УДК 512.552.12

Г. В. Зеліско[1], Т. М. Кисіль[2]

ПРОСТЕ КОМУТАТИВНЕ В НУЛІ КІЛЬЦЕ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ Є 2-ПРОСТИМ

Відзначено, що проста область головних ідеалів є 2-простою. Доведено, що просте комутативне в нулі кільце елементарних дільників є 2-простим.

Кон [5] показав, що довільна область цілісності вкладається в 2-просту область, і поставив питання про вкладення n-вільних кілець у n-вільні кільця, які є $(n+1)$-простими [4]. Б. В. Забавський [1] показав, що область є простою областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є 2-простою. Ці факти спонукали нас до дослідження 2-простих кілець.

Нехай R − просте асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Тоді для довільного ненульового елемента a кільця R ідеал RaR збігається з кільцем R, тобто для елемента $a \in R$ існують такі елементи $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n \in R$, що

$$u_1 a v_1 + u_2 a v_2 + \cdots + u_n a v_n = 1.$$

Очевидно, що натуральне число n залежить як від елемента $a \in R$, так і від самого кільця R. Якщо ж для всіх ненульових елементів кільця R можна вибрати одне і те ж n, причому n є найменше з усіх можливих, то кільце R називають n-простим [4]. Як і в праці [2], позначимо через $F_n(a)$, де $a \in R \setminus \{0\}$, таку властивість:

$$F_n(a): \quad \exists\, u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n \in R \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i a v_i = 1..$$

Зауважимо, що кільце матриць n-го порядку над тілом T є n-простим [4]. Оскільки просте артінове кільце є кільцем матриць над тілом, то очевидно, що просте артінове кільце є n-простим для деякого натурального числа n. Зокрема, якщо R просте кільце, яке є прямою сумою n мінімальних правих ідеалів, то R є n-простим кільцем, але воно не є $(n-1)$-простим.

Властивість $F_n(a)$ є елементарна. Тоді згідно з [4] довільний неголовний ультрастепінь кільця над зліченною множиною індексів є простим кільцем тоді і тільки тоді, коли базове кільце є n-простим для деякого $n \geq 1$. Зауважимо, що алгебра Вейля $A_1(P) = P[x, y \mid xy - yx = 1]$, де P − поле характеристики ноль, є нетеровим простим кільцем, але вона не є n-простою для довільного $n \geq 1$.

Для подальшого розгляду нагадаємо, що кільце R називають кільцем елементарних дільників, якщо для довільної матриці A над кільцем R існують такі оборотні матриці P та Q відповідних розмірів, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

де $R\,d_{i+1}R \subseteq d_i R \cap R\,d_i$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$ [3].

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 98–100.

Оскільки проста область головних ідеалів є областю елементарних дільників [2], то як очевидний наслідок [4] отримуємо такий результат.

Теорема 1. *Проста область головних ідеалів є 2-простою областю.*

У праці [4], досліджуючи n-прості кільця, розглядали комутативні в нулі кільця. Нагадаємо, що кільце R називають комутативним у нулі, якщо з умови $ab = 0$ завжди випливає, що $ba = 0$ для елементів $a, b \in R$. Нашим основним результатом є така теорема.

Теорема 2. *Просте комутативне в нулі кільце елементарних дільників R є 2-простим.*

Доведення. Нехай a − довільний ненульовий елемент кільця R. Оскільки R − просте комутативне в нулі кільце елементарних дільників, то правильною є рівність

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $RbR \subseteq zR \cap Rz$, причому $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ − деякі оборотні матриці другого порядку.

З того, що R просте кільце, і з того, що $RbR \subseteq zR \cap Rz$, випливає, що можливі лише такі два випадки:

1) елемент z є оборотний,

2) $b = 0$.

Якщо елемент z оборотний, то з точністю до еквівалентності матриць можемо вважати, що $z = 1$. Тоді з рівності (1) отримаємо, що

$$ap_{11} = q_{11}, \qquad ap_{211} = q_{21}. \tag{2}$$

Оскільки $Rq_{11} + Rq_{21} = R$, то

$$uq_{11} + vq_{21} = 1$$

для деяких елементів $u, v \in R$. Тоді з рівності (2) маємо, що

$$uap_{11} + vap_{21} = 1,$$

тобто елемент a є 2-простим.

Якщо ж $b = 0$, то з рівності (1) випливає, що

$$ap_{12} = 0, \qquad ap_{22} = 0.$$

Оскільки кільце R комутативне в нулі, то

$$p_{12}a = 0, \qquad p_{22}a = 0. \tag{3}$$

Оскільки

$$Rp_{12} + Rp_{22} = R,$$

то існують такі елементи $u, v \in R$, що

$$up_{12} + vp_{22} = 1.$$

З рівності (3) випливає, що

$$0 = up_{12}a + vp_{22}a = (up_{12} + vp_{22}) = 1 \cdot a = a.$$

Але це неможливо, оскільки $a \neq 0$. Теорему доведено.

Авторам не відомо, за яких умов 2-просте комутативне в нулі кільце є кільцем елементарних дільників.

1. *Забавский Б. В.* Простые кольца элементарных делителей // Матем. студії. – 2004. – **22**, № 2. – С. 129–133.
2. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1976. – 422 с.
3. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66.** – P. 464–491.
4. *Cohn P. M.* On n-simple rings // Algebra univers. – 2005. – **53**. – P. 301–305.
5. *Cohn P. M.* Simple rings without zero-divisors and Lie division rings // Mathematika. – 1959. – **6**. – P. 14–28.

ПРОСТОЕ КОММУТАТИВНОЕ В НУЛЕ КОЛЬЦО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЯВЛЯЕТСЯ 2-ПРОСТЫМ

Отмечено, что простая область главных идеалов является 2-простой. Доказано, что простое коммутативное в нуле кольцо элементарных делителей является 2-простым.

SIMPLE COMMUTATIVE IN ZERO RING OF ELEMENTARY DIVIZORS IS 2-SIMPLE

It was noted that a simple principal ideal domain is 2-simple. It is proved that a simple commutative in zero ring of elementary divizors is 2-simple.

[1]Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів
[2]Хмельницький нац. ун-т, Хмельницьк

Одержано
20.09.11