,T], H^{+\infty}(G_2)\right)$.

Доведення. Кожній функції $w_j(t,\xi)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, із (7) поставимо у відповідність псевдодиференціальний оператор $W_j(t,D) = \sum_{l=1}^{2n} \dfrac{\Delta_{jl}(D)}{\Delta(D)} v_l(t,D)$, дію якого на $\upsilon \in H^{+\infty}(G_2)$ визначає формула

$$W_j(t,D)\upsilon(x) := (2\pi)^{-p} \int_{G_2} W_j(t,\xi)\tilde{\upsilon}(\xi)\exp(ix,\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Враховуючи (8), безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що функція

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{2n} W_j(t,D)\phi_j(x) \tag{9}$$

є розв'язком задачі (2), (3) з простору $C^{2n}\left([0,T], H^{+\infty}(G_2)\right)$.

Для доведення єдиності роз'язку розглянемо перетворення Фур'є $\tilde{u}(t,\xi)$ функції $u(t,x)$, визначеної формулою (9). Функція $\tilde{u}(t,\xi)$ є розв'язком такої крайової задачі:

$$\frac{d^{2n}\tilde{u}(t,\xi)}{dt^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,\xi) \frac{d^k \tilde{u}(t,\xi)}{dt^k} = 0, \tag{10}$$

$$\left. \frac{d^{2(r-1)}\tilde{u}(t,\xi)}{dt^{2(r-1)}} \right|_{t=0} = \tilde{\phi}_r(\xi), \quad \left. \frac{d^{2r-1}\tilde{u}(t,\xi)}{dt^{2r-1}} \right|_{t=T} = \tilde{\phi}_{n+r}(\xi), \quad r \in \{1,\ldots,n\}, \tag{11}$$

де $\tilde{\phi}_j(\xi)$ − перетворення Фур'є функції $\phi_j(\xi)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$. Характеристичним визначником задачі (10), (11) є визначник (6). Якщо $\xi \in G_2$, то $\Delta(\xi) \neq 0$ і тому задача (10), (11) не може мати двох різних розв'язків із простору $C^{2n}([0,T])$. Отже, задача (2), (3) не може мати двох різних розв'язків із простору $C^{2n}\left([0,T], H^{+\infty}(G_2)\right)$. Теорему доведено.

Розв'язність у просторі узагальнених функцій.

Теорема 2. *Нехай* $\phi_j \in H^{-\infty}(G_2)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in C^{2n}\left([0,T], H^{-\infty}(G_2)\right)$ *задачі (2), (3), який визначає формула (9).*

Доведення. Нагадаємо, що $W_j(t,D)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$ − псевдодиференціальні оператори, символи яких $w_j(t,\xi)$ є розв'язками задач (4), (5). Зауважимо, що для псевдодиференціальних операторів $A_k(t,D)$, $k \in \{0,1,\dots 2n-1\}$, та $W_j(t,D)$ спряженими є оператори $A_k(t,-D)$ та $W_j(t,-D)$ відповідно. Очевидно [1], що якщо для довільної функції $\phi \in H^{+\infty}(G_2)$ функція $w_j(t,x) = W_j(t,D)\phi(x)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^{2n} w(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,D)\frac{\partial^k w(t,x)}{\partial t^k} = 0,$$

то для довільної функції $\psi \in H^{+\infty}(-G_2)$ функція $w_j^*(t,x) = W_j(t,-D)\psi(x)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^{2n} w^*(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,-D)\frac{\partial^k w^*(t,x)}{\partial t^k} = 0.$$

Покажемо, що якщо $\phi_j \in H^{-\infty}(G_2)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, то функція $u(t,x) = \sum_{j=1}^{2n} W_j(t,D)\phi_j(x)$ є розв'язком задачі (2), (3) з простору $C^{2n}\left([0,T], H^{-\infty}(G_2)\right)$.

Враховуючи вищесказане, для довільної функції $\psi \in H^{+\infty}(-G_2)$ отримуємо:

$$\left\langle L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u, \psi\right\rangle = \left\langle L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)\left(\sum_{j=1}^{2n} W_j(t,D)\phi_j(x)\right), \psi(x)\right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\left[\left\langle \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} W_j(t,D)\phi_j(x), \psi(x)\right\rangle + \sum_{k=0}^{2n-1}\left\langle A_k(t,D)\frac{d^k}{dt^k} W_j(t,D)\phi_j(x), \psi(x)\right\rangle\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\left[\left\langle \phi_j(x), \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} W_j(t,-D)\psi(x)\right\rangle + \sum_{k=0}^{2n-1}\left\langle \phi_j(x), A_k(t,-D)\frac{d^k}{dt^k} W_j(t,-D)\psi(x)\right\rangle\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\left\langle \phi_j(x), \frac{\partial^{2n} w_j^*(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{k=0}^{2n-1} A_k(t,-D)\frac{\partial^k w_j^*(t,x)}{\partial t^k}\right\rangle = \sum_{j=1}^{2n}\left\langle \phi_j(x), 0\right\rangle = 0,$$

тобто функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (2) з простору $C^{2n}\left([0,T], H^{-\infty}(G_2)\right)$. Покажемо тепер, що ця функція задовольняє умови (3). Враховуючи (5), бачимо, що для операторів $W_j(t,D)$, $j \in \{1,\dots,2n\}$, виконуються рівності

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}W_j(t,D)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \delta_{rj}\mathrm{I}, \qquad \left.\frac{\partial^{2r-1}W_j(t,D)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \delta_{r+n,j}\mathrm{I}, \quad r\in\{1,\dots,n\},$$

де $\mathrm{I}-$ тотожний оператор у просторі $H^{+\infty}(G_2)$. Звідси, аналогічно, як у [1], отримуємо:

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}W_j(t,-D)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \delta_{rj}\mathrm{I},$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-1}W_j(t,-D)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \delta_{r+n,j}\mathrm{I}, \quad r\in\{1,\dots,n\},\ j\in\{1,\dots,2n\}.$$

Тоді для довільної функції $\psi\in H^{+\infty}(-G_2)$ виконуються такі рівності:

$$\left.\left\langle\frac{\partial^{2(r-1)}u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}},\psi(x)\right\rangle\right|_{t=0} = \left.\left\langle\frac{\partial^{2(r-1)}}{\partial t^{2(r-1)}}\sum_{j=1}^{2n}W_j(t,D)\phi_j(x),\psi(x)\right\rangle\right|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\left\langle\left.\frac{d^{2(r-1)}W_j(t,D)}{dt^{2(r-1)}}\right|_{t=0}\phi_j(x),\psi(x)\right\rangle = \sum_{j=1}^{2n}\left\langle\phi_j(x),\left.\frac{d^{2(r-1)}W_j(t,-D)}{dt^{2(r-1)}}\right|_{t=0}\psi(x)\right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\left\langle\phi_j(x),\delta_{rj}\mathrm{I}\,\psi(x)\right\rangle = \left\langle\phi_r(x),\psi(x)\right\rangle,$$

$$\left.\left\langle\frac{\partial^{2r-1}u(t,x)}{\partial t^{2r-1}},\psi(x)\right\rangle\right|_{t=T} = \sum_{j=1}^{2n}\left\langle\phi_j(x),\delta_{r+n,j}\mathrm{I}\,\psi(x)\right\rangle = \left\langle\phi_{r+n}(x),\psi(x)\right\rangle,$$

$r\in\{1,\dots,n\}$,

тобто функція $u(t,x)$ задовольняє умови (3) у просторі $C^{2n}\left([0,T],H^{-\infty}(G_2)\right)$.

Доведемо тепер єдиність розв'язку задачі. Нехай $u(t,x)$ – розв'язок задачі (2), (3) з простору $C^{2n}\left([0,T],H^{-\infty}(G_2)\right)$. Тоді, згідно з формулою (1), справедливе зображення $u(t,x)=A_0(t,D)u_0(t,x)$, де $A_0(t,D)$ – такий псевдодиференціальний оператор, що функція $A_0(t,\xi)$ для кожного $t\in[0,T]$ є аналітичною за ξ в області G_2, причому функції $\partial^s A_0(t,\xi)/\partial t^s$, $s\in\{0,1,\dots,2n\}$, неперервні за $t\in[0,T]$ і аналітичні за ξ в області G_2, а функція $u_0(t,x)$ належить простору $C^{2n}([0,T],L_2(\mathbb{R}_x^p))$ і для кожного $t\in[0,T]$ її x-перетворення Фур'є фінітне в області G_2. Отже, для кожного $t\in[0,T]$ перетворення Фур'є $\tilde{u}(t,\xi)=A_0(t,\xi)\tilde{u}_0(t,\xi)$ функції $u(t,x)$ за змінною x є звичайною функцією, локально інтегровною з квадратом в області G_2. Оскільки функція $\tilde{u}(t,\xi)$ є розв'язком задачі (10), (11), де $\phi_j\in H^{-\infty}(G_2)$, то зі сказаного вище отримаємо, що цей розв'язок єдиний у просторі $C^{2n}([0,T])$, якщо $\xi\in G_2$. Звідси випливає єдиність розв'язку задачі (2), (3) у просторі $C^{2n}\left([0,T],H^{-\infty}(G_2)\right)$. Теорему доведено.

У наведених нижче прикладах побудовано явно область G_2 та розв'язки задач.

Приклад 1. Розглянемо в області Q задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A_1(t,D)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-A_2(t,D)\right)u(t,x)=0,\ \ (t,x)\in Q, \tag{12}$$

$$u(t,x)\big|_{t=0}=\phi_1(x),\ \ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=\phi_2(x),\ \ x\in\mathbb{R}_x^p, \tag{13}$$

де $A_k(t,D)$, $k\in\{1,2\}$ − ті самі оператори, що і у рівнянні (2), причому $A_1(t,D)$ і $A_2(t,D)$ не збігаються. Розв'язок задачі зображає формула

$$u(t,x)=\left(\exp\left(\int_0^t A_2(\tau,D)\,d\tau\right)-A_2(T,D)(\Delta_1(D))^{-1}\exp\left(\int_0^T A_2(\tau,D)\,d\tau\right)\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^t \exp\left(\int_0^\tau a(\tau_1,D)\,d\tau_1\right)d\tau\exp\left(\int_0^t A_2(\tau,D)\,d\tau\right)\right)\phi_1(x)+$$
$$+(\Delta_1(D))^{-1}\int_0^t \exp\left(\int_0^\tau a(\tau_1,D)\,d\tau_1\right)d\tau\exp\left(\int_0^t A_2(\tau,D)\,d\tau\right)\phi_2(x),$$

де

$$\Delta_1(\xi)=\exp\left(\int_0^T A_2(\tau,\xi)\,d\tau\right)\left(A_2(T,\xi)\int_0^T\exp\left(\int_0^\tau a(\tau_1,\xi)\,d\tau_1\right)d\tau+\exp\left(\int_0^T a(\tau,\xi)\,d\tau\right)\right),$$

$a(t,\xi)=A_1(t,\xi)-A_2(t,\xi)$, а

$$G_2=G_1\setminus\Gamma_1=G_1\setminus\left\{\xi\in G_1: A_2(T,\xi)=-\exp\left(\int_0^T a(\tau,\xi)\,d\tau\right)\Big/\int_0^T\exp\left(\int_0^\tau a(\tau_1,\xi)\,d\tau_1\right)d\tau\right\}.$$

Нехай $A_1(t,\xi)-A_2(t,\xi)=\alpha(\xi)$ і $\mathrm{P}=\{\xi\in G_1:\alpha(\xi)=0\}$. Якщо Р − порожня множина, то $\Gamma_1=\left\{\xi\in G_1: e^{\alpha(\xi)T}=A_2(T,\xi)/A_1(T,\xi)\right\}$; якщо множина Р не є порожньою, то $\Gamma_1=\Gamma_2\cup\Gamma_3$, де $\Gamma_2=\{\xi\in P: A_2(T,\xi)=-1/T\}$, $\Gamma_3=\left\{\xi\in G_1\setminus P: e^{\alpha(\xi)T}=A_2(T,\xi)/A_1(T,\xi)\right\}$.

Якщо $A_1(t,D)\equiv A_2(t,D)$, то $G_2=G_1\setminus\{\xi\in G_1: A_1(T,\xi)=-1/T\}$.

Приклад 2. В області Q розглядаємо задачу

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)u(t,x):=\frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}}+\sum_{k=0}^{n-1}A_k(D)\frac{\partial^{2k}u(t,x)}{\partial t^{2k}}=0,\ \ (t,x)\in Q, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)}u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0}=\phi_r(x),\ \ \left.\frac{\partial^{2r-1}u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T}=\phi_{n+r}(x),\ \ x\in\mathbb{R}_x^p,\ \ r\in\{1,\dots,n\}, \tag{15}$$

де $A_k(D)$, $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ − псевдодиференціальні оператори, символи $A_k(\xi)$ яких є аналітичними функціями в області $G\subset\mathbb{R}_\xi^p$. Позначимо $G_1=G\setminus\Gamma$, де $\Gamma=\{\xi\in G: R_\lambda(L_1(\lambda,\xi),\partial L_1(\lambda,\xi)/\partial\lambda)=0\}$, $R_\lambda(\sigma_1,\sigma_2)$ − результант поліномів $\sigma_1(\lambda)$ і $\sigma_2(\lambda)$ [11]; $\pm\lambda_l(\xi)$, $l\in\{1,\dots,n\}$ − корені рівняння $L_1(\lambda,\xi)=0$.

Розв'язок задачі (14), (15) зображає формула

$$u(t,x)=\sum_{j,l=1}^{n}\left(\frac{\Delta_{jl}(D)}{\Delta_2(D)}e^{\lambda_j(D)t}+\frac{\Delta_{j,n+l}(D)}{\Delta_2(D)}e^{-\lambda_j(D)t}\right)\phi_j(x)+$$
$$+\sum_{j=n+1}^{2n}\sum_{l=1}^{n}(-1)^n\left(\frac{\Delta_{jl}(D)}{\Delta_2(D)}e^{\lambda_j(D)t}+\frac{\Delta_{j,n+l}(D)}{\Delta_2(D)}e^{-\lambda_j(D)t}\right)\phi_j(x),$$

де

$$\Delta_2(\xi) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^2(\xi) & \dots & \lambda_n^2(\xi) & \lambda_1^2(\xi) & \dots & \lambda_n^2(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2(n-1)}(\xi) & \dots & \lambda_n^{2(n-1)}(\xi) & \lambda_1^{2(n-1)}(\xi) & \dots & \lambda_n^{2(n-1)}(\xi) \\ \lambda_1(\xi)e^{\lambda_1(\xi)T} & \dots & \lambda_n(\xi)e^{\lambda_n(\xi)T} & -\lambda_1(\xi)e^{-\lambda_1(\xi)T} & \dots & -\lambda_n(\xi)e^{-\lambda_n(\xi)T} \\ \lambda_1^3(\xi)e^{\lambda_1(\xi)T} & \dots & \lambda_n^3(\xi)e^{\lambda_n(\xi)T} & -\lambda_1^3(\xi)e^{-\lambda_1(\xi)T} & \dots & -\lambda_n^3(\xi)e^{-\lambda_n(\xi)T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2n-1}(\xi)e^{\lambda_1(\xi)T} & \dots & \lambda_n^{2n-1}(\xi)e^{\lambda_n(\xi)T} & -\lambda_1^{2n-1}(\xi)e^{-\lambda_1(\xi)T} & \dots & -\lambda_n^{2n-1}(\xi)e^{-\lambda_n(\xi)T} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \prod_{1 \le s < r \le n} \left(\lambda_r^2(\xi) - \lambda_s^2(\xi)\right)^2 \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda_j(\xi)\left(e^{\lambda_j(\xi)T} + e^{-\lambda_j(\xi)T}\right)\right),$$

а $\Delta_{rs}(\xi)$, $r, s \in \{1, \dots, 2n\}$ – алгебричне доповнення у визначнику $\Delta_2(\xi)$ елемента, який стоїть на перетині s-го стовпця і r-го рядка.

При цьому $G_2 = G_1 \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \gamma_m$, $\gamma_m = \{\xi \in G_1 : L_1((2m+1)\pi/2T, \xi) = 0\}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Аналогічні результати отримано у випадку, коли умови (3) замінено на умови

$$\left.\frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=0} = \phi_r(x), \quad \left.\frac{\partial^{2(r-1)} u(t,x)}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=T} = \phi_{n+r}(x).$$

Результати роботи можна поширити на системи рівнянь вигляду (2).

Робота виконана за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект № 41.1/ 004).

1. *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике // Успехи матем. наук. – 1982. – **37**, вып. 5(224). – С. 97–159.
2. *Илькив В. С.* Возмущения нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1962–1971.
3. *Илькив В. С., Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Нелокальная краевая задача для систем псевдодифференциальных уравнений // Методы исследования дифференц. и интегр. операторов. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 75–79.
4. *Илькив В. С., Полищук В. Н., Пташник Б. И., Салига Б. О.* Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами // Укр. матем. журн. – 1986. – **38**, № 5. – С. 582–587.
5. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь // Там же. – 2003. – **55**, № 1. – С. 22–29.
6. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
7. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Сайдаматов Э. М.* О корректности неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений // Узбекс. матем. журн. – 1995. – № 2. – С. 77–88.
9. *Салига Б. О.* Многоточечная задача для дифференциальных уравнений с частными производными: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Донецк, 1986. – 14 с.
10. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.

11. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре: Уч. пос. для вузов. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
12. *Saydamatov E. M.* Well–posedness of the Cauchy problem for ingomogeneous time–fractional pseudo–differential equations // An int. j. for theory and appl. – 2006. – **9**, № 01. – P. 1–16.
13. *Umarov S., Gorenflo R.* Cauchy and nonlocal multi–point problems for distributed order pseudo–differential equations, part one // J. for analysis and its appl. – 2005. – **24**, № 03. – P. 449–466.
14. *Umarov S., Luchko Yu., Gorenflo R.* Partial pseudo–differential equations of partial order: well–posedness of the Cauchy and multi–point value problems. – Berlin, 2000. – 36 p. – (Preprint / Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universitдt: PR-A-00-05).

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ СИМВОЛАМИ

В безграничном слое исследована краевая задача со смешанными условиями на границе области для эволюционных уравнений с псевдодифференциальными операторами по пространственным координатам с переменными по времени коэффициентами, которые имеют аналитические символы. Установлена однозначная разрешимость задачи в некоторых пространствах основных и обобщенных функций; при этом использована техника дифференциальных операторов бесконечного порядка, разработанная Ю. А. Дубинским.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR EQUATIONS WITH PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS WITH ANALYTICAL SYMBOLS

In a boundless layer, we investigate the boundary-value problem with mixed conditions on the boundary of domain for evolutional equations with pseudo-differential operators with respect to spatial coordinates with coefficients variable with respect to time, which have analytical symbols. The unique solvability of the problem in some spaces of basic and generalized functions is established. Thus, we use the technique of differential operators of infinite order, which was developed by Yu. A. Dubinskij.

[1]Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2]Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
02.11.11