УДК 512.552.12

І. С. Васюник, Б. В. Забавський

СТАБІЛЬНИЙ РАНГ АДЕКВАТНОГО ДУО-КІЛЬЦЯ БЕЗУ ТА ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ

Показано, що стабільний ранг адекватного дуо-кільця Безу рівний 2, а стабільний ранг всюди адекватного дуо-кільця Безу рівний 1. Введено поняття дуо-кільця майже стабільного рангу 1. Показано, що стабільний ранг дуо-кільця Безу майже стабільного рангу 1 при ненульовому радикалі Джекобсона рівний 1. Встановлено зв'язок всюди адекватних дуо-кілець Безу з чистими кільцями і кільцями з властивістю заміни.

Адекватні кільця ввів Хелмер як клас кілець, над якими довільна матриця діагоналізується, але вони не є нетерові [8]. Очевидним прикладом таких кілець є кільце аналітичних функцій [11] і регулярне кільце [7]. Адекватні дуо-кільця як некомутативне узагальнення комутативних адекватних кілець, мабуть, вперше розглянув Гаталевич [2]. Останніми роками вивчають тісні зв'язки адекватних кілець з кільцями з властивістю заміни. Нижче обчислено стабільний ранг адекватного дуо-кільця і його узагальнень. На актуальність таких досліджень вказують праці [3, 12, 13].

Під кільцем R розуміємо дуо-кільце з одиницею, причому $1 \neq 0$. Нагадаємо, що кільце R є дуо-кільцем, якщо довільний однобічний ідеал кільця є двобічним. Елемент a дуо-кільця R називають правим адекватним, якщо для довільного елемента $b \in R$ існують такі елементи $r, s \in R$, що $a = r \cdot s$, $rR + bR = R$, і для довільного елемента $s' \in R$, такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$. Дуо-кільце R є адекватним, якщо кожен ненульовий елемент є правим адекватним [2]. Всюди адекватне кільце − це дуо-кільце, в якому довільний елемент (зокрема, і нуль) є правим адекватним. Очевидним прикладом всюди адекватного кільця є абелево-регулярне кільце [2].

Нагадаємо, що кільце R має стабільний ранг 2 (в позначеннях $ст.р.(R) = 2$), якщо для таких довільних елементів $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$, існують такі елементи $x, y \in R$, що $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ [10]. Під кільцем Безу розуміємо кільце, в якому довільний однобічний скінченно породжений ідеал є головним.

Кільце R називають кільцем елементарних дільників, якщо довільну матрицю A домноженням на відповідні оборотні матриці P і Q зводять до канонічного діагонального вигляду $D = PAQ = diag(d_1, d_2, \dots d_n)$, причому $Rd_{i+1,i+1}R \subseteq Rd_{ii} \cap d_{ii}R$. Кільце, над яким довільну матрицю зводять до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями, називають кільцем з елементарною редукцією матриць [2].

Теорема 1. Стабільний ранг адекватного дуо-кільця Безу рівний 2.

Доведення. Нехай R − адекватне дуо-кільце Безу і $aR + bR + cR = R$. Якщо $c = 0$, то $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ для довільних елементів $x, y \in R$. Нехай $c \neq 0$, тоді $c = r \cdot s$, де $rR + aR = R$, і для довільного елемента $s' \in R$, такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$.

Покажемо, що $(a + br)R + (c + b \cdot 0)R = R$. Нехай $(a + br)R + cR = dR$ і $dR \neq R$. Оскільки $cR \subset dR$, то $c = dt$ для деякого елемента $t \in R$. Звідси $c = r \cdot s = dt$. Розглянемо рівність $rR + dR = hR$. З того, що $(a + br)R \subset dR \subset hR$, маємо $a+br=hk$ для деякого елемента $k\in R$. Так як $rR\subset hR$, то $r=hr_0$ для деякого елемента $r_0\in R$. Звідси $a+bhr_0=hk$. Оскільки R − дуо-кільце, то для елементів b і h існує такий елемент $b'\in R$, що $bh=hb'$. Тоді отримаємо $a=h(k-b'r_0)$, що можливо лише тоді, коли h є оборотним елементом кільця R, бо $rR+aR=R$. Отже, $rR+dR=R$.

Зауважимо, що $rR+sR=R$. Дійсно, якщо $rR+sR=kR$, причому $kR\neq R$, тоді, з одного боку, $kR+aR=tR\neq R$ оскільки $sR\subset kR\neq R$, а з іншого − $kR+aR=R$, так як $rR\subset kR\neq R$. Отже, $rR+sR=R$.

Розглянемо рівність $sR+dR=\alpha R$. З означення елемента s випливає, що коли α − необортний елемент, то $aR+\alpha R=\beta R$, де $\beta R\neq R$. Отже, $a=\beta a_0$ і $a+br=\beta\gamma$ для деяких елементів $a_0,\gamma\in R$. Звідси $br=\beta(\gamma-a_0)$. Оскільки $rR+sR=R=Rr+Rs$, то $bR\subset\beta R$. А з іншого боку, $aR\subset\beta R$, $cR\subset\beta R$ і $aR+bR+cR=R$, що можливо лише тоді, коли β − оборотний елемент. Але ж $\beta R\neq R$. Отже, $(a+br)R+(c+b\cdot 0)R=R$, що і доводить нашу теорему.

Нагадаємо, що кільце R має стабільний ранг 1 (у позначеннях $ст.р.(R)=1$), якщо для довільних елементів $a,b\in R$, таких, що $aR+bR=R$, існує такий елемент $x\in R$, що $(a+bx)R=R$ [9].

Теорема 2. Стабільний ранг всюди адекватного дуо-кільця Безу рівний 1.

Доведення. Нехай R – всюди адекватне дуо-кільце Безу і $aR+bR=R$ для елементів $a,b\in R$. Згідно з означенням всюди адекватного кільця $0=r\cdot s$, де $rR+aR=R$, і для довільного елемента $s'\in R$, такого, що $sR\subset s'R\neq R$, виконується умова $s'R+bR\neq R$. Покажемо, що $(a+br)R=R$.

Нехай $(a+br)R+sR=dR$, де d − необоротний елемент кільця R. Оскільки $sR\subset dR\neq R$, то $s=dt$, де t − деякий елемент кільця R. За означенням елемента s маємо $dR+aR=\alpha R$, де $\alpha R\neq R$. Оскільки $aR\subset\alpha R$, то $a=\alpha a_0$ для деякого елемента $a_0\in R$. Так як $(a+br)R\subset\alpha R$, то $a+br=\alpha\gamma$ для деякого елемента $\alpha\in R$. Отже, $br=\alpha(\gamma-a_0)$, а це можливо лише тоді, коли α − оборотний елемент кільця R, оскільки $aR+bR=R$ і $rR+sR=R$. Нехай $(a+br)R+rR=dR$ і $dR\neq R$. Очевидно, що $(a+br)R\subset dR$, тоді $a+br=dk$ для деякого елемента k кільця R. Враховуючи, що $rR\subset dR$, отримаємо $r=dr_0$ для деякого елемента r_0 кільця R. Звідси маємо, що $a+bdr_0=dk$. Якщо R − дуо-кільце, то для елементів b,d існує такий елемент b' кільця R, що $bd=db'$. Отже, $a=d(k-b'r_0)$, що неможливо, так як $rR+aR=R$. Отже, d − оборотний елемент кільця R. В результаті отримали $(a+br)R+sR=R$ і $(a+br)R+rR=R$ та $0=r\cdot s$, тоді $(a+br)R=R$, що і потрібно було довести.

Враховуючи результати праць [4, 6, 13], отримали такі результати.

Теорема 3. Всюди адекватне дуо-кільце Безу є кільцем елементарних дільників.

Теорема 4. Всюди адекватне дуо-кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Теорема 5. Група Уайтхеда всюди адекватного дуо-кільця Безу є тривіальна.

Зауважимо, що для адекватного дуо-кільця Безу з ненульовим радикалом Джекобсона стабільний ранг насправді рівний 1.

Теорема 6. Стабільний ранг адекватного дуо-кільця Безу з ненульовим радикалом Джекобсона рівний 1.

Доведення. Нехай $aR + bR = R$. Доведемо існування такого елемента $r \in R$, що $(a + br)R = R$. Нехай $c \in J(R)$ і $c \neq 0$. Очевидно, що $aR + bR + cR = R$. Згідно з теоремою 1 існує такий елемент $r \in R$, що $(a + br)R + (c + b \cdot 0)R = R$, тобто $(a + br)R + cR = R$. Оскільки $c \in J(R)$, то $(a + br)R = R$, що і потрібно було довести.

Враховуючи результати праць [4, 6, 13], як очевидний наслідок отримали такі результати.

Теорема 7. Адекватне дуо-кільце Безу з ненульовим радикалом Джекобсона є кільцем елементарних дільників.

Теорема 8. Адекватне дуо-кільце Безу з ненульовим радикалом Джекобсона є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Теорема 9. Група Уайтхеда адекватного дуо-кільця Безу з ненульовим радикалом Джекобсона є тривіальна.

Нагадаємо, що елемент a дуо-кільця R є елементом майже стабільного рангу 1, якщо $ст.р.(R / aR) = 1$ [1].

Теорема 10. В адекватному дуо-кільці Безу довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1.

Доведення. Нехай R − адекватне дуо-кільце Безу і $c \in R \setminus \{0\}$. Тоді $c = r \cdot s$, де $rR + aR = R$, і для довільного елемента $s' \in R$, такого, що $sR \subset s'R \neq R$, виконується умова $s'R + bR \neq R$. Згідно з доведенням теореми 1 маємо $(a + br)R + cR = R$, а це означає не що інше як $ст.р.(R / cR) = 1$. Через довільний вибір елемента $c \in R$ маємо доведення теореми.

Теорема 11. Нехай R − дуо-кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент має стабільний ранг 1 і радикал Джекобсона кільця R не рівний нулю. Тоді $ст.р.(R) = 1$.

Доведення. Нехай R − дуо-кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1, причому радикал Джекобсона $J(R)$ кільця R не рівний нулю. Нехай $aR + bR = R$ і $c \in R \setminus \{0\}$. Розглянемо фактор-кільце $K = R / cR$. Очевидно, що $\bar{a}K + \bar{b}K = K$, де $\bar{a} = a + cR \in K$, $\bar{b} = b + cR \in K$. Оскільки $ст.р.(K) = 1$, то існує такий елемент $\bar{t} \in K$, що $(\bar{a} + \bar{b}\bar{t})K = K$. Звідси $(a + bt)R + cR = R$ для деякого елемента t кільця R. Враховуючи, що c належить радикалу Джекобсона, маємо $(a + bt)R = R$. Оскільки вибір елементів a, b кільця R довільний, маємо доведення теореми.

Як очевидний наслідок цього результату, враховуючи праці [4, 6, 13], отримаємо такі результати.

Теорема 12. Нехай R − дуо-кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1, причому радикал Джекобсона кільця R − ненульовий. Тоді R є кільцем елементарних дільників.

Теорема 13. Нехай R − дуо-кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1, причому радикал

Джекобсона кільця R − ненульовий. Тоді R − кільце з елементарною редукцією матриць.

Теорема 14. Нехай R − дуо-кільце Безу, в якому довільний ненульовий елемент є елементом майже стабільного рангу 1, причому радикал Джекобсона кільця R є ненульовий. Тоді група Уайтхеда кільця R тривіальна.

Нагадаємо, що кільце R називають чистим, якщо кожен його елемент з кільця R можна зобразити як суму ідемпотента та оборотного елемента з R [9]. Кільце R називають кільцем з властивістю заміни, якщо для довільного елемента $a \in R$ існує такий ідемпотент e, що $e \in aR$ і $1-e \in (1-a)R$ [9]. Кільце R є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1, якщо з умови $aR+bR=R$ для довільної пари елементів a,b знайдеться такий ідемпотент $e \in R$, що $a+be$ є оборотним елементом кільця R [9]. Оскільки в дуо-кільці ідемпотенти центральні, то і наступна теорема пов'язує ці класи кілець так.

Теорема 15[5]. Нехай R − дуо-кільце. Наступні властивості є еквівалентні:

1) R − кільце з властивістю заміни;

2) R − чисте кільце;

3) R − кільце ідемпотентного стабільного рангу 1.

Покажемо, що всюди адекватне дуо-кільце Безу є чистим.

Теорема 16. Всюди адекватне дуо-кільце Безу є кільцем ідемпотентного стабільного рангу 1.

Доведення. Нехай R − всюди адекватне дуо-кільце Безу і $bR+cR=R$. Згідно з означенням всюди адекватного дуо-кільця, елемент 0 можна подати у вигляді $0=r\cdot s$, де $rR+aR=R$, і для довільного елемента $s'\in R$, такого, що $sR\subset s'R\neq R$, виконується умова $s'R+bR\neq R$. Зауважимо, що $rR+sR=R$, а отже, існують елементи u,v кільця R, що $ru+sv=1$. Покажемо, що елемент ru є ідемпотентом. Дійсно, $ru\cdot ru=ru(1-sv)=$ $=ru+rusv=ru+rsu'v=ru$ для деякого елемента u' кільця R, такого, що $us=su'$ (існування такого елемента випливає з того, що R − дуо-кільце). Подібно доводиться, що $(sv)^2=sv$. Позначимо $ru=e$. Покажемо, що $(b+ce)R=R$. Нехай $(b+ce)R=hR\neq R$. Розглянемо рівність $hR+rR=tR$. Оскільки $ceR\subset tR$, то $bR\subset hR$, що неможливо, так як $rR\subset tR$ і $rR+bR=R$. Тому $hR+rR=R$. Нехай $sR+hR=tR\neq R$. Звідси випливає, що $tR+bR=kR\neq R$, згідно з адекватністю 0. Але з іншого боку, $(b+ce)R=hR$ і $eR+sR=R$, отже, $cR\subset kR$. Але це неможливо, оскільки $bR\subset kR$, але $bR+cR=R$. Отримана суперечність з припущенням свідчить, що $sR+hR=R$. Враховуючи, що $hR+rR=R$, маємо $(rs)R+hR=R$. Так як $rs=0$, тоді $hR=R$, що і доводить теорему.

Як наслідок отримаємо такий результат.

Теорема 17. Всюди адекватне дуо-кільце Безу є кільцем з властивістю заміни.

Теорема 18. Всюди адекватне дуо-кільце Безу є чистим.

1. *Білявська С. І.* Елементи стабільного та майже стабільного стабільного рангу 1 // Вісник Львів. нац. ун-ту. − 2009. − **71**. − С. 5−12.

2. *Гаталевич А. І.* Про адекватні і узагальнено адекватне дуо-кільце і дуо-кільце елементарних дільників // Мат. студії. − 1998. − **9**, № 2. − С. 115−119.

3. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр. матем. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1564–1567.
4. *Забавський Б. В., Романів О. М.* Кільця з елементарною редукцією матриць // Там же. – 2000. – **52**, № 2. – С. 1641–1649.
5. *Camillo V. Yu H. P.* Exchange rings, units and idempotents // Comm. Algebra. –1994. – **22**, № 12. – С. 4737–4749.
6. *Cohn P. M.* On the structure of the GL_2 of a ring // Publ. Math. I.H.E.S. – 1966, № 30. – P. 5–59.
7. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 362–365.
8. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, № 2. – P. 225–236.
9. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – **239**. –P. 269–278.
10. *Vaserstein L.N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Functional Anal. Appl. – 1971. – **5**. – P. 102–110.
11. *Wedderburn S.H.M.* On matrices whose coefficients are functions of single variable // Trans. Amer. Math. Soc. – 1915. – **16**, № 2. –P. 328–332.
12. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range // Alg. Disc. Math. – 2005. – № 1. – P. 151–165.
13. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank // Вісник Львів. нац. ун-ту. – 2003. – **61**. – P. 206–210.

СТАБИЛЬНЫЙ РАНГ АДЕКВАТНОГО ДУО-КОЛЬЦА БЕЗУ И ЕГО ОБОБЩЕНИЙ

Показано, что стабильный ранг адекватного дуо-кольца Безу равен 2, а стабильный ранг везде адекватного дуо-кольца Безу равен 1. Введено понятие дуо-кольца почти стабильного ранга 1. Показано, что стабильный ранг дуо-кольца Безу почти стабильного ранга 1 при ненулевом радикале Джекобсона равен 1. Установлена между везде адекватными дуо-кольцами Безу с чистыми кольцами и кольцами со свойством замены.

STABLE RANG ADEQUATE DUO-BEZOUT RING AND GENERALIZED

It is shown that the stable rang of adequate Bezout duo-ring is equal to 2 and stable rang every where adequate Bezout duo-ring equal 1. Introduced the concept of duo-ring almost stable rang 1. It is shown that the stable rang of Bezout duo-ring almost stable rang 1 with nonzero Jacobson radical is equal to 1. Established connection every where adequate Bezout duo-rings with clean rings and exchange rings.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
15.09.11