УДК 517.98

А. В. Соломко, С. В. Шарин

ОПЕРАТОРНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є–ЛАПЛАСА ЗГОРТКОВОЇ АЛГЕБРИ УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ РУМ'Є*

Побудовано векторний аналог операторного числення для генераторів сильно неперервних n-параметричних напівгруп операторів у згортковій алгебрі G'_+ ультрарозподілів Рум'є з носіями в додатному n-вимірному конусі $\mathbb{R}^n_+$. Доведено теорему про зображення образу операторного числення у вигляді комутанта (C_0)-напівгрупи операторів зсуву вздовж конуса $\mathbb{R}^n_+$.

Вступ. Функціональне числення Хілле–Філіпса [4] надає змісту символу $f(A)$, де f – комплекснозначна функція, яку можна подати у вигляді перетворення Лапласа–Стілт'єса деякої міри, а оператор A є генератором сильно неперервної однопараметричної напівгрупи операторів. У статті [10] запропоновано певну модифікацію формули числення Хілле–Філіпса, що дало можливість розширити клас символів такого числення до простору розподілів Шварца з носіями на півосі. Пізніше [2, 11] таке числення ми поширили на клас генераторів n-параметричних напівгруп. Нижче, розвиваючи дослідження [3], побудували аналог перетворення Фур'є–Лапласа для ультрарозподілів Рум'є [8, 9].

Основні позначення і термінологія. Використовуватимемо такі позначення: $k^{k\aleph} := k_1^{k_1\aleph} \cdot \ldots \cdot k_n^{k_n\aleph}$, $\nu^k := \nu_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{k_n}$, $\partial^k := \partial_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{k_n}$, $\partial_j^{k_j} := (-\mathrm{i})^{k_j} \dfrac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$, де $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n_+$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $\aleph > 1$ – деяка фіксована дійсна константа. Для векторів $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n_+$ і $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n_+$ писатимемо $a \prec b$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$; аналогічно $a \succ b$. Для довільних $a \prec b$ нехай $[a,b] := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ позначає n-вимірний паралелепіпед. Нехай $t \in [a,b]$ означає $t_j \in [a_j, b_j]$ і $n \to +\infty$ означає $n_j \to +\infty$ для всіх $j = 1, \ldots, n$. Символом $L[X]$ позначимо простір всіх лінійних неперервних операторів, що діють у локально опуклому просторі X, з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. Для довільного $A \in L[X]$ комутантом оператора A називають множину $[A]^C := \{B \in L[X] : A \circ B = B \circ A\}$, де "$\circ$" позначає композицію операторів.

Нескінченно диференційовну комплексну функцію φ називають ультрадиференційовною в сенсі Жевре [8], якщо для довільного $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$ існують такі вектор $\nu \succ 0$ і константа $C > 0$, що нерівність $\sup\limits_{t \in [a,b]} |\partial^k \varphi(t)| \le C \nu^k k^{k\aleph}$ справджується для всіх $k \in \mathbf{Z}^n_+$. Векторний простір всіх ультрадиференційовних у сенсі Жевре функцій з компактними носіями позначатимемо $G := G(\mathbb{R}^n)$. Для довільних $\nu \succ 0$ і $a \prec 0 \prec b$ визначимо в G підпростір

* Робота підтримана грантом державного фонду фундаментальних досліджень України № Ф35/531-2011

виду

$$G_\nu[a,b] := \left\{ \varphi \in C^\infty : \quad supp\varphi \in [a,b], \quad \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} := \sup_{k\in \mathbf{Z}_+^n} \sup_{t\in[a,b]} \frac{|\,\partial^k \varphi(t)\,|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty \right\},$$

який є банаховим простором [8]. На просторі G задамо топологію локально опуклої індуктивної границі $\operatorname*{limind}\limits_{-a,b,\nu\to+\infty} G_\nu[a,b]$ відносно цілком неперервних вкладень $G_\nu[a,b] \subset G_\mu[a',b']$, де $\nu < \mu$ і $a' < a < 0 < b < b'$. Простір G є топологічною алгеброю відносно операції поточкового множення функцій. Лінійний неперервний функціонал на просторі G називають ультрарозподілом Рум'є. Сильно спряжений простір всіх ультрарозподілів Рум'є позначимо $G' := G'(\mathbb{R}^n)$.

Нехай $G'_+ := G'(\mathbb{R}^n_+)$ − підпростір в G' ультрарозподілів з носіями в конусі $\mathbb{R}^n_+$. Якщо символом $G'^{\perp}_+$ позначити ортогональне доповнення підпростору G'_+ відносно двоїстості $\langle G', G\rangle$, то дуальним до G'_+ буде фактор-простір

$$G_+ := G / G'^{\perp}_+ = \left\{ \boldsymbol{\varphi} := \varphi + G'^{\perp}_+ : \varphi \in G \right\}.$$

Нехай $\theta_+ : \mathbb{R}^n \ni t \mapsto \theta_+(t) := \theta(t_1) \cdot \ldots \cdot \theta(t_n)$ − характеристична функція конуса $\mathbb{R}^n_+$, де θ − функція Хевісайда. Ядро оператора множення $\Theta : G \ni \varphi \mapsto \theta_+\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ збігається з підпростором $G'^{\perp}_+$, який є замкнутим ідеалом в G. Отже, фактор-простір G_+ також є топологічною алгеброю і справджується ізоморфізм $G_+ \simeq \Theta[G]$ алгебр. Таким чином, кожен елемент $\boldsymbol{\varphi} \in G_+$ можна розуміти як функцію $\theta_+\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ або як регулярний функціонал з простору G'_+. Двоїстість $\langle G', G\rangle$ однозначно породжує нову дуальну пару $\langle G'_+, G_+\rangle$.

Звужуючи оператор Θ на підпростір $G_\nu[a,b]$, де $a < 0 < b$, отримаємо, що топологічний ізоморфізм $G_\nu^b := \Theta[G_\nu[a,b]] \simeq G_\nu[a,b] / (G'^{\perp}_+ \cap G_\nu[a,b])$ справджується для всіх $a < 0$, при цьому вкладення $G_\nu^b \subset G_\mu^{b'}$ є компактними, якщо $\nu < \mu$ і $b < b'$. Крім того, простір G_+ можна подати у вигляді індуктивної границі:

$$G_+ \simeq \operatorname*{limind}_{\nu, b\to+\infty} G_\nu^b. \tag{1}$$

Векторнозначні ультрадиференційовні функції класу Жевре в $\mathbb{R}^n_+$. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ − банахів простір. Зафіксуємо число $\aleph > 1$. Для кожного $\nu > 0$ розглядаємо простори

$$G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X) = \left\{ x : \quad supp x \subset \mathbb{R}^n_+, \quad \|x\|_{G_\nu(\mathbb{R}^n_+,X)} = \sup_{k\in \mathbb{Z}^n_+} \sup_{t\in \mathbb{R}^n_+} \frac{\left\|\partial^k x(t)\right\|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty \right\}$$

X-значних ультрадиференційовних функцій $x(t)$ з компактними носіями в $\mathbb{R}^n_+$. Для кожного набору векторів $0 < \nu < \mu$ вкладення $G_\nu(\mathbb{R}^n_+, X) \subset G_\mu(\mathbb{R}^n_+, X)$ є компактні, при цьому $\|x\|_{G_\mu(\mathbb{R}^n_+,X)} \le \|x\|_{G_\nu(\mathbb{R}^n_+,X)}$. Отже, на просторі

$G(\mathbb{R}_+^n, X) := \bigcup\limits_{\nu \succ 0} G_\nu(\mathbb{R}_+^n, X)$ можемо ввести топологію індуктивної границі $\operatorname*{limind}\limits_{\nu\to+\infty} G_\nu(\mathbb{R}_+^n, X)$. Далі використовуватимемо скорочене позначення $G_+(X) := G(\mathbb{R}_+^n, X)$.

Відомо [7, 8], що простір G є ядерним, тому, як наслідок, простір G_+ теж ядерний. З формули (1) і теореми Гротендіка [7] про зображення тензорного добутку двох повних просторів, один з яких є ядерним, випливає справедливість таких топологічних ізоморфізмів:

$$G_+(X) \simeq X \otimes_\pi G_+ \simeq \operatorname*{limind}_{\nu, b\to+\infty} X \otimes_\pi G_\nu^b, \tag{2}$$

де символом $\otimes_\pi$ позначено поповнення алгебричного тензорного добутку $\otimes$ в проективній локально опуклій топології.

Лема. *Для довільної функції* $x \in G_+(X)$ *існують такі вектори* $\nu \succ 0$ *і* $b \succ 0$, *що* $x \in X \otimes_\pi G_\nu^b$, *при цьому елемент* $x \in G_+(X)$ *можна подати (взагалі кажучи неоднозначно) у вигляді абсолютно збіжного ряду*

$$x = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m \otimes \varphi_m, \qquad \lambda_m \in \mathbb{C}, \qquad x_m \in X, \qquad \varphi_m \in G_\nu^b, \tag{3}$$

де $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} |\lambda_m| < +\infty$, *і послідовності функцій* $\{\varphi_m\}$ *та елементів* $\{x_m\}$ *прямують до нуля в просторах* G_n^b *та* X *відповідно.*

Д о в е д е н н я. Твердження є безпосереднім наслідком формули (2) і відомої [5] теореми про зображення елементів поповнення проективного тензорного добутку метризовних просторів.

Ідеал $G'^{\perp}_+$ є інваріантний у просторі G відносно операторів зсуву вздовж конуса $\mathbb{R}_+^n$, тому діаграма

$$\begin{array}{ccc} G_+ \ni \boldsymbol{\varphi} & \xrightarrow{U_s} & \boldsymbol{\varphi}(\cdot + s) \in G_+ \\ \Theta \uparrow & & \Theta \uparrow \\ G \ni \varphi & \longrightarrow & \varphi(\cdot + s) \in G \end{array} \tag{4}$$

однозначно визначає n-параметричну напівгрупу $U : \mathbb{R}_+^n \ni s \to U_s \in L[G_+]$ зсувів вздовж конуса $\mathbb{R}_+^n$. Крос-кореляцією функціонала $f \in G'_+$ і основної функції $\boldsymbol{\varphi} \in G_+$ називають функцію $(f \star \boldsymbol{\varphi})(t) := \langle f(s), U_s \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle$, $t, s \in \mathbb{R}_+^n$. Лінійне відображення $T_f : G_+ \ni \boldsymbol{\varphi} \mapsto f \star \boldsymbol{\varphi} \in G_+$, породжене функціоналом $f \in G'_+$, називають оператором крос-кореляції. Нехай I_X − одиничний оператор, що діє на банаховому просторі X. Для довільного $T \in L[G_+]$ визначимо оператор $I_X \otimes T \in L[G_+(X)]$ співвідношенням $(I_X \otimes T)x = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m x_m \otimes T\boldsymbol{\varphi}_m$, де функція $x \in G_+(X)$ має вигляд (3). Векторним оператором зсуву називають оператор $I_X \otimes U_s \in L[G_+(X)]$. Кажуть, що деякий оператор $I_X \otimes T$ є інваріантний відносно сім'ї $\{I_X \otimes U_s : s \in \mathbb{R}_+^n\}$, якщо справджується рівність $I_X \otimes (T \circ U_s) = I_X \otimes (U_s \circ T)$ для всіх $s \in \mathbb{R}_+^n$. Очевидно, що $I_X \otimes T$ є інваріантний відносно $\{I_X \otimes U_s : s \in \mathbb{R}_+^n\}$, якщо $T \in [U]^C$. Векторним оператором крос-кореляції називають $I_X \otimes T_f \in L[G_+(X)]$.

Теорема 1. *Для кожного ультрарозподілу* $f \in G'_+$ *оператор* $I_X \otimes T_f$ *є ядерний і інваріантний відносно операторів* $\{I_X \otimes U_s : s \in \mathbb{R}_+^n\}$. *Навпаки, для кожного оператора* $T \in L[G_+]$, *який інваріантний відносно* $\{I_X \otimes U_s : s \in \mathbb{R}_+^n\}$, *існує такий єдиний ультрарозподіл* $f \in G'_+$, *що* $T = T_f$ *і* $I_X \otimes T = I_X \otimes T_f$.

Доведення. Оскільки оператор $I_X \otimes T_f$ належить простору $L[G_+(X)]$ і для кожної функції $x \in G_+(X)$ справедливе зображення (3), то за критерієм ядерності [1] отримуємо, що $I_X \otimes T_f$ є ядерним оператором.

Далі для векторного оператора зсуву $I_X \otimes U_s$ та функції $x \in G_+(X)$ маємо

$$[I_X \otimes (U_s \circ T_f)]x = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m \otimes (U_s \circ T_f)\varphi_m =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m \otimes (T_f \circ U_s)\varphi_m = [I_X \otimes (T_f \circ U_s)]x,$$

тобто оператор $I_X \otimes T_f$ є інваріантний відносно $\{I_X \otimes U_s : s \in \mathbb{R}_+^n\}$.

Нехай $T \in L(G_+)$ – такий довільний оператор, що $I_X \otimes T_f$ інваріантний відносно $\{I_X \otimes U_s : s \in \mathbb{R}_+^n\}$. Лінійний неперервний функціонал $f : G_+ \ni \varphi \to (T\varphi)(0)$ визначає ультрарозподіл $f \in G'_+$. Тоді для довільної функції $\varphi \in G_+$ справедлива рівність $(T\varphi)(0) =: \langle f, \varphi \rangle = (f * \varphi)(0) = (T_f \varphi)(0)$, в яку замість φ підставимо $U_s\varphi$. Використавши те, що $T \in [U]^C$, отримаємо:

$$(T\varphi)(s) = (U_s \circ T\varphi)(0) = (T \circ U_s\varphi)(0) = \langle f, U_s\varphi \rangle = (T_f\varphi)(s),$$

тобто $T = T_f$, а отже, $I_X \otimes T = I_X \otimes T_f$.

Операторне числення для згорткової алгебри ультрарозподілів Рум'є. Під n-параметричною напівгрупою лінійних обмежених операторів над банаховим простором X з генератором $-\mathrm{i}A$, де $A = (A_1, \ldots, A_n)$, розуміють відображення

$$S_t : \mathbb{R}_+^n \ni (t_1, \ldots, t_n) = t \mapsto e^{-\mathrm{i}tA} := e^{-\mathrm{i}(t_1A_1 + \cdots + t_nA_n)} \in L[X],$$

таке, що $e^{-\mathrm{i}tA}\big|_{t=0} = I_X$ і $e^{-\mathrm{i}(t+s)A} = e^{-\mathrm{i}tA} \circ e^{-\mathrm{i}sA}$ для всіх $t, s \in \mathbb{R}_+^n$. Кожній n-параметричній напівгрупі $e^{-\mathrm{i}tA}$ можна поставити у відповідність однопараметричні напівгрупи

$$S_{t_j} : [0, +\infty) \ni t_j \mapsto S_{(0,\ldots,0,t_j,0,\ldots,0)} = e^{-\mathrm{i}t_jA_j} \in L[X], \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Зауважимо, що кожну n-параметричну напівгрупу S_t можна зобразити як композицію $S_t = S_{t_1} \circ \ldots \circ S_{t_n}$, причому напівгрупи S_{t_j}, $j = 1, \ldots, n$, комутують одна з одною. Генератор $-\mathrm{i}A_j$ напівгрупи S_{t_j}, $j = 1, \ldots, n$, визначають за співвідношенням

$$-\mathrm{i}A_j x = -\mathrm{i}\lim_{t_j\to+0}\frac{S_{t_j}x - x}{t_j} = \partial_j^1 S_{t_j}x\Big|_{t_j=+0}, \qquad x\in D(A_j),$$

де $D(A_j)$ складається з тих елементів $x\in X$, для яких існує вище вказана границя. Кажуть, що n-параметрична напівгрупа S_t є сильно неперервна або (C_0)-напівгрупа, якщо $\lim\limits_{t\to+0}\|S_t x - x\| = 0$ для всіх $x\in X$. Якщо S_t – (C_0)-напівгрупа, то кожен оператор $-\mathrm{i}A_j$ є замкненим і щільно визначеним з областю визначення $D(A_j)\subset X$.

Нехай I_+ позначає одиничний оператор в $L[G_+]$. Розглянемо в банаховому просторі X підпростір

$$\widehat{G}_A := \left\{\widehat{x}_A\in X : x\in G_+(X)\right\}, \qquad \widehat{x}_A := \int_{\mathbb{R}_+^n}(e^{-\mathrm{i}tA}\otimes I_+)x(t)dt\,, \tag{5}$$

де $(e^{-\mathrm{i}tA}\otimes I_+)x(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m e^{-\mathrm{i}tA}x_m\otimes\boldsymbol{\varphi}_m(t)$, а елемент $x\in G_+(X)$ має вигляд (3). Зауважимо, що інтеграл у формулі (5) є інтегралом Бохнера від векторнозначної функції.

Теорема 2. *Якщо* $\{S_t : t\in\mathbb{R}_+^n\}$ *–* n*-параметрична* (C_0)*-напівгрупа, то підпростір* $\widehat{G}_A$ *щільний у банаховому просторі* X*.*

Д о в е д е н н я. Безпосередньо з властивостей інтеграла Бохнера випливає, що $\langle x', \widehat{x}_A\rangle = \int_{\mathbb{R}_+^n}\langle x', (e^{-\mathrm{i}tA}\otimes I_+)x(t)\rangle\,dt$, де $x'\in X'$ – довільний лінійний і неперервний функціонал із спряженого до X простору X'. Припустимо, що існує такий функціонал $x'\in X'$, для якого $.\langle x', \widehat{x}_A\rangle = 0$. для всіх $\widehat{x}_A\in\widehat{G}_A$, а отже, і для всіх $x\in G_+(X)$. Покажемо, що в такому випадку $x' = 0$. Не зменшуючи загальності, достатньо це показати для всіх елементів з простору $G_+(X)$ виду $x(t) = x\otimes\varphi(t)$, де $x\in X$, $\varphi(t)\in G_+$. Тоді $\langle x', (e^{-\mathrm{i}tA}\otimes I_+)x(t)\rangle = \langle x', e^{-\mathrm{i}tA}x\rangle\varphi(t)$. Оскільки $e^{-\mathrm{i}tA}$ є (C_0)-напівгрупа, а x та $\varphi(t)$ пробігають всі елементи просторів X та G_+ відповідно, то поляра $(\widehat{G}_A)^o = \{x' : \langle x', \widehat{x}\rangle\le 1\}$ містить єдиний елемент $x' = 0$. Отже, з теореми про біполяру [5] випливає, що простір виду (5) є щільним в X.

Визначимо лінійне перетворення вигляду

$$F_A:\quad G_+(X)\ni x\to\widehat{x}_A\in\widehat{G}_A\,.$$

На просторі $\widehat{G}_A$ задамо таку топологію, щоб F_A було неперервним відображенням. Для цього визначимо простори $\widehat{G}_\nu := \left\{\widehat{x}_A\in X : x\in G_\nu(\mathbb{R}_+^n, X)\right\}$, наділені індукованою відображенням $G_\nu(\mathbb{R}_+^n, X)\ni x\to\widehat{x}_A\in\widehat{G}_\nu$ топологією. При $0\prec\nu\prec\mu$ діаграма

$$\begin{array}{ccc}\widehat{G}_\nu & \longrightarrow & \widehat{G}_\mu\\ F_A\uparrow & & F_A\uparrow\\ G_\nu(\mathbb{R}_+^n, X) & \longrightarrow & G_\mu(\mathbb{R}_+^n, X)\end{array}$$

комутативна і вкладення $G_\nu(\mathbb{R}_+^n, X)\subset G_\mu(\mathbb{R}_+^n, X)$ є неперервні. Тому неперервні вкладення $\hat{G}_\nu \subset \hat{G}_\mu$. Отже, на просторі $\hat{G}_A$ можна ввести топологію індуктивної границі $\hat{G}_A = \operatorname*{limind}_{\nu \to +\infty} \hat{G}_\nu$. Зауважимо, що за такої топологізації простору $\hat{G}_A$ перетворення F_A здійснює топологічний ізоморфізм відповідних просторів.

З комутативності діаграми (4) випливає, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}_A \ni \hat{x}_A & \xrightarrow{I_X \hat{\otimes} U_s} & \hat{x}_A(s) \in \hat{G}_A \\ F_A \uparrow & & F_A \uparrow \\ G_+(X) \ni x & \xrightarrow{I_X \otimes U_s} & x(\cdot + s) \in G_+(X) \end{array}$$

однозначно визначає n-параметричну (C_0)-напівгрупу операторів

$$I_X \hat{\otimes} U : \mathbb{R}^n_+ \ni s \mapsto I_X \hat{\otimes} U_s \in L[\hat{G}_A].$$

Теорема 3. *Нехай* $\mathbb{R}^n_+ \ni t \mapsto e^{-\mathrm{i}tA} \in L(X)$ – n*-параметрична* (C_0)*-напівгрупа з генератором* $-\mathrm{i}A$. *Відображення виду* $\Phi_A : G'_+ \ni f \to \hat{f}(A) \in L[\hat{G}_A]$, *де лінійний оператор* $\hat{f}(A)$ *визначений формулою*

$$\hat{f}(A): \quad \hat{G}_A \ni \hat{x}_A \mapsto \hat{f}(A)\hat{x}_A := \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-\mathrm{i}tA} \otimes T_f) x(t) dt, \tag{6}$$

є топологічним гомоморфізмом згорткової алгебри ультрарозподілів Рум'є на комутант $\left[I_X \hat{\otimes} U\right]^C$. *Відображення* Φ_A *володіє властивістю*

$$f * g(A) = \hat{f}(A) \circ \hat{g}(A), \qquad f, g \in G'_+.$$

Крім того, оператор $\hat{\delta}(A)$ *є одиничним у просторі* $L[\hat{G}_A]$, *де* $\delta \in G'_+$ – *функціонал Дірака.*

Д о в е д е н н я. Для довільних $f \in G'_+$ і $x \in G_+(X)$ їх крос-кореляцію позначимо $f \star x := (I_X \otimes T_f)x$. Користуючись комутативністю інтеграла Бохнера з довільним функціоналом $f \in G'_+$ [4], отримаємо:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-\mathrm{i}tA} \otimes T_f) x(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-\mathrm{i}tA} \otimes I_+)(f \star x)(t)\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e^{-\mathrm{i}tA} x_m \otimes \langle f(s), \varphi_m(s+t) \rangle\, dt = \left\langle f(s), \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-\mathrm{i}tA} \otimes I_+) x(s+t)\, dt \right\rangle =$$

$$= \left\langle f(s), e^{\mathrm{i}sA} \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-\mathrm{i}(s+t)A} \otimes I_+) x(s+t)\, dt \right\rangle = \left\langle f(s), e^{isA} \hat{x}_A \right\rangle.$$

Очевидно, що коли $x \in \ker F_A$, то $e^{isA} \hat{x}_A = 0$, а отже, $f \star x \in \ker F_A$. Тому відображення (6) коректно визначене. З неперервності відображень $I_X \otimes T_f$ та F_A, з відкритості F_A та комутативності діаграми

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}_A \ni \hat{x}_A & \xrightarrow{\hat{f}(A)} & \hat{f}(A)\hat{x}_A \in \hat{G}_A \\ F_A \uparrow & & F_A \uparrow \\ G_+(X) \ni x & \xrightarrow{I_X \otimes T_f} & f \star x \in G_+(X) \end{array}$$

випливає, що $\hat{f}(A) \in L[\mathfrak{E}_A]$. Покажемо, що Φ_A – гомоморфізм алгебр. Не важко перевірити, що рівність $(f * g) \star \varphi = f \star (g \star \varphi)$ справджується для всіх $f, g \in G'_+$ і $\varphi \in G_+$. Використовуючи розклад функції $x \in G_+(X)$ у ряд (3), легко довести рівність $(f * g) \star x = f \star (g \star x)$. Таким чином,

$$f \hat{*} g(A)\hat{x}_A = \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-itA} \otimes I_+)((f * g) \star x)(t)\,dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-itA} \otimes I_+)(f \star (g \star x))(t)\,dt = \hat{f}(A) \circ \hat{g}(A)\hat{x}_A .$$

Для дельта-функції Дірака маємо:

$$\hat{\delta}(A)\hat{x}_A = \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-itA} \otimes T_\delta)x(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n_+} (e^{-itA} \otimes I_+)x(t)\,dt = \hat{x}_A .$$

Оскільки G_+ є монтелевий простір [5], то на $L[G_+]$ топології рівномірної збіжності на компактах і на обмежених множинах збігаються. Оскільки $U_s \in L[G_+]$, то білінійне відображення $G'_+ \times G_+ \ni (f, \varphi) \mapsto f \star \varphi \in G_+$ є нарізно неперервне. З леми випливає, що $G'_+ \times G_+(X) \ni (f, x) \mapsto f \star x \in G_+(X)$ також є нарізно неперервне білінійне відображення. Тому з неперервності F_A випливає нарізна неперервність $\Psi : G'_+ \times \mathfrak{E}_A \ni (f, \hat{x}_A) \mapsto \hat{f}(A)\hat{x}_A \in \mathfrak{E}_A$. Простір $\mathfrak{E}_A$ є бочковим як індуктивна границя просторів Фреше. Таким чином, з теореми Банаха–Штейнгауса отримуємо одностайну неперервність відображення Ψ, що еквівалентно неперервності Φ_A. Оскільки $\mathfrak{E}_A$ – борнологічний простір [6], то $L[\mathfrak{E}_A]$ збігається з алгеброю всіх обмежених лінійних операторів на $\mathfrak{E}_A$. Отже, простір $L[\mathfrak{E}_A]$ – повний внаслідок повноти $\mathfrak{E}_A$ [6]. З леми випливає, що образ $\Phi_A[G'_+]$ збігається з комутантом $\left[I_X \hat{\otimes} U\right]^C$, який є замкнутим в алгебрі $L[\mathfrak{E}_A]$. Таким чином, неперервне відображення Φ_A має замкнутий образ у повному просторі $L[\mathfrak{E}_A]$. Отже, з теореми про відкрите відображення отримуємо, що Φ_A – топологічний гомоморфізм алгебр.

1. *Иосида К*. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
2. *Лопушанський О. В., Соломко А. В., Шарин С. В.* Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів // Матем. методи та фіз.-мех. поля. –2004. –**47**, №2. –С.95-99.
3. *Соломко А. В.* Операторне зображення алгебри ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному куті // Карпат. матем. публікації. – 2009. – **1**, № 2. – С. 197–207.
4. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
5. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
6. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1072 с.
7. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires // Mem.

Amer. Math. Soc. – 1955. – **16**, № 11. – P. 1–140.

8. *Komatsu H.* An Introduction to the Theory of Generalized Functions. – Tokyo University Publ., 2000.
9. *Komatsu H.* Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. – Tokyo. Sect. IA Math. – 1973. – **20**. – P. 25–105.
10. *Lopushansky O. V., Sharyn S. V.* Operator calculus for convolution algebra of Schwartz distribution on semiaxis // Mat. Stud. – 1997. – **7**, №1. – P. 61–72.
11. *Lopushansky O. V., Sharyn S. V., Solomko A. V.* Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone // Ibid. – 2011. – **35**, № 1. – P. 78–90.

ОПЕРАТОРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–ЛАПЛАСА СВЕРТОЧНОЙ АЛГЕБРЫ УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЙ РУМЬЕ

Построен векторный аналог операторного исчисления для генераторов сильно непрерывных n-параметрических полугрупп операторов в сверточной алгебре G'_+ ультрараспределений Румье с носителями в положительном n-мерном конусе $\mathbb{R}_+^n$. Доказана теорема об изображении образа операторного исчисления в виде коммутанта (C_0)-полугруппы операторов сдвига вдоль конуса $\mathbb{R}_+^n$.

OPERATOR FOURIER–LAPLACE TRANSFORMATION OF CONVOLUTION ALGEBRA OF ROUMIEU ULTRADISTRIBUTIONS

In the article it is constructed a vector analogue of operational calculus for generators of strong continuous n-parameter semigroups of operators in the convolution algebra G'_+ of Roumieu ultradistributions supported by positive n-dimensional cone $\mathbb{R}_+^n$. Theorem about representation of the operator calculus image as a commutant of (C_0)-semigroup of shifts along the cone $\mathbb{R}_+^n$ is proved.

Прикарпатський нац. ун-т
імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
12.09.11