УДК 517.98

А. В. Загороднюк, В. В. Кравців

СПЕКТР АЛГЕБРИ БЛОЧНО-СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ*

Досліджено алгебри блочно-симетричних поліномів та аналітичних функцій від скінченної та нескінченної кількості змінних. Описано спектр таких алгебр, встановлено зв'язок з аналітичними функціями експоненціального типу.

Означення і попередні відомості. В останні роки зріс інтерес до дослідження інваріантів дії топологічних груп на нескінченновимірних просторах. Однією з таких груп є група підстановок множини натуральних чисел. Якщо ця група діє на банаховому просторі з безумовним базисом, переставляючи базисні вектори, то її дія природно переноситься на поліноми та аналітичні функції на цьому просторі, а інваріанти утворюють алгебру симетричних аналітичних функцій. Алгебри симетричних аналітичних функцій на ℓ_p досліджували багато авторів [5–8]. Проте, як і у класичній теорії інваріантів [1], цікавий випадок, коли група діє на просторі, переставляючи підпростори, натягнуті на «блоки» базисних векторів. Тоді множиною інваріантів буде т. зв. алгебра блочно-симетричних аналітичних функцій.

Для вивчення конкретної комутативної алгебри важливо вміти описати її спектр (множину характерів). Відомо, що спектр алгебри цілих аналітичних функцій на просторі $\mathbb{C}^n$ збігається з множиною функціоналів значення в точках. Описано [6, 3] відповідно спектри алгебри цілих симетричних аналітичних функцій $\mathcal{H}_s\left(\mathbb{C}^n\right)$ і алгебри блочно-симетричних поліномів $\mathcal{P}_{vs}\left(\mathcal{X}_n^2\right)$. Нижче проаналізовано спектр алгебри блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу (тобто функцій, які обмежені на обмежених множинах) на деякому банаховому просторі.

Нехай

$$\mathcal{X} = \left(\sum X\right)_{\ell_1} = \oplus_{\ell_1} X,$$

тобто $\mathcal{X}$ – скінченна $\left(\oplus_{\ell_1}^m X\right)$ або нескінченна $\left(\oplus_{\ell_1} X\right)$ ℓ_1-сума копій банахового простору X. Тоді кожен елемент $\bar{x} \in \mathcal{X}$ можна подати у вигляді послідовності $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, де $x_n \in X$, з нормою $\|\bar{x}\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$. Вважаємо, що поліном P на просторі $\mathcal{X}$ є *блочно-симетричним (векторно-симетричним)*, якщо

$$P\left(x_1, \ldots, x_n, \ldots\right) = P\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots\right)$$

для будь-якої блочної перестановки σ. Позначимо через $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$ і $\mathcal{P}_{vs}\left({}^n\mathcal{X}\right)$ відповідно простір блочно-симетричних і простір n-однорідних блочно-симетричних поліномів на просторі $\mathcal{X}$.

Зокрема, розглядатимемо алгебру блочно-симетричних поліномів $\mathcal{P}_{vs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$ на просторі $\mathcal{X}_\infty^2 = \oplus_{\ell_1} \mathbb{C}^2$, де на $\mathbb{C}^2$ задано евклідову норму.

---

* Робота підтримана грантом державного фонду фундаментальних досліджень України № Ф35/531-2011

Відомо [1], що поліноми вигляду

$$R_n^{p,q,\dots,r}(x,y,\dots,z)=\sum_{\substack{i_1<\dots<i_p\\ j_1<\dots<j_q\\ k_1<\dots<k_r\\ i_p\neq j_q\neq k_r}}^{m} x_{i_1}\dots x_{i_p}y_{j_1}\dots y_{j_q}\dots z_{k_1}\dots z_{k_r},$$

де $p,q,\dots,r$ – кількість $x_{i_p},y_{j_q},\dots,z_{k_r}$ відповідно, $p+q+\dots+r=n$ і $(x_i,y_i,\dots,z_i)\in\mathbb{C}^s$, $1\le i\le m$, утворюють множину твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}\left(\mathcal{X}_m^s\right)$ на просторі $\mathcal{X}_\infty^s=\oplus_{\ell_1}\mathbb{C}^s$.

Побудовано [3] систему твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}\left(\mathcal{X}_\infty^s\right)$, $s\ge 2$ і доведено таку теорему

Теорема 1. *Твірними елементами алгебри* $\mathcal{P}_{vs}\left(\mathcal{X}_\infty^s\right)$ *будуть поліноми*

$$H_n^{k_1,k_2,\dots,k_s}\left(x^1,x^2,\dots,x^s\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i^1\right)^{k_1}\left(x_i^2\right)^{k_2}\cdots\left(x_i^s\right)^{k_s},\quad k_1+k_2+\dots+k_s=n,$$

де $x_i=\left(x_i^1,x_i^2\dots,x_i^s\right)\in\mathbb{C}^s$, $i\ge 1$.

Також показано [3], що іншу систему твірних елементів алгебри $\mathcal{P}_{vs}\left(\mathcal{X}_\infty^s\right)$ утворюють поліноми вигляду

$$R_n^{p,q,\dots,r}(x,y,\dots,z)=\sum_{\substack{i_1<\dots<i_p\\ j_1<\dots<j_q\\ k_1<\dots<k_r\\ i_p\neq j_q\neq k_r}}^{\infty} x_{i_1}\dots x_{i_p}y_{j_1}\dots y_{j_q}\dots z_{k_1}\dots z_{k_r},$$

де $p,q,\dots,r$ – кількість $x_{i_p},y_{j_q},\dots,z_{k_r}$ відповідно, $p+q+\dots+r=n$ і $(x_i,y_i,\dots,z_i)\in\mathbb{C}^s$, $i\ge 1$.

Нагадаємо, що *характером* алгебри називають гомоморфізм цієї алгебри зі значеннями в полі комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Позначимо через $\mathcal{M}_{vs}(\mathcal{X})$ множину характерів алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X})$, яку називають *спектром* цієї алгебри.

Основні результати. Кожен вектор з $\mathcal{X}_\infty^2$ можна подати у вигляді пари (x,y), де $x,y\in\ell_1$, $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k$, $y=\sum_{k=1}^{\infty}y_ke_k$. Нехай σ – деяка підстановка на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Тоді σ породжує лінійний оператор T_σ на просторі $\mathcal{X}_\infty^2$ за формулою

$$T_\sigma\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k,\sum_{k=1}^{\infty}y_ke_k\right)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_{\sigma(k)}e_k,\sum_{k=1}^{\infty}y_{\sigma(k)}e_k\right).$$

Для будь-яких $\left(x^1,y^1\right)$, $\left(x^2,y^2\right)\in\mathcal{X}_\infty^2$ позначимо $\left(x^1,y^1\right)\sim\left(x^2,y^2\right)$, якщо існує така підстановка σ на $\mathbb{N}$, що $\left(x^1,y^1\right)=\mathrm{T}_\sigma\left(x^2,y^2\right)$. Для будь-якої точки $(x,y)\in\mathcal{X}_\infty^2$ позначимо через $\delta_{(x,y)}$ комплексний гомоморфізм $\mathcal{P}_{vs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$, що відповідає значенню полінома P у точці (x,y). Очевидно, що якщо $\left(x^1,y^1\right)\sim\left(x^2,y^2\right)$, то $\delta_{\left(x^1,y^1\right)}=\delta_{\left(x^2,y^2\right)}$.

Теорема 2. *Нехай* $\left(x^1, y^1\right)$, $\left(x^2, y^2\right) \in \mathcal{X}_\infty^2$ *і* $H_i^r\left(x^1, y^1\right) = H_i^r\left(x^2, y^2\right)$ *для будь-яких* $i \geq 1$, $0 \leq r \leq i$. *Тоді* $\left(x^1, y^1\right) \sim \left(x^2, y^2\right)$.

Д о в е д е н н я. Показано [2], що кожен блочно-симетричний поліном $P(x, y)$ на просторі $\mathcal{X}_\infty^2$ можна подати як лінійну комбінацію поліномів вигляду $G(x + jy)$, де G – симетричний поліном на просторі ℓ_1, $j \in \mathbb{C}$. З іншого боку, оскільки $G(x)$ можна подати у вигляді алгебричної комбінації базисних поліномів $F_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, $k \geq 1$ [4], то $P(x, y)$ можна подати як алгебричну комбінацію $F_k(x + jy)$.

За теоремою 1.3 з [6], якщо $x^1, x^2, y^1, y^2 \in \ell_1$ і $F_i(x^1 + jy^1) = F_i(x^2 + jy^2)$ для будь-якого $i \geq 1$, то $x^1 + jy^1 \sim x^2 + jy^2$, тобто $x^1 + jy^1 = T_\sigma(x^2 + jy^2)$ для кожної підстановки σ на $\mathbb{N}$. Позначивши через $T_\sigma(x) = T_\sigma(x, 0)$ і $T_\sigma(y) = T_\sigma(0, y)$, отримаємо, що

$$x^1 + jy^1 = T_\sigma\left((x^2, 0) + j(0, y^2)\right) = T_\sigma(x^2) + jT_\sigma(y^2).$$

Не втрачаючи загальності, достатньо розглянути $j = 1, 2$. Тоді отримаємо дві рівності

$$x^1 + y^1 = T_\sigma(x^2) + T_\sigma(y^2),$$

$$x^1 + 2y^1 = T_\sigma(x^2) + 2T_\sigma(y^2),$$

з яких випливає $x^1 = T_\sigma\left(x^2\right)$, $\mathrm{y}^1 = T_\sigma\left(y^2\right)$. Тобто

$$x^1 + y^1 = \left(x^1, 0\right) + \left(0, y^1\right) = \left(x^1, y^1\right) = T_\sigma\left(x^2, 0\right) + T_\sigma\left(0, y^2\right) = \mathrm{T}_\sigma\left(x^2, y^2\right).$$

Оскільки з того, що $H_i^r\left(x^1, y^1\right) = H_i^r\left(x^2, y^2\right)$ для будь-яких $i \geq 1$, $0 \leq r \leq i$ випливає, що $F_i(x^1 + jy^1) = F_i(x^2 + jy^2)$, то $\left(x^1, y^1\right) \sim \left(x^2, y^2\right)$. Теорему доведено.

Позначимо через $\mathcal{H}_{bvs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$ алгебру блочно-симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\mathcal{X}_\infty^2$. Ця алгебра породжена поліномами $\left\{H_1^0, \ldots, H_n^r, \ldots, H_n^n, \ldots\right\}$, де $n \geq 1$, $0 \leq r \leq n$, тобто є поповненням алгебри $\mathcal{P}_{vs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$ в топології рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Позначимо через $\mathcal{M}_{bvs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$ спектр алгебри $\mathcal{H}_{bvs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$. Спочатку покажемо, що спектр алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на $\mathcal{X}_\infty^2$ не збігається з класами еквівалентності функціоналів значення в точках. Проаналізуємо такий приклад.

Розглянемо послідовність елементів

$$e_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \ldots\right),$$

$$e_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \ldots\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_n = \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \ldots\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

з простору $\mathcal{X}_\infty^2$ і для кожного n визначимо

$$v_n = \frac{1}{n}(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) \in \mathcal{X}^2_\infty.$$

Тоді $\delta_{v_n}(H_1^0) = \delta_{v_n}(H_1^1) = 1$, $\delta_{v_n}(H_k^r) \to 0$, при $k \to \infty$ для будь-яких $1 \le r \le k$. З відносної компактності обмежених підмножин $\mathcal{M}_{bvs}(\mathcal{X}^2_\infty)$ випливає існування такої граничної точки φ послідовності $\{\delta_{v_n}\}$, що $\varphi(H_1^0) = 1$, $\varphi(H_k^r) = 0$ для будь-яких $1 \le r \le k$, $k \ge 1$. З теореми 2 випливає, що не існує такої точки $(x, y) \in \mathcal{X}^2_\infty$, що $\delta_{(x,y)} = \varphi$. Дійсно, якщо така точка є, то $(x, y) \sim (0, 0)$. Тому $\delta_{v_n}(H_1^0) = \delta_{v_n}(H_1^1) = 0$, а це суперечить тому, що $\delta_{v_n}(H_1^0) = \delta_{v_n}(H_1^1) = 1$.

Розглянемо твірні елементи алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2_\infty)$:

$$R_n^{p,q}(x, y) = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ j_1 < \ldots < j_{qr} \\ i_p \neq j_{qr}}}^{\infty} x_{i_1} \ldots x_{i_p} y_{j_1} \ldots y_{j_q},$$

де p, q – кількість x_{i_p}, y_{j_q} відповідно, $p + q = n$ і $(x_i, y_i) \in \mathbb{C}^2$, $i \ge 1$.

Відомо, що алгебричний базис алгебри симетричних поліномів на просторі ℓ_1 утворюють елементарні симетричні поліноми $G_n(x) = \sum\limits_{k_1 < \ldots < k_n}^{\infty} x_{k_1} \ldots x_{k_n}$. У праці [8] за допомогою правила множників Лагранжа показано, що $\|G_n\| = \frac{1}{n!}$, де $\|G_n\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |G_n(x)|$. Аналогічно можна показати, що

$$\sup_{\|x\| \le \sqrt{2}} |G_n(x)| \le \sup_{\|x\| \le \sqrt{2}} \sum_{k_1 < \ldots < k_n}^{\infty} |x_{k_1} \ldots x_{k_n}| \le \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n^n} \le \frac{\sqrt{2}}{n!}.$$

Твердження 1. *Для норми твірного елемента $R_n^{p,q}$ алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2_\infty)$ справедлива оцінка*

$$\|R_n^{p,q}\| \le \frac{2}{p!q!}.$$

Д о в е д е н н я. Нагадаємо, що норму полінома $R_n^{p,q}$ алгебри $\mathcal{P}_{vs}(\mathcal{X}^2_\infty)$ шукаємо за формулою $\|R_n^{p,q}\| = \sup\limits_{\|(x,y)\| \le 1} |R_n^{p,q}(x, y)|$. Щоб отримати оцінку зверху для норми, достатньо дослідити її на максимум на кулі $B = \left\{(x, y) : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right) \le 1\right\}$. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right) \le \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{m} (|x_i| + |y_i|)\right)^2 =$$

$$= \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right) + 2\sum_{i=1}^{m} |x_i||y_i|\right) \le 2 \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right) \le 2,$$

то дослідження на максимум достатньо виконати на кулі $L = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (|x_i| + |y_i|) \le \sqrt{2}$. Дійсно

$$\left\|R_n^{p,q}\right\| = \sup_{\|(x,y)\|\le 1}\left|R_n^{p,q}(x,y)\right| \le \sup_{\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i|+|y_i|)\le\sqrt{2}}\left|\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p\\ j_1<\ldots<j_{qr}\\ i_p\ne j_{qr}}}^{\infty} x_{i_1}\ldots x_{i_p}y_{j_1}\ldots y_{j_q}\right| \le$$

$$\le \sup_{\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i|+|y_i|)\le\sqrt{2}}\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p\\ j_1<\ldots<j_{qr}\\ i_p\ne j_{qr}}}^{m}\left|x_{i_1}\right|\ldots\left|x_{i_p}\right|\left|y_{j_1}\right|\ldots\left|y_{j_q}\right| \le$$

$$\le \sup_{\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i|+|y_i|)\le\sqrt{2}}\left(\sum_{i_1<\ldots<i_p}^{\infty}\left|x_{i_1}\ldots x_{i_p}\right|\right)\sup_{\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i|+|y_i|)\le\sqrt{2}}\left(\sum_{j_1<\ldots<j_q}^{\infty}\left|y_{j_1}\ldots y_{j_q}\right|\right).$$

Оскільки

$$\sup_{\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i|+|y_i|)\le\sqrt{2}}\left(\sum_{i_1<\ldots<i_p}^{\infty}\left|x_{i_1}\ldots x_{i_p}\right|\right)\le\frac{2}{p!} \quad \text{і} \quad \sup_{\sum_{i=1}^{\infty}(|x_i|+|y_i|)\le\sqrt{2}}\left(\sum_{j_1<\ldots<j_q}^{\infty}\left|y_{j_1}\ldots y_{j_q}\right|\right)\le\frac{2}{q!},$$

то $\left\|R_n^{p,q}\right\| \le \frac{2}{p!q!}$. Твердження доведено.

Нехай $\mathbb{C}\{t_1,t_2\}$ – простір усіх степеневих рядів над $\mathbb{C}^2$. Позначимо через $\mathcal{R}$ відображення з $\mathcal{M}_{bvs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$ у $\mathbb{C}\{t_1,t_2\}$ вигляду

$$\mathcal{R}(\phi)(t_1,t_2) = \sum_{\substack{n=0\\ p+q=n}}^{\infty} t_1^p t_2^q \phi\left(R_n^{p,q}\right),$$

а через $A_{uvs}\left(rB_{\mathcal{X}_\infty^2}\right)$ – алгебру всіх рівномірно неперервних симетричних аналітичних функцій на кулі радіуса r, $rB_{\mathcal{X}_\infty^2} \subset \mathcal{X}_\infty^2$.

Для $\phi\in\mathcal{M}(X)$ введено [7] поняття *радіус-функції* $R(\phi)$, яку можна обчислити за формулою

$$R(\phi) = \limsup_{n\to\infty}\left\|\phi_n\right\|^{1/n}, \tag{1}$$

де ϕ_n – звуження ϕ на підпростір n-однорідних блочно-симетричних поліномів $\mathcal{P}_{vs}\left({}^n\mathcal{X}_\infty^2\right)$.

Продовжуючи цю ідею, означимо *радіус-функцію* комплексного гомоморфізму $\phi\in\mathcal{M}_{bvs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$ як інфімум всіх r, таких, що ϕ є неперервним на $A_{uvs}\left(rB_{\mathcal{X}_\infty^2}\right)$.

Міркуючи так, як в теоремі 2.3 з [7], можна довести таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $\phi\in\mathcal{M}_{bvs}\left(\mathcal{X}_\infty^2\right)$. *Тоді* $R(\phi)$ *можна обчислити за формулою (1), де* $\left\|\phi_n\right\|$ *– норма в просторі* $\mathcal{P}_{vs}\left({}^n\mathcal{X}_\infty^2\right)'$.

Теорема 3. *Множина* $\left\{\mathcal{R}(\phi):\ \ \phi\in\mathcal{M}_{bvs}\left(\mathcal{X}_{\infty}^{2}\right)\right\}$ *є множиною цілих функцій експоненціального типу, який менший або дорівнює* $R(\phi)$.

Д о в е д е н н я. З тверджень 1 і 2 випливає, що $R(\phi)$ є ціла функція експоненціального типу. Дійсно

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[(p+q)]{p!\,q!\left|\phi_n\left(R_n^{p,q}\right)\right|}\le\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{p!\,q!\left\|\phi_n\right\|\left\|R_n^{p,q}\right\|}\le$$
$$\le\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{p!\,q!\frac{2}{p!\,q!}\left\|\phi_n\right\|}=R(\phi)<\infty.$$

Теорему доведено.

Лема. *Якщо* $\phi=\delta_{(x,y)}$, *то для будь-яких* $(x,y)\in\mathcal{X}_{\infty}^{2}$:

$$\mathcal{R}\left(\delta_{(x,y)}\right)\left(t_1,t_2\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+x_i t_1+y_i t_2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n\left(xt_1+yt_2\right),\qquad(2)$$

де $(x_i,y_i)\in\mathbb{C}^2$, $i\ge1$, $G_n\left(xt_1+yt_2\right)=\sum\limits_{k_1<\ldots<k_n}^{\infty}\left(x_{k_1}t_1+y_{k_1}t_2\right)\ldots\left(x_{k_n}t_1+y_{k_n}t_2\right)$. *і* $G_0=1$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, для будь-яких $(x,y)\in\mathcal{X}_{\infty}^{2}$ добуток $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1+x_i t_1+y_i t_2\right)$ абсолютно збігається, якщо абсолютно збігається ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(x_i t_1+y_i t_2\right)$, де $(x_i,y_i)\in\mathbb{C}^2$, $i\ge1$. Тобто з того, що

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i t_1+y_i t_2\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}\left(|x_i||t_1|+|y_i||t_2|\right)=|t_1|\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|+|t_2|\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|\le$$
$$\le\max\left\{|t_1|,|t_2|\right\}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|+\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|\right)\le\max\left\{|t_1|,|t_2|\right\}\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(|x_i|^2+|y_i|^2\right)\right)^{1/2}<\infty,$$

випливає абсолютна збіжність добутку $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1+x_i t_1+y_i t_2\right)$, а отже, і збіжність цього добутку. Тоді з того, що для будь-якого $1\le m<\infty$ справедлива рівність $\sum\limits_{\substack{n=0\\p+q=n}}^{m}t_1^p t_2^q\delta_{(x,y)}\left(R_n^{p,q}\right)=\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1+x_i t_1+y_i t_2\right)$, випливає, що

$$\mathcal{R}\left(\delta_{(x,y)}\right)\left(t_1,t_2\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+x_i t_1+y_i t_2\right).$$

Як відомо з комбінаторики [9], $\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n G_n(x)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+x_k t\right)$ для кожного $x\in c_{00}$, таких, що добуток є збіжним. Ця формула також справедлива для будь-якого $x\in\ell_1$. Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n\left(xt_1+yt_2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(t_1t_2\right)^n G_n\left(\frac{x}{t_2}+\frac{y}{t_1}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{x_k}{t_2}+\frac{y_k}{t_1}\right)t_1t_2\right)=$$
$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x_k t_1+y_k t_2\right).$$

Лему доведено.

Нагадаємо, що функцію $f(z)$, де $z \in \mathbb{C}^l$ називають *функцією з плоскими нулями*, якщо множина нулів має вигляд

$$Z_f = \left\{z \in \mathbb{C}^l : f(z) = 0\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k,$$

де H_k – гіперплощина в $\mathbb{C}^l$.

Теорема 4. *Нехай* ϕ *– такий характер, що* $\mathcal{R}\left(\phi\right)$ *– поліном. Тоді* ϕ *має плоскі нулі.*

Д о в е д е н н я. Спочатку введемо позначення $\Lambda_{t_1 t_2}(G_n) = G_n(xt_1 + yt_2)$. Розглянемо рівняння $\sum_{n=0}^{m} \lambda^n \phi\left(\Lambda_{t_1 t_2}(G_n)\right) = 0$, яке має m коренів z_k, $1 \le k \le m$, тобто його можна записати у вигляді $\prod_{n=0}^{m}(1 + z_k \lambda) = 0$. Очевидно, що кожен корінь z_k можна подати у вигляді $z_k = x_k t_1 + y_k t_2$, де x_k, y_k – невідомі і t_1, t_2 – довільні комплексні числа. Для знаходження x_k, y_k достатньо розглянути два випадки $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ і $t_1 = 2$, $t_2 = 1$. Тоді отримаємо систему з $2m$ рівняннями і $2m$ невідомими x_k, y_k, $1 \le k \le m$, розв'язками якої будуть $x_k = z_k, y_k = -z_k$, $1 \le k \le m$. При $\lambda = 1$

$$\mathcal{R}\left(\phi\right)\left(t_1, t_2\right) = \sum_{n=0}^{m} \phi\left(\Lambda_{t_1 t_2}(G_n)\right) = \prod_{k=1}^{m}(1 + x_k t_1 + y_k t_2) = 0.$$

Отже, ϕ має плоскі нулі. Теорему доведено.

1. *Вейль Г.* Классические группы: их инварианты и представления. – М.: Мир, 1973.
2. *Загороднюк А. В., Кравців В. В.* Симетричні поліноми на добутках банахових просторів // Карпат. матем. публікації – 2010. – **2**, № 1. – С. 59–71.
3. *Кравців В. В.* Алгебри блочно-симетричних поліномів: твірні елементи та оператор зсуву // Матем. вісник НТШ – 2011. – **8**. – С. 108–122.
4. *Немировський А. С., Семенов С. М.* О полиномиальной аппроксимации функций на гильбертовом пространстве // Мат. сб. – 1973. – **92**, № 2. – С. 257–281.
5. *Чернега І. В.* Симетричні поліноми на банахових просторах // Карпат. матем. публікації – 2009. – **1**, № 2. – С. 105–125.
6. *Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. Lond. Math. Soc. – 2003. – № 35. – P. 55–64.
7. *Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – **415**. – P. 51–93.
8. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // preprint.
9. *Macdonald I. G.* Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials. University lecture series. – Providence, American Mathematical Society, 1997. – 64 p.

СПЕКТР АЛГЕБРЫ БЛОЧНО-СИММЕТРИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Исследованы алгебры блочно-симметрических полиномов и аналитических функций от конечного и бесконечного чисел переменных. Описан спектр таких алгебр, установлена связь с аналитическими функциями экспоненциального типа.

SPECRUM OF ALGEBRA OF BLOCK-SYMMETRICAL ANALYTICAL FUNCTIONS

There are investigated algebras of block-symmetric polynomials and analytic functions of finite and infinite many variables. A description of spectrum of such algebras and a relationship with analytic functions of exponential type is established.

[1]Прикарпатський нац. ун-т
імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ
[2]Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.09.11