УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

ПРО ПОДІБНІСТЬ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ ПРОСТОЇ СТРУКТУРИ

Досліджено подібність матричних многочленів простої структури без однакових інваріантних множників. Знайдена система інваріантів виділеного класу матричних многочленів стосовно напівскалярної еквівалентності.

Розглянемо матриці із кільця $M(n, \mathbf{C}[x])$, $\mathbf{C}$ − поле комплексних чисел. Останнє вважаємо упорядкованим лексикографічно. Згідно з працями [1, 2] неособлива матриця $N(x) \in M(n, \mathbf{C}[x])$ множенням зліва і справа відповідно на матриці $Q \in GL(n, \mathbf{C})$ і $P(x) \in GL(n, \mathbf{C}[x])$ зводиться до трикутного вигляду з інваріантними множниками на головній діагоналі:

$$QN(x)P(x) = A(x) = \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & & & 0 \\ a_{21}(x) & \varphi_2(x) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{n,\, n-1}(x) & \varphi_n(x) \end{matrix} \right\|, \qquad (1)$$

де $\varphi_j(x)$ ділить многочлени $\varphi_{j+1}(x)$, $a_{ij}(x)$ і $\deg a_{ij} < \deg \varphi_i$, $j = 1, \ldots, n-1$, $j < i$. Перетворення $N(x) \to QN(x)P(x)$ називають [1, 2] напівскалярно еквівалентними. Оскільки форма (1) визначається неоднозначно, то питання класифікації матриць щодо напівскалярної еквівалентності залишається нерозв'язаним. Таким чином, виникає необхідність довизначення цієї форми та знаходження її інваріантів. Загалом це досить складна задача, пов'язана з відомою проблемою пар матриць [1].

Припускаємо, що матриця $N(x)$ простої структури (тобто її елементарні дільники лінійні) і всі інваріантні множники різні. За таких умов уточнюємо трикутну форму (1) та встановлюємо систему інваріантів відносно напівскалярної еквівалентності. За наслідком 2 з праці [1] знайдена система є одночасно системою інваріантів подібності матричних многочленів, старші коефіцієнти яких дорівнюють одиничній матриці. В деяких випадках ця система інваріантів є повна.

Проаналізуємо низку праць де висвітлено суміжні питання. Зокрема, праця [6] присвячена побудові канонічних форм щодо напівскалярної еквівалентності та подібності для многочленних матриць без кратних характеристичних коренів. У публікації [7] досліджено т. зв. PS-еквівалентність для матриць з одним неодиничним інваріантним множником. Ситуації, коли кількість різних інваріантних множників матриці ≤ 3, розглянуто в [3−5].

Позначимо $\varphi_{ij}(x) = \varphi_i(x) / \varphi_j(x)$, $i > j$, і сформулюємо таке допоміжне твердження.

Твердження 1. *Зобразимо матрицю* $A(x)$ *вигляду* (1) *так*:

$$A(x) = A'(x) diag(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \; A'(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ \tilde{a}_{21}(x) & 1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \tilde{a}_{n1}(x) & \ldots & \tilde{a}_{n,n-1}(x) & 1 \end{matrix} \right\|,$$

і нехай $S \in GL(n, \mathbf{C})$. *Якщо провідні мінори порядку* $1, \ldots, n-1$ *добутку* $SA'(x)$ *взаємно прості відповідно з частками* $\varphi_{21}(x), \ldots, \varphi_{n,\, n-1}(x)$, *то добуток* $SA(x)$ *правоеквівалентний до матриці вигляду*

$$B(x)=\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & & & 0\\ b_{21}(x) & \varphi_2(x) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ b_{n1}(x) & \ldots & b_{n,\,n-1}(x) & \varphi_n(x)\end{matrix}\right\|, \tag{2}$$

де $\varphi_j(x)$ *ділить многочлени* $\varphi_{j+1}(x)$, $b_{ij}(x)$ і $\deg b_{ij} < \deg \varphi_i$, $j=1,\ldots,n-1$, $j<i$.

Доведення дає можливість вказати такі матриці $R(x)\in GL(n,\mathbf{C}[x])$ та (2), що

$$SA(x)=B(x)R(x). \tag{3}$$

За елементами матриць $S=\|s_{pq}\|_1^n$, $A'(x)$ побудуємо многочлен

$$r_{11}(x)=\|s_{11}\ \ldots\ s_{1n}\|\,\|1\ \ \tilde{a}_{21}(x)\ \ldots\ \tilde{a}_{n1}(x)\|^T$$

(T – символ операції транспонування) і розглянемо конгруенцію

$$\|s_{21}\ \ldots\ s_{2n}\|\,\|1\ \ \tilde{a}_{21}(x)\ \ldots\ \tilde{a}_{n1}(x)\|^T \equiv y_{21}(x)r_{11}(x) \pmod{\varphi_{21}(x)}$$

з невідомим $y_{21}(x)$. Оскільки $(r_{11}(x),\varphi_{21}(x))=1$, то існує єдиний розв'язок $y_{21}(x)\in\mathbf{C}[x]$ степеня меншого, ніж $\deg\varphi_{21}$. Знайдемо елемент $r_{21}(x)\in\mathbf{C}[x]$ як частку від ділення (націло) на $\varphi_{21}(x)$ різниці

$$\|s_{21}\ \ldots\ s_{2n}\|\,\|1\ \ \tilde{a}_{21}(x)\ \ldots\ \tilde{a}_{n1}(x)\|^T - y_{21}(x)r_{11}(x)$$

і побудуємо многочлени

$$r_{12}(x)=\|s_{12}\ \ldots\ s_{1n}\|\,\|1\ \ \tilde{a}_{32}(x)\ \ldots\ \tilde{a}_{n2}(x)\|^T\,\varphi_{21}(x),$$

$$r_{22}(x)=(\|s_{22}\ \ldots\ s_{2n}\| - y_{21}(x)\|s_{12}\ \ldots\ s_{1n}\|)\,\|1\ \ \tilde{a}_{32}(x)\ \ldots\ \tilde{a}_{n2}(x)\|^T.$$

Таким чином, на першому кроці можемо записати рівність

$$\|s_{pq}\|_1^{2,n}\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & \\ a_{21}(x) & \varphi_2(x)\\ \ldots & \ldots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x)\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & \\ b_{21}(x) & \varphi_2(x)\end{matrix}\right\|\,\|r_{pq}\|_1^2,$$

де $b_{21}(x)=y_{21}(x)\varphi_1(x)$, $\deg b_{21}<\deg\varphi_2$, $\|r_{pq}(x)\|_1^2\in M(2,\mathbf{C}[x])$.

Припустимо за індукцією виконання рівності

$$\|s_{pq}\|_1^{k,n}\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & & \\ a_{21}(x) & \varphi_2(x) & \\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1}(x) & \ldots & \varphi_k(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nk}(x)\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & & & \\ b_{21}(x) & \varphi_2(x) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ b_{k1}(x) & \ldots & b_{k,k-1}(x) & \varphi_k(x)\end{matrix}\right\|\,\|r_{pq}\|_1^k, \tag{4}$$

де $b_{ij}(x)=y_{ij}(x)\varphi_j(x)$, $\deg b_{ij}<\deg\varphi_i$, $\|r_{pq}(x)\|_1^k\in M(k,\mathbf{C}[x])$. Розглянемо сукупність конгруенцій

$$\|s_{k+1,\,1}\ \ldots\ s_{k+1,\,n}\|\left\|\begin{matrix}1 & & \\ \tilde{a}_{21}(x) & 1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \tilde{a}_{l1}(x) & \ldots & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \tilde{a}_{n1}(x) & \ldots & \tilde{a}_{nl}(x)\end{matrix}\right\| \equiv \|y_{k+1,1}\ \ldots\ y_{k+1,l}\|\,\|r_{pq}\|_1^l \pmod{\varphi_{l+1,\,l}(x)}, \tag{5}$$

де $y_{k+1,l}(x)$, $l=1,\ldots,k$, – невідомі. Оскільки многочлени $\varphi_{l+1,l}(x)$ і

$$\det\left\|r_{pq}(x)\right\|_1^l = \det\left(\left\|s_{pq}\right\|_1^{l,\,n}\begin{Vmatrix} 1 & & \\ \tilde{a}_{21}(x) & 1 & \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ \tilde{a}_{l1}(x) & \mathbf{K} & 1 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ \tilde{a}_{n1}(x) & \mathbf{K} & \tilde{a}_{nl}(x) \end{Vmatrix}\right)$$

взаємно прості, то із (5) знайдемо значення невідомих $y_{k+1,l}(x)$ на множині коренів многочлена $\varphi_{l+1,l}(x)$. За відшуканими значеннями побудуємо многочлени $y_{k+1,l}(x)\in \mathbf{C}[x]$, $l=1,\mathbf{K},k$, $\deg y_{k+1,l}<\deg\varphi_{k+1,l}$, що задовольняють рівність

$$\left\|s_{k+1,\,1}\quad \mathbf{K}\quad s_{k+1,\,n}\right\|\begin{Vmatrix} 1 & & \\ \tilde{a}_{21}(x) & 1 & \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ \tilde{a}_{k1}(x) & \mathbf{K} & 1 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ \tilde{a}_{n1}(x) & \mathbf{K} & \tilde{a}_{nk}(x) \end{Vmatrix} =$$

$$=\left\|y_{k+1,1}\quad \mathbf{K}\quad y_{k+1,k}\right\|\left\|r_{pq}(x)\varphi_{pq}(x)\right\|_1^k+\left\|r_{k+1,1}\varphi_{k+1,1}(x)\quad \mathbf{K}\quad r_{k+1,k}\varphi_{k+1,k}(x)\right\|, \qquad (6)$$

де $r_{k+1,l}(x)\in\mathbf{C}[x]$. Побудуємо многочлен $r_{1,k+1}(x)$, а потім − рекурентно $r_{i,k+1}(x)$:

$$r_{1,\,k+1}(x)=\left\|s_{1,\,k+1}\quad \mathbf{K}\quad s_{1n}\right\|\left\|1\quad \tilde{a}_{k+2,\,k+1}(x)\quad \mathbf{K}\quad \tilde{a}_{n,\,k+1}(x)\right\|^T\varphi_{k+1,\,1}(x), \qquad (7)$$

$$r_{i,\,k+1}(x)=(\left\|s_{i,\,k+1}\quad \mathbf{K}\quad s_{in}\right\|\left\|1\quad \tilde{a}_{k+2,\,k+1}(x)\quad \mathbf{K}\quad \tilde{a}_{n,\,k+1}(x)\right\|^T-$$

$$-\left\|y_{i1}\quad \mathbf{K}\quad y_{i,\,i-1}\right\|\left\|r_{1,\,k+1}(x)\quad \mathbf{K}\quad r_{i-1,\,k+1}(x)\right\|^T)\varphi_{k+1,\,i}(x),\; i=2,\mathbf{K},k+1. \qquad (8)$$

Врешті-решт, на основі співвідношень (4), (6)−(8) можемо записати рівність

$$\left\|s_{pq}\right\|_1^{k+1,\,n}\begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & & \\ a_{21}(x) & \varphi_2(x) & \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{k+1,1}(x) & \mathbf{K} & \varphi_{k+1}(x) \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{n1}(x) & \mathbf{K} & a_{n,k+1}(x) \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & & & \\ b_{21}(x) & \varphi_2(x) & & \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \\ b_{k+1,1}(x) & \mathbf{K} & b_{k+1,k}(x) & \varphi_{k+1}(x) \end{Vmatrix}\left\|r_{pq}\right\|_1^{k+1},$$

де $b_{ij}(x)=y_{ij}(x)\varphi_j(x)$, $\deg b_{ij}<\deg\varphi_i$, $\left\|r_{pq}(x)\right\|_1^{k+1}\in M(k+1,\mathbf{C}[x])$. Так робимо ще один крок. Твердження доведено.

Далі за аналогією з поняттям значення матриці на системі коренів многочлена [2] введемо поняття Т-*значення матриці* $G(x)$ *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)=a_0(x-\alpha_1)\,\mathbf{K}\,(x-\alpha_m)$, $\alpha_i\neq\alpha_j$. За означенням – це матриця вигляду $M^T_{G(x)}(\varphi)=\left\|G(\alpha_1)\quad \mathbf{K}\quad G(\alpha_m)\right\|$. Позначимо її також $M^T_{G(x)}[\alpha_1,\mathbf{K},\alpha_m]$, а через $A_p^{(q)}(x)$ – підматрицю матриці $A(x)$, що міститься у перших p стовпцях та останніх q рядках. Істинним є таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $\psi_{k+1,k}(x)$ – *довільний дільник многочлена* $\varphi_{k+1,k}(x)$ $(k=1, \mathbf{K}, n-1)$. *Тоді ранг* T-*значення* $M^{T}_{A_k^{(n)}(x)}(\psi_{k+1,k})$ *є інваріантом класу* $\{QN(x)P(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць.*

Доведення легко отримати із рівності (3), оскільки провідний мінор порядку k матриці $R(x)=\left\|r_{pq}(x)\right\|_1^n$ взаємно простий з многочленом $\varphi_{k+1,k}(x)$.

Нехай $A_1^{(n)}(x)$ – перший стовпець матриці $A(x)$ і $rankM^{T}_{A_1^{(n)}(x)}(\varphi_{21})=n_1$. Позначимо через M_1 множину коренів многочлена $\varphi_{21}(x)$ і розглянемо n_1-й декартів добуток $M_1^{n_1}$. Припускаємо, що множина $M_1^{n_1}$ упорядкована лексикографічно. Нехай $(\alpha_1, \mathbf{K}, \alpha_{n_1})\in M_1^{n_1}$ – такий найменший елемент, що $rankM^{T}_{A_1^{(n)}(x)}[\alpha_1, \mathbf{K}, \alpha_{n_1}]=n_1$. Справедливим є таке твердження.

Твердження 3. *У класі* $\{QN(x)P(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць існує матриця* $A(x)$ *вигляду* (1), T-*значення першого стовпця якої на множині* $\{\alpha_1, \mathbf{K}, \alpha_{n_1}\}$ *має вигляд*

$$rankM^{T}_{A_1^{(n)}(x)}[\alpha_1, \mathbf{K}, \alpha_{n_1}]=\left\|\begin{matrix}*\\0\end{matrix}\right\|, \tag{9}$$

де зірочка означає неособливий верхньотрикутний блок розміру $n_1\times n_1$; 0 – *нульовий* (*можливо, порожній*) *блок.*

Доведення. Спочатку додаванням першого рядка матриці (1), помноженого на деякі константи, до решти її рядків дістанемо матрицю, в якій елементи в позиціях $(2,1)$, ..., $(n,1)$ обертаються в нуль при $x=\alpha_1$. На основі твердження 2 деякий із недіагональних елементів першого стовпця не обертається в нуль, якщо $x=\alpha_2$. Можемо припускати, що таким є уже елемент в позиції $(2,1)$.

Далі додаванням деяких кратних другого рядка до всіх наступних рядків отриманої матриці прийдемо до матриці, в якій елементи в позиціях $(3,1)$, ..., $(n,1)$ обертаються в нуль при $x=\alpha_2$ і не всі нульові, якщо $x=\alpha_3$ Можемо вважати, що таким є елемент у позиції $(3,1)$. Продовжуючи так і далі, отримаємо матрицю вигляду (1) з потрібними властивостями. Твердження доведено.

Твердження 4. *Нехай* $A_k^{(m)}(x)$ – *підматриця матриці* $A(x)$, *що задовольняє умови твердження 3,* $k=1, \mathbf{K}, n-1$, $m=n-n_1, n-n_1+1, \mathbf{K}, n$, *і* $\psi_{k+1,k}(x)$ – *довільний дільник многочленна* $\varphi_{k+1,\,k}(x)$. *Тоді ранг* $rankM^{T}_{A_k^{(m)}(x)}(\psi_{k+1,\,k})$ *є інваріантом класу* $\{QN(x)P(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць.*

Доведення. Нехай задано напівскалярно еквівалентні матриці $A(x)$ (1) і $B(x)$ (2), що задовольняють умови твердження 3. Тоді в рівності (3) перетворювальна матриця $S=\left\|s_{pq}\right\|_1^n$ має верхній блочно-трикутний вигляд:

$$\left\|s_{pq}\right\|_1^n = triang\{s_{11}, \mathbf{K}, s_{n_1,\,n_1}, S_2\},\ S_2=\left\|s_{pq}\right\|_{n_1+1}^n. \tag{10}$$

Таким чином, на основі рівності (3) можемо записати:

$$triang\{s_{n-m+1,\,n-m+1},\mathbf{K},\,s_{n_1,\,n_1},\,S_2\}A_{k(m)}(x)=$$

$$=\left\|\begin{matrix} b_{n-m+1,\,1}(x) & \mathbf{K} & b_{n-m+1,\,n-m}(x) & \varphi_{n-m+1}(x) & & \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \\ b_{n1}(x) & \mathbf{K} & b_{n,\,n-m}(x) & b_{n,\,n-m+1}(x) & \mathbf{K} & \varphi_n(x)\end{matrix}\right\| \left\|r_{pq}\right\|_1^{n,\,k}. \quad (11)$$

Якщо врахувати умову $(\det\left\|r_{pq}\right\|_1^k,\varphi_{k+1,\,k}(x))=1$, неособливість першого множника в лівій частині та подільність на $\varphi_{k+1,\,k}(x)$ всіх елементів останніх $n-k$ стовпців першого співмножника у правій частині рівності (11), то переходом до Т-значень матриць на множині коренів многочлена $\psi_{k+1,k}(x)$ матимемо рівність рангів матриць $M^T_{A_k^{(m)}(x)}(\psi_{k+1,\,k})$ і $M^T_{B_k^{(m)}(x)}(\psi_{k+1,\,k})$. Тут $B_k^{(m)}(x)$ − підматриця в перших k стовпцях та останніх m рядках матриці $B(x)$. Твердження доведено.

Викладені в доведенні твердження 3 перетворення вважаємо першим кроком у зведенні матриці $A(x)$. Тоді буде зафіксований набір $\{\alpha_1,\mathbf{K},\alpha_{n_1}\}$ характеристичних коренів (многочлена $\varphi_{21}(x)$). Якщо $n_1\ge n-1$, то процес зведення закінчено. В іншому випадку розглянемо підматрицю $A_2^{(n-n_1)}(x)$ та сукупність її значень $A_2^{(n-n_1)}(\alpha_{i_1})$, де α_{i_1} пробігає корені многочлена $\varphi_{32}(x)$. Якщо не всі матриці цієї сукупності нульові, то рекурентно фіксуємо найменший корінь α_{n_1+k} $(k=1,\mathbf{K},n_2-n_1)$ многочлена $\varphi_{32}(x)$, для якого виконується k-та нерівність наступного ланцюжка нерівностей:

$$0<rank\ A_2^{(n-n_1)}(\alpha_{n_1+1})<rank\left\|A_2^{(n-n_1)}(\alpha_{n_1+1})\quad A_2^{(n-n_1)}(\alpha_{n_1+2})\right\|<\mathbf{K}$$

$$<rank\left\|A_2^{(n-n_1)}(\alpha_{n_1+1})\quad \mathbf{K}\quad A_2^{(n-n_1)}(\alpha_{n_2})\right\|=rank\ M^T_{A_2^{(n-n_1)}(x)}(\varphi_{32})=r_2.$$

Аналогічно до доведення твердження 3 неважко показати, що матрицю $A(x)$ можна вибрати так, що

$$M^T_{A_2^{(n-n_1)}(x)}[\alpha_{n_1+1},\mathbf{K},\alpha_{n_2}]=\left\|\begin{array}{ccc} D_{21} & & * \\ & \mathbf{O} & \\ 0 & & D_{2,\,n_2-n_1} \\ \hline 0 & \mathbf{K} & 0\end{array}\right\|,$$

де D_{2j} $(j=1,\mathbf{K},n_2-n_1)$ − блок повного рангу розміру 2×2 або 1×2. При цьому буде зафіксовано набір $(\alpha_1,\mathbf{K},\alpha_{n_1},\alpha_{n_1+1},\mathbf{K},\alpha_{n_2})$ характеристичних коренів. Якщо $n_1+r_2\ge n-1$, то зведення матриці $A(x)$ завершується на другому кроці. У протилежному випадку, а також, якщо $r_2=0$, робимо наступний крок. Для цього розглянемо підматрицю $A_3^{(n-n_1-n_2)}(x)$ матриці $A(x)$ та сукупність її значень $A_3^{(n-n_1-n_2)}(\alpha_{i_2})$, де α_{i_2} пробігає всі корені многочлена $\varphi_{43}(x)$. Якщо деяка матриця цієї сукупності ненульова, то рекурентно фіксуємо найменший корінь α_{n_2+k} $(k=1,\mathbf{K},n_3-n_2)$ многочлена $\varphi_{43}(x)$, для якого виконується k-та нерівність наступного ланцюжка нерівностей:

$$0<rank\ A_3^{(n-n_1-n_2)}(\alpha_{n_2+1})<rank\left\|A_3^{(n-n_1-n_2)}(\alpha_{n_2+1})\quad A_3^{(n-n_1-n_2)}(\alpha_{n_2+2})\right\|<\mathbf{K}$$

$$<rank\left\|A_3^{(n-n_1-n_2)}(\alpha_{n_2+1})\quad \mathbf{K}\quad A_3^{(n-n_1-n_2)}(\alpha_{n_3})\right\|=rank\ M^T_{A_3^{(n-n_1-n_2)}(x)}(\varphi_{43})=r_3.$$

Аналогічно до доведення твердження 3 нескладно встановити можливість зведення матриці $A(x)$ так, що в отриманій після перетворення матриці (збережемо для неї попередні позначення) виконується умова

$$M^T_{A_3^{(n-n_1-n_2)}(x)}[\alpha_{n_2+1}, \ldots, \alpha_{n_3}] = \left\| \begin{array}{ccc} D_{31} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{3,\,n_3-n_2} \\ \hdashline 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|,$$

де D_{3j} $(j = 1, \ldots, n_3 - n_2)$ – блок розміру 3×3, 2×3 або 1×3 повного рангу. На цьому кроці буде зафіксований набір характеристичних коренів $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_2}, \alpha_{n_2+1}, \ldots, \alpha_{n_3})$. Якщо $n_1 + r_2 + r_3 \geq n - 1$, то процес зведення матриці $A(x)$ завершено. В іншому разі, а також, якщо $r_3 = 0$, переходимо до наступного кроку. Продовжуємо так і далі. Зрозуміло, що цей процес скінченний. Через деяке число t кроків дістанемо матрицю вигляду (1), для якої збережемо попереднє позначення $A(x)$. При цьому буде зафіксований набір характеристичних коренів

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_{t-1}+1}, \ldots, \alpha_{n_t}). \qquad (12)$$

Отриману матрицю назвемо *зведеною* і *орієнтованою за набором* (12) *характеристичних коренів*. Орієнтація матриці $A(x)$, судячи з вищевказаної схеми зведення, означає таке. Т-значення першого її стовпця $A_1^{(n)}(x)$ на множині коренів $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}$ многочлена $\varphi_{21}(x)$ має вигляд (9), а Т-значення її підматриці $A_{l_k}^{(m_k)}(x)$ $(k = 2, \ldots, t, 1 < l_1 < \ldots < l_t < n)$ на множині коренів $\alpha_{n_{k-1}+1}, \ldots, \alpha_{n_k}$ многочлена $\varphi_{l_k+1,\, l_k}(x)$, де $m_k = n - r_1 - \ldots - r_{k-1}$,

$$r_1 = rank \left\| A_1^{(n)}(\alpha_1) \quad \ldots \quad A_1^{(n)}(\alpha_{n_1}) \right\|, \qquad \ldots,$$

$$r_k = rank \left\| A_{l_k}^{(m_k)}(\alpha_{n_{k-1}+1}) \quad \ldots \quad A_{l_k}^{(m_k)}(\alpha_{n_k}) \right\|,$$

має вигляд

$$\left\| A_{l_k}^{(m_k)}(\alpha_{n_{k-1}+1}) \quad \ldots \quad A_{l_k}^{(m_k)}(\alpha_{n_k}) \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} D_{k1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{k,n_k-n_{k-1}} \\ \hdashline 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|,$$

де D_{kj_k} $(j_k = 1, \ldots, n_k - n_{k-1})$ – блок повного рангу r_{kj_k} розміру $r_{kj_k} \times l_k$. Очевидно, $r_{k1} + \ldots + r_{k,n_k-n_{k-1}} = r_k$. Отже, зведеній матриці $A(x)$, орієнтованій за набором характеристичних коренів (12), ставиться у відповідність набір четвірок чисел

$$(1, n. \alpha_1, 1), \ldots, (1, n. \alpha_{n_1}, 1), (l_2, m_2. \alpha_{n_1+1}, r_{21}), \ldots, (l_2, m_2. \alpha_{n_2+1}, r_{2,n_2-n_1}), \ldots$$

$$\ldots, (l_t, m_t, \alpha_{n_{t-1}+1}, r_{t1}), \ldots, (l_t, m_t, \alpha_{n_t}, r_{t,n_t-n_{t-1}}). \qquad (13)$$

Четвірка $(l_k, m_k, \alpha_{n_{k-1}+l_k}, r_{kj_k})$, $k = 1, \ldots, t$, $l_1 = r_{1j_1} = 1$, $m_1 = n$, $n_0 = 0$, означає, що

$$rank \left\| A_{l_k}^{(m_k)}(\alpha_{n_{k-1}+1}) \quad \ldots \quad A_{l_k}^{(m_k)}(\alpha_{n_{k-1}+j_k}) \right\| = r_{k1} + \ldots + r_{kj_k}, \; j_k = 1, \ldots, n_k - n_{k-1}.$$

Твердження 5. *Для напівскалярної еквівалентності зведених матриць необхідно збігання наборів характеристичних коренів, за якими орієнтовані ці матриці, а також збігання відповідних їм наборів четвірок чисел вигляду* (13).

Доведення. Нехай задано напівскалярно еквівалентні матриці $A(x)$ і $B(x)$ вигляду (1) і (2). Збігання перших n_2 четвірок, відповідних їм наборів чисел, а отже, збігання перших n_2 характеристичних коренів наборів, за якими орієнтовані ці матриці, випливає із твердження 4.

На основі співвідношення (3), яке зв'язує матриці $A(x)$, $B(x)$ і в якому матриця $\left\|s_{pq}\right\|_1^n$ має вигляд (10), можна записати:

$$\left\|s_{pq}\right\|_{n_{21}+1,\ n_1+1}^{n} A_{l_2}^{(m_2)}(x) =$$
$$= \left\|\begin{matrix} b_{n_{21}+1,\,1}(x) & \mathbf{K} & b_{n_{21}+1,\,n_{21}}(x) & \varphi_{n_{21}+1}(x) & & \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \\ b_{n1}(x) & \mathbf{K} & b_{n,\,n_{21}}(x) & b_{n,\,n_{21}+1}(x) & \mathbf{K} & \varphi_n(x) \end{matrix}\right\| \left\|r_{pq}(x)\right\|_1^{n,\ l_2},$$

де $n_{21} = n_1 + r_1$. Оскільки другий співмножник у лівій частині останньої рівності для $x = \alpha_{n_1+1}$ має вигляд $\left\|D_{21} \quad 0 \quad \mathbf{K} \quad 0\right\|$, $rank\ D_{21} = r_{21}$, а перший у правій частині дорівнює нулеві, то блок $\left\|s_{pq}\right\|_{n_{21}+1,\ n_1+1}^{n,\ n_{21}}$ в матриці $\left\|s_{pq}\right\|_1^n$ нульовий. Отже, матриця $\left\|s_{pq}\right\|_1^n$ у співвідношенні (3) має верхній блочно-трикутний вигляд:

$$\left\|s_{pq}\right\|_1^n = triang\{s_{11}, \mathbf{K}, s_{n_1,\,n_1}, S_{21}, S_{22}\},\ \ S_{21} = \left\|s_{pq}\right\|_{n_1+1}^{n_{21}},\ \ S_{22} = \left\|s_{pq}\right\|_{n_{21}+1}^{n}. \quad (14)$$

Аналогічно, покладаючи в рівності (3) $x = \alpha_{n_1+2}$ і враховуючи при цьому вигляд матриці $A_{l_2}^{(m_2)}(\alpha_{n_1+2}) = \left\|{*} \quad D_{22} \quad 0 \quad \mathbf{K} \quad 0\right\|$, де блок D_{22} розміру $r_{22} \times l_2$ повного рангу, встановлюємо, що в матриці (14) блок $\left\|s_{pq}\right\|_{n_{22}+1}^{n,\ n_{22}}$, де $n_{22} = n_{21} + r_{22}$, є нульовим.

Продовжуючи наші міркування і далі, у підсумку дістанемо, що матриця $\left\|s_{pq}\right\|_1^n$ у співвідношенні (3) має верхній блочно-трикутний вигляд, де перші n_1 діагональні блоки мають порядок 1, а наступні − порядки $r_{21}, \mathbf{K}, r_{2,\,n_2-n_1}$, $n - r_{21} - \mathbf{K} - r_{2,\,n_2-n_1}$. Враховуючи цей вигляд матриці $\left\|s_{pq}\right\|_1^n$, із рівності (3) знаходимо, що для всіх $u = 1, \mathbf{K}, n-1$ виконується рівність $rank\ A_u^{(m_3)}(\beta_u) = rank\ B_u^{(m_3)}(\beta_u)$, де β_u пробігає усі корені многочлена $\varphi_{u+1,\,u}(x)$. Із цього випливає збігання наступних n_3 після перших n_2 четвірок наборів, що відповідають матрицям $A(x)$, $B(x)$, і т.д. Цим твердження доведено.

Звідси випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо зведені та орієнтовані за набором характеристичних коренів матриці* $A(x)$ *і* $B(x)$ *напівскалярно еквівалентні, то матриця перетворення* $\left\|s_{pq}\right\|_1^n$ *у рівності* (3) *має блочно-трикутний вигляд з* $n_t + 1$ *діагональними блоками, перші* n_t *з яких мають порядки, що дорівнюють останнім компонентам четвірок набору* (13), *що відповідає цим матрицям.*

Зведена матриця визначається неоднозначно. Однак вона дає можливість вказати велику кількість інваріантів, про що свідчить така теорема.

Теорема. *Нехай зведена матриця* $A(x)$ *вигляду* (1) *є орієнтована за набором* (12) *із* n_t *характеристичних коренів і* h_i ($i = 1, \mathbf{K}, n_t$) *– остання компонеента* i*-ої четвірки набору* (13), *що відповідає цій матриці. Нехай також* $A_l^{(m)}(x)$, $l = 1, \mathbf{K}, n-1$, $m = n - h_1 - \mathbf{K} - h_{n_t}, n - h_1 - \mathbf{K} - h_{n_t - 1}, \mathbf{K}, n - h_1, n$, *– її підматриця, що міститься у перших* l *стовпцях та останніх* m *рядках. Тоді ранги матриць* Т*-значень* $M^T_{A_l^{(m)}(x)}(\psi_{l+1,\,l})$, *де* $\psi_{l+1,\,l}(x)$ *– довільний дільник многочлена* $\varphi_{l+1,\,l}(x)$, *є інваріантами класу* $\{QN(x)P(x)\}$ *напівскалярно еквівалентних матриць, що містить* $A(x)$.

Доведення легко отримати на основі наслідку 1 з урахуванням того факту, що в матриці перетворення $R(x) = \left\| r_{pq}(x) \right\|_1^n$ у правій частині рівності (3) провідний мінор порядку l, $l = 1, \mathbf{K}, n-1$, взаємно простий з многочленом $\varphi_{l+1,\,l}(x)$.

Природно постає питання про розміщення у зведеній матриці нульових елементів. Частково відповідь містить такий наслідок.

Наслідок 2. *Напівскалярно еквівалентні матриці* $A(x)$ *і* $B(x)$, *які задовольняють умови теореми, не відрізняються розміщенням у них рядків вигляду* $\|0 \;\; \mathbf{K} \;\; 0 \;\; \varphi_m(x) \;\; 0 \;\; \mathbf{K} \;\; 0\|$, *для яких індекс* m *задовольняє умову* $m \in \{n - h_1 - \mathbf{K} - h_{n_t}, n - h_1 - \mathbf{K} - h_{n_t - 1}, \mathbf{K}, n - h_1\}$.

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
3. *Шаваровский Б. З.* О некоторых “ручных” и “диких” аспектах проблемы полускалярной эквивалентности многочленных матриц // Матем. заметки. – 2004. – **76**, вып. 1. – С. 119–132.
4. *Шаваровский Б. З.* О подобии пар матриц четного порядка // Там же. – 2007. – **81**, вып. 3. – С. 448–463.
5. *Шаваровский Б. З.* Полная система инвариантов пары матриц четного порядка со специальной формой Смита ее характеристической матрицы относительно подобия // Там же. – 2003. – **73**, вып. 6. – С. 923–941.
6. *Шаваровский Б. З.* Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Там же. – 1998. – **65**, вып. 5. – С. 769–782..
7. *Dias da Silva J. A, Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra Appl. – 1999. – **291**. – P. 167–184.

О ПОДОБИИ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Исследовано подобие матричных многочленов простой структуры без одинаковых инвариантных множителей. Найдена система инвариантов выделенного класса матричных многочленов относительно полускалярной эквивалентности.

ON THE SIMILARITY OF MATRIX POLYNOMIALS OF SIMPLE STRUCTURE

We study the similarity of matrix polynomials of simple structure without identical invariant factors. In this connection, we obtain a system of invariants for this class of matrix polynomials with respect to semiscalar equivalence.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.10.11