

**МЕТОД ЛІНЕАРИЗУВАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ У ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТОНКОЇ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ ШАЙБИ**

*На прикладі визначення температурного поля в тонкій термочутливій шайбі, через циліндричні та бокові поверхні якої здійснюється конвективний теплообмін з середовищем сталої температури, апробовано метод лінеаризувальних параметрів знаходження температурних полів у тонкостінних термочутливих елементах конструкцій. Визначено та досліджено компоненти напружено-деформованого стану, спричиненого знайденим розподілом температури.*

**Вступ.** Експлуатація елементів конструкцій в умовах, що характеризуються зміною температури у великому діапазоні, призводить до зміни теплових та механічних властивостей матеріалу. Тому для отримання адекватного розподілу температури в цих елементах, а також викликаного ним напружено-деформованого стану використовують моделі термочутливого тіла, де враховують залежність теплових та механічних характеристик матеріалу від температури. Тут компоненти термопружного стану визначають з крайової задачі для системи рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами [5, 11]. Для її розв'язання переважно використовують різні варіанти методу збурень [2, 5, 11, 12]. У результаті компоненти термопружного стану знаходять у вигляді швидкозбіжних рядів, члени яких визначають з послідовності відповідних крайових задач для диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Задача ж теплопровідності є нелінійною крайовою задачею [3, 5, 6, 10, 11]. Якщо при цьому відбувається складний теплообмін (конвективний, променевий чи конвективно-променевий), то застосуванням перетворення Кірхгофа [5, 10, 11] не вдається лінеаризувати її граничні умови та рівняння. Якщо вважати, що матеріал володіє так званою простою тепловою нелінійністю (коефіцієнт теплопровідності (КТ)  $\lambda_t$  і об'ємна теплоємність  $c_v$  залежать від температури, а їх відношення – коефіцієнт температуропровідності  $a = \lambda_t / c_v$  неістотно і його можна вважати сталою величиною [1, 2, 5, 9, 10]), то рівняння стає лінійним. Граничні ж умови залишаються нелінійними. В такому випадку пропонують метод, який передбачає введення деяких додаткових параметрів, а отже, дає можливість лінеаризувати граничні умови. У результаті отримуємо відповідну лінійну крайову задачу на змінну Кірхгофа, розв'язок якої можна знайти класичними методами математичної фізики. Введені невідомі параметри шляхом ітерації підбираємо так, щоб з заданою точністю задовольнялась відповідна нелінійна умова, отримана з умови конвективного теплообміну.

У цій праці на прикладі задачі термопружності для тонкої термочутливої шайби з теплообміном на її горизонтальних та циліндричних поверхнях з середовищами сталих температур апробовано один із варіантів методу лінеаризувальних параметрів (ЛП) визначення нестационарного температурного поля та знайдено і досліджено відповідний термопружний стан.

**Аналітико-числовий розв'язок задачі теплопровідності.** Розглянемо термочутливу кругову пластину радіуса  $r_2$  з отвором радіуса  $r_1$ . Вважати-мемо, що товщина пластини  $2\delta$  мала порівняно з іншими її розмірами (тонка шайба). Через поверхні  $r = r_1$  та  $r = r_2$  вона конвективно нагріва-

ється середовищами сталих температур  $t_1$  та  $t_2$  відповідно. На бокових поверхнях  $z = \pm\delta$  конвективно взаємодіє з середовищем сталої температури  $t_p$ , з якою збігається початковий розподіл температури.

Математична модель для визначення нестационарного температурного поля такої шайби має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$\left[ \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} - \alpha_1 (t - t_1) \right]_{r=r_1} = 0, \quad (2)$$

$$\left[ \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} + \alpha_2 (t - t_2) \right]_{r=r_2} = 0, \quad (3)$$

$$\left[ \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \pm \alpha_z (t - t_p) \right]_{z=\pm\delta} = 0, \quad (4)$$

$$t|_{\tau=0} = t_p. \quad (5)$$

Тут  $\lambda_t(t) = \lambda_{t0} \lambda_t^*(T)$ ,  $c_v(t) = c_{v0} c_v^*(T)$ , де  $\lambda_{t0}$  і  $c_{v0}$  – опорні значення коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності відповідно,  $\lambda_t^*(T)$ ,  $c_v^*(T)$  – функції, що описують залежність цих характеристик від безрозмірної температури  $T = t / t_0$ , причому  $\lambda_t^*(T_p) = c_v^*(T_p) = 1$ ,  $t_0$  – вибрана відлікова температура.

Оберемо за  $t_0$  більшу з температур  $t_p$ ,  $t_1$  та  $t_2$ , а за характерний розмір – півтовщину шайби  $\delta$  та введемо безрозмірні температури  $(T_p, T_1, T_2) = (t_p, t_1, t_2) / t_0$  і координати  $(\bar{r}, \bar{z}) = (r, z) / \delta$ . Вважаючи, що матеріал шайби володіє простою тепловою нелінійністю,  $\lambda_t(T) / c_v(T) = (\lambda_{t0} / c_{v0}) \times (\lambda_t^*(T) / c_v^*(T)) \approx \lambda_{t0} / c_{v0} = a_0$  – опорний коефіцієнт температуропровідності, у безрозмірних величинах задачу (1)–(5) запишемо так:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad (6)$$

$$\left[ \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} - Bi_1 (T - T_1) \right]_{\bar{r}=R_1} = 0, \quad (7)$$

$$\left[ \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} + Bi_2 (T - T_2) \right]_{\bar{r}=R_2} = 0, \quad (8)$$

$$\left[ \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \pm Bi_z (T - T_p) \right]_{\bar{z}=\pm 1} = 0, \quad (9)$$

$$T|_{\tau=0} = T_p, \quad (10)$$

де  $R_i = r_i / \delta$ ,  $(i=1,2)$ ,  $Fo = a_0 \tau / \delta^2$  – час Фур'є,  $Bi_1 = \alpha_1 \delta / \lambda_{t0}$ ,  $Bi_2 = \alpha_2 \delta / \lambda_{t0}$ ,  $Bi_z = \alpha_z \delta / \lambda_{t0}$  – критерії Біо.

Якщо ввести змінну Кірхгофа [5, 6, 10, 11]  $\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T) dT$ , то при  $\lambda_t^*(T) =$

$= 1 + k(T - T_p)$  отримаємо такий вираз для визначення температури:

$$T(\theta) - T_p = (\sqrt{1 + 2k\theta} - 1) / k. \quad (11)$$

Крайова задача на змінну Кірхгофа  $\theta$  матиме вигляд

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \theta}{\partial F_0}, \quad (12)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} - \text{Bi}_1 (T(\theta) - T_1) \right]_{\bar{r}=R_1} = 0, \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} + \text{Bi}_2 (T(\theta) - T_2) \right]_{\bar{r}=R_2} = 0, \quad (14)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} \pm \text{Bi}_z (T(\theta) - T_p) \right]_{\bar{z}=\pm 1} = 0, \quad (15)$$

$$\theta|_{F_0=0} = 0. \quad (16)$$

Враховуючи тонкість шайби, усереднимо розподіл змінної Кірхгофа по її товщині, як це зроблено в праці [6] для змінної Кірхгофа, а у [7] – для температури. Змінна Кірхгофа змінюватиметься по товщині за лінійним законом:  $\theta = \vartheta + \bar{z}\vartheta^*$ , де  $\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \theta d\bar{z}$ ,  $\vartheta^* = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \bar{z}\theta d\bar{z}$ . Взявши до уваги симетричність задачі по координаті  $\bar{z}$ , матимемо, що  $\vartheta^* = 0$  і  $\theta = \vartheta$ . Надалі для усередненої змінної Кірхгофа використовуватимемо позначення  $\theta$ , і отримаємо таку крайову задачу

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) - \text{Bi}_z \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(\theta) d\bar{z} - T_p \right) = \frac{\partial \theta}{\partial F_0}, \quad (17)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} - \text{Bi}_1 \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(\theta) d\bar{z} - T_1 \right) \right]_{\bar{r}=R_1} = 0, \quad (18)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} + \text{Bi}_2 \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(\theta) d\bar{z} - T_2 \right) \right]_{\bar{r}=R_2} = 0, \quad (19)$$

$$\theta|_{F_0=0} = 0. \quad (20)$$

Згідно з методом ЛП [5, 8] подамо нелінійні вирази  $T(\theta)$  у вигляді  $T(\theta) = (1 + \kappa)\theta + T_p$ . В результаті отримаємо:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) - \text{Bi}_z (1 + \kappa_z)\theta = \frac{\partial \theta}{\partial F_0}, \quad (21)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} - \text{Bi}_1 ((1 + \kappa_1)\theta - (T_1 - T_p)) \right]_{\bar{r}=R_1} = 0, \quad (22)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} + \text{Bi}_2 ((1 + \kappa_2)\theta - (T_2 - T_p)) \right]_{\bar{r}=R_2} = 0, \quad (23)$$

$$\theta|_{F_0=0} = 0, \quad (24)$$

де  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_z$  – введені невідомі ЛП.

Для побудови розв'язку лінійної крайової задачі (21)–(24) скористаємось перетворенням Лапласа [13] за часом  $F_0$ . В результаті отримаємо:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{d\mathfrak{G}}{d\bar{r}} \right) = s^* \mathfrak{G}, \quad (25)$$

$$\left[ \frac{d\mathfrak{G}}{d\bar{r}} - \text{Bi}_1 ((1 + \kappa_1)\mathfrak{G} - (T_1 - T_p) / [s^* - \text{Bi}_z^*]) \right]_{\bar{r}=R_1} = 0, \quad (26)$$

$$\left[ \frac{d\mathfrak{G}}{d\bar{r}} + \text{Bi}_2 \left( (1 + \kappa_2) \mathfrak{G} - (T_2 - T_p) / [s^* - \text{Bi}_2^*] \right) \right]_{\bar{r}=R_2} = 0, \quad (27)$$

$$\text{де } \mathfrak{G} = \int_0^\infty \theta e^{-sF_0} dF_0 = \int_0^\infty \theta e^{-(s^* - \text{Bi}_2^*)F_0} dF_0 = e^{\text{Bi}_2^* F_0} \int_0^\infty \theta e^{-s^* F_0} dF_0, \quad s^* = s + \text{Bi}_2^*,$$

$\text{Bi}_2^* = \text{Bi}_2 (1 + \kappa_2)$ ,  $s$ ,  $s^*$  – параметри перетворення Лапласа.

Загальний розв'язок рівняння (25) має вигляд

$$\mathfrak{G} = A I_0(\bar{r} \sqrt{s^*}) + B K_0(\bar{r} \sqrt{s^*}), \quad (28)$$

де  $I_0(\mathfrak{g})$ ,  $K_0(\mathfrak{g})$  – модифіковані функції Бесселя нульового порядку, а  $A$  і  $B$  – довільні сталі інтегрування, для визначення яких із умов (26), (27) дістаємо систему алгебричних рівнянь.

$$\begin{cases} A[\sqrt{s^*} I_1(R_2 \sqrt{s^*}) + \text{Bi}_2^* I_0(R_2 \sqrt{s^*})] + B[-\sqrt{s^*} K_1(R_2 \sqrt{s^*}) + \\ + \text{Bi}_2^* K_0(R_2 \sqrt{s^*})] - \text{Bi}_2 (T_2 - T_p) / [s^* - \text{Bi}_2^*] = 0, \\ A[\sqrt{s^*} I_1(R_1 \sqrt{s^*}) - \text{Bi}_1^* I_0(R_1 \sqrt{s^*})] + B[-\sqrt{s^*} K_1(R_1 \sqrt{s^*}) - \\ - \text{Bi}_1^* K_0(R_1 \sqrt{s^*})] + \text{Bi}_1 (T_1 - T_p) / [s^* - \text{Bi}_1^*] = 0, \end{cases} \quad (29)$$

де  $\text{Bi}_1^* = \text{Bi}_1 (1 + \kappa_1)$ ,  $\text{Bi}_2^* = \text{Bi}_2 (1 + \kappa_2)$ .

Розв'язавши її, знаходимо, що

$$\begin{aligned} A &= [\text{Bi}_1 (T_1 - T_p) a_1(s^*) + \text{Bi}_2 (T_2 - T_p) b_1(s^*)] / \psi(s^*), \\ B &= -[\text{Bi}_1 (T_1 - T_p) a_0(s^*) + \text{Bi}_2 (T_2 - T_p) b_0(s^*)] / \psi(s^*), \end{aligned} \quad (30)$$

де  $a_0(s^*) = \sqrt{s^*} I_1(R_2 \sqrt{s^*}) + \text{Bi}_2^* I_0(R_2 \sqrt{s^*})$ ,  $b_0(s^*) = \sqrt{s^*} I_1(R_1 \sqrt{s^*}) - \text{Bi}_1^* I_0(R_1 \sqrt{s^*})$ ,

$a_1(s^*) = -\sqrt{s^*} K_1(R_2 \sqrt{s^*}) + \text{Bi}_2^* K_0(R_2 \sqrt{s^*})$ ,  $b_1(s^*) = -\sqrt{s^*} K_1(R_1 \sqrt{s^*}) - \text{Bi}_1^* K_0(R_1 \sqrt{s^*})$ ,

$\psi(s^*) = (s^* - \text{Bi}_2^*) \varphi(s^*)$ ,  $\varphi(s^*) = a_0(s^*) b_1(s^*) - a_1(s^*) b_0(s^*) = s^* [K_1(R_2 \sqrt{s^*}) I_1(R_1 \sqrt{s^*}) -$

$-K_1(R_1 \sqrt{s^*}) I_1(R_2 \sqrt{s^*})] - \text{Bi}_1^* \sqrt{s^*} [K_0(R_1 \sqrt{s^*}) I_1(R_2 \sqrt{s^*}) + K_1(R_2 \sqrt{s^*}) I_0(R_1 \sqrt{s^*})] -$

$-\text{Bi}_2^* \sqrt{s^*} [K_1(R_1 \sqrt{s^*}) I_0(R_2 \sqrt{s^*}) + K_0(R_2 \sqrt{s^*}) I_1(R_1 \sqrt{s^*})] +$

$+\text{Bi}_1^* \text{Bi}_2^* [K_0(R_2 \sqrt{s^*}) I_0(R_1 \sqrt{s^*}) - K_0(R_1 \sqrt{s^*}) I_0(R_2 \sqrt{s^*})]$ .

У результаті вираз для зображення Лапласа змінної Кірхгофа буде відношенням узагальнених многочленів:

$$\mathfrak{G} = \Phi(s^*) / \psi(s^*), \quad (31)$$

де  $\Phi(s^*) = \text{Bi}_2 (T_2 - T_p) [b_1(s^*) I_0(\bar{r} \sqrt{s^*}) - b_0(s^*) K_0(\bar{r} \sqrt{s^*})] +$

$+\text{Bi}_1 (T_1 - T_p) [a_1(s^*) I_0(\bar{r} \sqrt{s^*}) - a_0(s^*) K_0(\bar{r} \sqrt{s^*})]$ .

Прирівнявши до нуля  $\psi(s^*)$ , отримаємо корінь  $s^* = \text{Bi}_2^*$  та безліч коренів трансцендентного рівняння  $\varphi(s^*) = 0$ . Якщо позначити  $i\sqrt{s_n^*}$  рівним  $\mu_n$ , то  $s_n^* = -\mu_n^2$  і  $\mu_n$  визначають з рівняння  $\varphi(-\mu^2) = 0$ .

Похідна характеристичного многочлена рівна  $\psi'(s^*) = \varphi(s^*) + (s^* - \text{Bi}_2^*) \varphi'(s^*)$ . При  $s^* = \text{Bi}_2^*$ , маємо, що  $\psi'(\text{Bi}_2^*) = \varphi(\text{Bi}_2^*)$ , а якщо  $s_n^* = -\mu_n^2$ , то  $\psi'(s_n^*) = \psi'(-\mu_n^2) = -(\mu_n^2 + \text{Bi}_2^*) \varphi'(-\mu_n^2)$ .

Запишемо формулу оберненого перетворення Лапласа для параметра перетворення  $s^*$ :

$$\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \theta e^{s^* F_0} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \theta e^{(s^* - \text{Bi}_z^*) F_0} ds^* = e^{-\text{Bi}_z^* F_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \theta e^{s^* F_0} ds^* = e^{-\text{Bi}_z^* F_0} \theta.$$

Враховувавши це та використавши теореми розкладу Ващенко–Захарченка, обернене перетворення Лапласа виразу (31) подали так:

$$\theta(F_0, \bar{r}) = \frac{\Phi(\text{Bi}_z^*, \bar{r})}{\varphi(\text{Bi}_z^*)} + e^{-\text{Bi}_z^* F_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(-\mu_n^2, \bar{r})}{-(\mu_n^2 + \text{Bi}_z^*) \varphi'(-\mu_n^2)} e^{-\mu_n^2 F_0}, \quad (32)$$

де штрихом позначена похідна за  $s^*$ .

Корені трансцендентного рівняння  $\varphi(-\mu_n^2) = 0$  знаходимо методом Ньютона.

Якщо, наприклад,  $\lambda_t^*(T) = 1 + k(T - T_p)$ , то температуру  $T$  через змінну Кірхгофа виразимо так:

$$T \equiv T(F_0, \bar{r}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_z) = k^{-1} (\sqrt{1 + 2k\theta(F_0, \bar{r}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_z)} - 1) + T_p. \quad (33)$$

Параметри  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_z$  підбираємо так, щоб з заданою точністю вираз змінної Кірхгофа (32) задовольняв рівняння (17), умови (18) і (19). В результаті для їх визначення отримаємо систему трансцендентних рівнянь ( $\theta \equiv \theta(F_0, \bar{r}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_z)$ )

$$\begin{cases} k^{-1} (\sqrt{1 + 2k\theta} - 1) = (1 + \kappa_z) \theta, \\ k^{-1} (\sqrt{1 + 2k\theta} - 1)|_{\bar{r}=R_1} = (1 + \kappa_1) \theta|_{\bar{r}=R_1}, \\ k^{-1} (\sqrt{1 + 2k\theta} - 1)|_{\bar{r}=R_2} = (1 + \kappa_2) \theta|_{\bar{r}=R_2}, \end{cases} \quad (34)$$

розв'язок якої для кожного конкретного значення часу  $F_0$  та координати  $\bar{r}$  знаходимо, використовуючи метод Ньютона, взявши за початкове наближення  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_z = 0$ .

Знаючи змінну Кірхгофа та конкретний вигляд залежності від температури коефіцієнта теплопровідності, температуру визначимо з виразу (11).

**Числовий розв'язок задачі теплопровідності.** Знайдемо розв'язок задачі (17)–(20) поздовжнім варіантом методу прямих. Розіб'ємо відрізок  $[R_1, R_2]$  на  $N$  частин з кроком  $h$ . Запишемо різницеву схему для другої похідної рівняння (17):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \bar{r} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) &= \frac{1}{\bar{r}_i} \frac{1}{h} \left( \bar{r}_{i+1} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} - \bar{r}_i \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \right) = \frac{1}{\bar{r}_i} \frac{1}{h} \left( \bar{r}_{i+1} \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} - \bar{r}_i \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h} \right) = \\ &= \frac{1}{\bar{r}_i h^2} (\bar{r}_{i+1} \theta_{i+1} - (\bar{r}_{i+1} + \bar{r}_i) \theta_i + \bar{r}_i \theta_{i-1}). \end{aligned}$$

Для граничних умов (18) та (19) використовуватимемо центральну різницеву похідну  $\frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} \approx \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h}$ . Матимемо таку різницеву задачу:

$$\frac{1}{\bar{r}_i h^2} (\bar{r}_{i+1} \theta_{i+1} - (\bar{r}_{i+1} + \bar{r}_i) \theta_i + \bar{r}_i \theta_{i-1}) - \text{Bi}_z (T(\theta_i) - T_p) = \theta_i^*, \quad i = \overline{0, N} \quad (35)$$

$$\frac{1}{2h} (\theta_{N+1} - \theta_{N-1}) + \text{Bi}_2 (T(\theta_N) - T_2) = 0, \quad (36)$$

$$\frac{1}{2h} (\theta_1 - \theta_{-1}) - \text{Bi}_1 (T(\theta_0) - T_1) = 0, \quad (37)$$

$$\theta_i|_{F_0=0} = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad (38)$$

де  $\theta_i \equiv \theta_i(F_0)$ , а  $\mathfrak{G}_i$  – похідна за часом  $F_0$ .

Визначивши з (36), (37)  $\theta_{N+1}$  та  $\theta_{-1}$  і підставивши їх у (35) для  $i = N$  та  $i = 0$ , отримуємо:

$$\frac{1}{\bar{r}_0 h^2} (\bar{r}_1 \theta_1 - (\bar{r}_1 + \bar{r}_0) \theta_0 + \bar{r}_0 (\theta_1 - 2h \text{Bi}_1 [T(\theta_0) - T_1])) - \text{Bi}_z (T(\theta_0) - T_p) = \mathfrak{G}_0,$$

$$\frac{1}{\bar{r}_i h^2} (\bar{r}_{i+1} \theta_{i+1} - (\bar{r}_{i+1} + \bar{r}_i) \theta_i + \bar{r}_i \theta_{i-1}) - \text{Bi}_z (T(\theta_i) - T_p) = \mathfrak{G}_i, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\frac{1}{\bar{r}_N h^2} (\bar{r}_{N+1} (\theta_{N-1} - 2h \text{Bi}_2 [T(\theta_N) - T_2]) - (\bar{r}_{N+1} + \bar{r}_N) \theta_N + \bar{r}_N \theta_{N-1}) - \text{Bi}_z (T(\theta_N) - T_p) = \mathfrak{G}_N.$$

Після упорядкування та спрощення приходимо до такої напівдискретної моделі задачі на змінну Кірхгофа:

$$\frac{1}{\bar{r}_0 h^2} (\bar{r}_1 + \bar{r}_0) (\theta_1 - \theta_0) - T(\theta_0) (2h^{-1} \text{Bi}_1 + \text{Bi}_z) + 2h^{-1} \text{Bi}_1 T_1 + \text{Bi}_z T_p = \mathfrak{G}_0, \quad (39)$$

$$\frac{1}{\bar{r}_i h^2} (\bar{r}_{i+1} \theta_{i+1} - (\bar{r}_{i+1} + \bar{r}_i) \theta_i + \bar{r}_i \theta_{i-1}) - \text{Bi}_z (T(\theta_i) - T_p) = \mathfrak{G}_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (40)$$

$$\frac{1}{\bar{r}_N h^2} (\bar{r}_{N+1} + \bar{r}_N) (\theta_{N-1} - \theta_N) - T(\theta_N) \left( \frac{2 \text{Bi}_2 \bar{r}_{N+1}}{h \bar{r}_N} + \text{Bi}_z \right) + \frac{2 \text{Bi}_2 T_2 \bar{r}_{N+1}}{h \bar{r}_N} + \text{Bi}_z T_p = \mathfrak{G}_N, \quad (41)$$

$$\theta_i|_{F_0=0} = 0, \quad i = \overline{0, N}. \quad (42)$$

Таким чином отримано задачу Коші для системи  $N$  нелінійних рівнянь. Її розв'язок знаходимо чисельно, використовуючи неявний метод Гіра другого порядку апроксимації за часом:

$$\frac{3\theta_i^j - 4\theta_i^{j-1} + \theta_i^{j-2}}{2w} = f_i(\theta_i^j), \quad j = \overline{0, M},$$

де  $w$  і  $M$  – крок та кількість точок розбиття за часом відповідно.

#### Математична модель для визначення напруженого стану шайби.

Термопружний стан вільної від зовнішніх навантажень шайби визначають компоненти напружень [2, 6]

$$\sigma_{rr} = \frac{2G(t)}{1-\nu(t)} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \nu(t) \frac{u}{r} - \bar{\Phi}(t) \right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G(t)}{1-\nu(t)} \left[ \nu(t) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \bar{\Phi}(t) \right], \quad (43)$$

які задовольняють рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})}{r} = 0 \quad (44)$$

та граничні умови

$$\sigma_{rr}|_{r=r_1} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=r_2} = 0, \quad (45)$$

де  $u$  – радіальне переміщення,  $\bar{\Phi}(t) = (1 + \nu(t))\Phi(t)$ ,  $\Phi(t) = \int_{t_p}^t \alpha_t(\xi) d\xi$  – су-

то теплова деформація,  $G(t)$ ,  $\nu(t)$ ,  $\alpha_t(t)$  – залежні від температури модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона та температурний коефіцієнт теплового розширення.

Подамо механічні характеристики матеріалу у вигляді  $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$ , де  $\chi_0 = \chi(t)|_{t=t_p}$  – опорне значення відповідної характеристики,  $\chi^*(T)$  – безрозмірна функція, що описує залежність відповідної характеристики від

безрозмірної температури  $T$ , причому  $\chi^*(T)_{T=T_p} = 1$ . Введемо безрозмірні переміщення  $\bar{u} = u / (\delta\alpha_{t_0} t_0)$  та напруження  $\sigma_r = \sigma_{rr} / (\delta\alpha_{t_0} t_0)$ ,  $\sigma_\varphi = \sigma_{\varphi\varphi} / (\delta\alpha_{t_0} t_0)$ . У введених величинах рівняння рівноваги та компоненти напружень набудуть такого вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \bar{r}} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{\bar{r}} = 0, \quad (46)$$

$$\sigma_r = \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \nu(T) \frac{\bar{u}}{\bar{r}} - \bar{\Phi}(T) \right], \quad \sigma_\varphi = \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \left[ \nu(T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} - \bar{\Phi}(T) \right]. \quad (47)$$

При цьому суто теплову деформацію визначаємо за формулою

$$\bar{\Phi}(T) = t_0 \int_{T_p}^T \alpha_i^*(\xi) d\xi.$$

Підставивши (47) у (46), отримаємо таке рівняння для визначення безрозмірного переміщення  $\bar{u}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{u} \bar{r}) \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \left( 1 + \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \right) \bar{\Phi}(T) \right] - \\ &- \left( \frac{\partial \nu(T)}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \right] \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \nu(T) \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right] + \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial \bar{r}} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Його розв'язок будемо методом збурень. Для цього поряд з ним розглядаємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{u} \bar{r}) \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \left( 1 + \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \right) \bar{\Phi}(T) \right] - \\ &- \varepsilon \left( \frac{\partial \nu(T)}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \right] \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \nu(T) \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right] + \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial \bar{r}} \right). \end{aligned} \quad (49)$$

яке при  $\varepsilon = 1$  збігається з (48). Його розв'язок шукаємо у вигляді розвинення за степенями  $\varepsilon$ :

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k. \quad (50)$$

Підставивши (50) у (49) і прирівнявши в отриманій рівності вирази при однакових степенях  $\varepsilon$ , отримуємо такі рівняння для визначення  $\bar{u}_0$  та  $\bar{u}_k (k \geq 1)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{u}_0 \bar{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \left( 1 + \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \right) \bar{\Phi}(T) \right], \quad (51)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{u}_k \bar{r}) \right) = f_{k-1}(\bar{r}), \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \text{де } f_{k-1}(\bar{r}) &= \frac{\partial \nu(T)}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{u}_{k-1}}{\bar{r}} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \right] \left[ \frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial \bar{r}} + \nu(T) \frac{\bar{u}_{k-1}}{\bar{r}} \right] + \\ &+ \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \right) \frac{\partial \bar{\Phi}(T)}{\partial \bar{r}}, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Відповідні складники компонент напружень обчислюємо за формулами

$$\sigma_{rk} = \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \left[ \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{r}} + \nu(T) \frac{\bar{u}_k}{\bar{r}} - \bar{\Phi}(T) \delta_{0k} \right], \quad (53)$$

$$\sigma_{\varphi k} = \frac{G^*(T)}{1-\nu(T)} \left[ \nu(T) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_k}{\bar{r}} - \bar{\Phi}(T) \delta_{0k} \right], \quad (54)$$

де  $k = \overline{0, \infty}$ ,  $\delta_{0k}$  – символ Кронекера.

Безрозмірні переміщення та компоненти напружень за знайденими складниками обчислюємо так:

$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k$ ,  $\sigma_r = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{rk}$ ,  $\sigma_{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{\varphi k}$ . А граничні умови (45) набувають вигляду

$$\sigma_{rk}|_{\bar{r}=R_1} = 0, \sigma_{rk}|_{\bar{r}=R_2} = 0, k \geq 0. \quad (55)$$

Розв'язок рівняння (51) буде:

$$\bar{u}_0 = c_{10}\bar{r} + \frac{c_{20}}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} E(\bar{r}), \quad (56)$$

де  $E(\bar{r}) = \int_{R_1}^{\bar{r}} \left[ 1 + \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-v(T)} \right) \right] \bar{\Phi}(T) \xi^2 d\xi$ , а  $c_{10}$ ,  $c_{20}$  – сталі інтегрування.

Підставивши розв'язок (56) у (53) при  $k=0$  та скориставшись граничними умовами (55), отримаємо такі формули для визначення сталих інтегрування  $c_{10}$ ,  $c_{20}$ :

$$c_{10} = \frac{v^- b_1^*}{v^+ R_1^2 \Delta} - \frac{b_1}{v^+}, c_{20} = \frac{b_1^*}{\Delta}, \text{ де } v^{\pm} = 1 \pm v(T)|_{\bar{r}=R_1}, v_1^{\pm} = 1 \pm v(T)|_{\bar{r}=R_2},$$

$$b_1^* = -v_1^- v^+ R_1^2 E(R_2) - R_1^2 R_2^2 (b_1 v_1^+ - b_2 v^+), \quad b_i = \left[ \ln \left( \frac{G^*(T)}{1-v(T)} \right) \bar{\Phi}(T) \right]_{\bar{r}=R_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta = v_1^- v^+ R_1^2 - v^- v_1^+ R_2^2.$$

Для рівняння (52) одержимо такий розв'язок:

$$\bar{u}_k = c_{1k}\bar{r} + \frac{c_{2k}}{\bar{r}} - \frac{\bar{r}}{2} H_{k-1}^{(0)}(\bar{r}) + \frac{1}{2\bar{r}} H_{k-1}^{(2)}(\bar{r}), \quad (57)$$

де  $H_{k-1}^{(i)}(\bar{r}) = \int_{R_1}^{\bar{r}} f_{k-1}^{(i)}(\xi) \xi^i d\xi$ ,  $i = 0, 2$ , а  $c_{10}$ ,  $c_{20}$  – сталі інтегрування.

Підставивши розв'язок (57) у (53) при  $k \geq 1$  та використавши граничні умови (45), дістанемо такі формули для визначення сталих інтегрування  $c_{1k}$ ,  $c_{2k}$ :

$$c_{1k} = \frac{-d_{k-1} v^- R_2^2}{\Delta}, c_{2k} = \frac{-d_{k-1} v^+ R_2^2 R_1^2}{\Delta}, \text{ де } d_{k-1} = \frac{v_1^- H_{k-1}^{(2)}(R_2)}{2R_2^2} - \frac{v_1^+ H_{k-1}^{(0)}(R_2)}{2}.$$

**Числовий аналіз.** Під час обчислення температурного поля та напружень використовували такі вхідні дані:  $t_p = 293 \text{ K}$ ,  $t_1 = 473 \text{ K}$ ,  $t_2 = 873 \text{ K}$ . За відлікову температуру вибрали  $t_0 = t_2$ . Таким чином,  $T_p = t_p / t_2 = 0.3356$ ,  $T_1 = t_1 / t_2 = 0.5418$ ,  $T_2 = 1$ . Прийняли  $r_1 = 0.04 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0.08 \text{ м}$ ,  $\delta = 0.01 \text{ м}$ ,  $R_1 = r_1 / \delta = 4$ ,  $R_2 = r_2 / \delta = 8$ ,  $Vi_z = 0.5$ ,  $Vi_1 = 1.5$ ,  $Vi_2 = 5.5$ ,  $k = -0.525$ ,  $\lambda_{t_0} = 47.7636 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$ ,  $\lambda_{av} = 39.4285 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$ ,  $\lambda_{\max} = 31.0933 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$ . Тут  $\lambda_{av}$  та  $\lambda_{\max}$  – відповідно середньоінтегральне та значення КТ при максимальній температурі для діапазону 273...873К. Вирази неперервних залежностей від температури термомеханічних характеристик матеріалу сталі У12 для цього діапазону температур отримали методом найменших квадратів. Ці значення характеристик взяті з таблиць [4]. Їх остаточний вигляд такий:

$$\lambda_t(t) = 47,7636(1 - 0,5253(T - T_p))[\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$G(t) = 79,4 \cdot 10^9 (1 - 0,27(T - T_p) + 0,21(T - T_p)^2 + 0,59(T - T_p)^3) [\text{Па}],$$



$$v(t) = 0,282(1 + 0,199(T - T_p) - 1,291(T - T_p)^2 + 2,36(T - T_p)^3),$$

$$\alpha_t(t) = 11,68 \cdot 10^{-6} (1 + 1,33(T - T_p) - 0,65(T - T_p)^2) [\text{K}^{-1}].$$

При цьому, значення суто теплової деформації

$$\Phi(t) = t_2 11,68 \cdot 10^{-6} ((T - T_p) + 1,33(T - T_p)^2 / 2 - 0,65(T - T_p)^3 / 3).$$

Розподіл температурного поля з використанням трьох ЛП пороховано для шести різних значень за часом та дванадцяти за координатою. Для отримання неперервної функції ці аналітико-числові дані інтерпольовані за координатою з використанням полінома Лагранжа. Збільшення точок інтерпольовання по координаті неістотно вплинуло на значення полінома – відносна похибка полінома вищого степеня менша 0.2%. Графік температурного поля наведено на рис. 1.

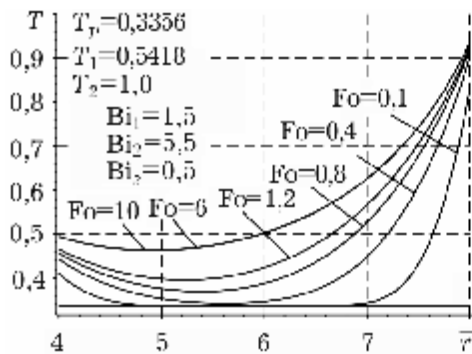


Рис. 1.

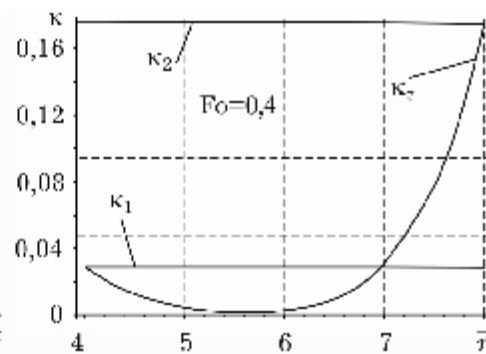


Рис. 2.

Рис. 1. Розподіл температури термочутливого тіла з використанням трьох ЛП.

Рис. 2. Лінеаризувальні параметри.

Обчислюючи температурне поле методом ЛП, після знаходження значень ЛП даної задачі встановили, що істотно змінюється лише  $\kappa_z$  (рис. 2). Тому на першому кроці під час знаходження значень ЛП для конкретного часу  $F_0$  можна систему (31) розв'язати лише в одній точці по координаті  $\bar{r}$ , наприклад, у  $\bar{r} = R_2$ , де досягається максимальне значення температури. У решті ж точок за координатою достатньо знаходити значення  $\kappa_z$  з першого рівняння системи (31), де замість  $\kappa_1, \kappa_2$  взяті значення з першого кроку. Відносна похибка такого спрощення менша 0.1%.

На рис. 3. наведено графіки розподілу температури, побудовані з використанням одного та двох ЛП. Тут крива 1 отримана з використання трьох ЛП а крива 2 – двох, значення яких знаходили з третього і першого рівнянь системи (32), а значення  $\kappa_1$  прирівнювали до  $\kappa_2$ . Такий вибір варіанта визначення ЛП дає меншу похибку для кривої 1, рівну 2.5% (на поверхні радіуса  $R_1$ ) за виходу на стаціонарний режим. Для кривої 3 використовували один ЛП, значення якого знаходили з третього рівняння системи (32) та підставляли замість двох інших. Розбіжність між кривими 3 і 1 досягає 4% (біля поверхні радіуса  $R_1$ ).

Також обчислено розподіл температури за сталим опорним та середнім значеннями КТ (нетермочутливе тіло). Відносні похибки розподілу температури, знайденого з використанням трьох ЛП, становлять 5.3 і 4% відповідно. За малих значень  $F_0$  меншу похибку дає застосування опорного значення КТ; коли  $F_0$  близьке 1, то похибки в обох випадках майже одна-

кові : 3%. За виходу на стаціонарний режим меншу похибку дає використання середнього значення КТ.

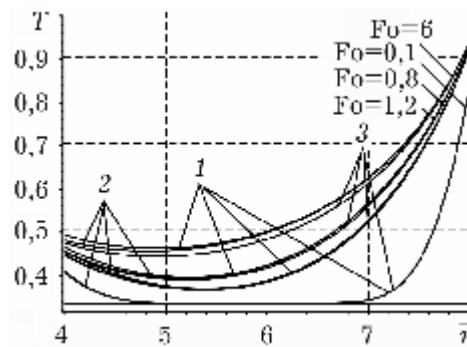


Рис. 3. Графіки температурного розподілу за використання одного, двох та трьох ЛП.

Числовий розв'язок цієї задачі теплопровідності знайдено методом прямих з використанням методу Гіра для розв'язання задачі Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь. Задача розв'язана з другим порядком апроксимації за часом та координатою. Крок за часом становить 0.01 ( $N = 600$ ), а проміжок по координаті розбитий на  $M = 80$  частин. Відносна похибка інтерполяційного полінома і числового розв'язку виявилась не більша ніж 0.5%, що свідчить про коректність методу ЛП.

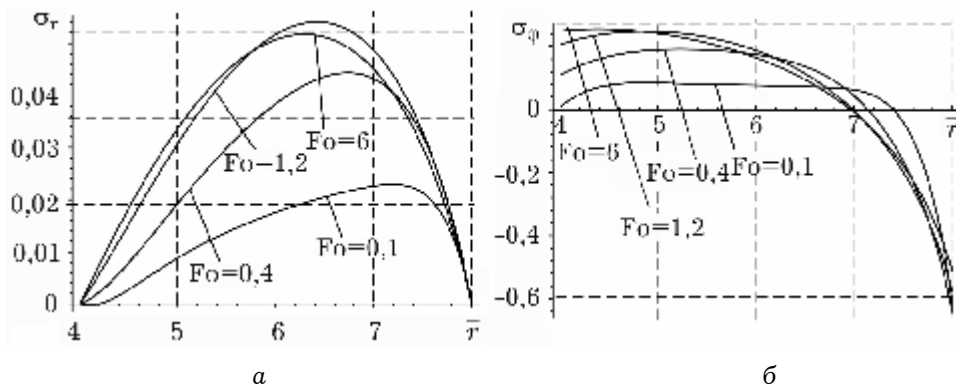


Рис. 4. Температурні напруження в термочутливій шайбі.

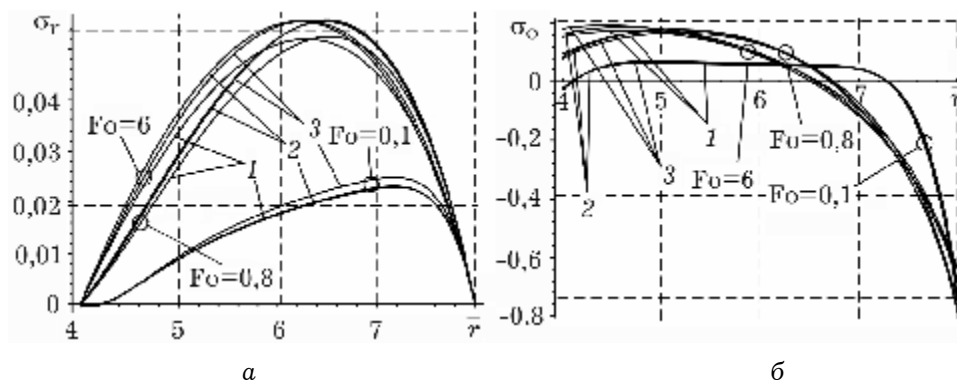


Рис. 5. Температурні напруження в тілі з опорним (а) та середнім (б) КТ: крива 1 – КТ залежить від температури; 2 – опорний, а 3 – середній.

На рис. 4. наведено графіки радіальних  $\sigma_r$  та колових  $\sigma_\phi$  напружень, а також напружень, порахованих за нехтування температурної залежності КТ.

Похибки напружень за використання наближеного температурного розподілу (опорне значення КТ) досягають 12% для  $\sigma_r$  та 6% – для  $\sigma_\phi$ . Під час використання середнього значення КТ – 10% для  $\sigma_r$  та 11 % – для напруження  $\sigma_\phi$ , яке є у цьому випадку визначальним (рис. 5). Усі механічні характеристики залежать від температури.

На проміжку температур 273...873К коефіцієнт Пуассона змінюється на 20%, модуль зсуву – на 12%, коефіцієнт теплового лінійного розширення – на 37%. Нехтування температурною залежністю коефіцієнта Пуассона неістотно впливає на розподіл напружень, лише зі заміною його на максимальне значення становить 6%. Нехтування температурною залежністю модуль зсуву дає похибку напружень до 4% при заміні на опорне значення, до 2% – при заміні на середнє та до 13% – при заміні на максимальне. Нехтування температурною залежністю коефіцієнта теплового лінійного розширення найбільш істотно впливає на розподіл напружень і сягає 20...40%. Дослідження напружено-деформованого стану виявили, що для взятого матеріалу можна знехтувати температурну залежність коефіцієнта Пуассона та модуля зсуву, замінивши їх на опорне та середньо-інтегральне значення відповідно. При цьому розбіжність таких напружень від істинних становить 1.5% для  $\sigma_r$  та 2% – для  $\sigma_\phi$ .

**Висновки.** Методом ЛП Отримано розв'язок задачі теплопровідності для тонкої термочутливої шайби, що конвективно нагрівається з циліндричних поверхонь середовищем сталої температури та охолоджується з бокових поверхонь. Досліджено вплив різних варіантів визначення ЛП на розподіл температури та напруженого стану шайби. Для кожного значення  $F_0$  доцільно, щоб зменшити обчислення під час знаходження розв'язку задачі теплопровідності, визначати три ЛП лише в одній точці по координаті. У решті ж точок достатньо знаходити лише ЛП з рівняння.

Отримано числовий розв'язок задачі теплопровідності поздовжнім методом прямих з використанням методу Гіра другого порядку апроксимації для розв'язання задачі Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь. Його відносна похибка щодо розподілу температури, отриманого методом ЛП, є менша ніж 0.5%, що свідчить про ефективність останнього.

Для цієї задачі не можна однозначно сказати, що використання опорного чи середнього значень КТ краще наближує температурний розподіл термочутливого тіла. Оскільки коефіцієнт теплового лінійного розширення істотно змінюються у даному діапазоні температур, то за нехтування його температурною залежністю виникає значна похибка розподілу напружень. Водночас використання опорного значення коефіцієнта Пуассона і середнього значення модуля зсуву дає похибку напружень у 1.5% для  $\sigma_r$  та 2% – для  $\sigma_\phi$ .

1. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Из-во МГУ, 1976. – 368 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967.- 600 с.
4. Марочник сталей и сплавов / Под ред. В. Г. Сорокина. – М.: Машиностроение, 1989. – 640 с.
5. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т.3: Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.

6. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
7. Попович В. С. Моделирование тепловых полей в тонких термочувствительных пластинах // Моделирование и оптимизация сложных механических систем. – К.: Ин-т кибернетики, 1991. – С. 70–75.
8. Попович В. С. О решении стационарных задач теплопроводности контактирующих термочувствительных тел // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 100–104.
9. Попович В. С., Гарматій Г. Ю., Вовк О. М. Термопружний стан термочутливої порожнистої кулі за умов конвективно-променевого теплообміну з довкіллям // Фіз.- хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 6. – С. 39–48.
10. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids Clarendon – Oxford, 1959. – 430 p.
11. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties, Thermal Stresses I, North-Holland, Amsterdam, 1986. – P. 391–483.
12. Popovych V. S., Kushnir R. M., Vovk O. M. The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange // J. Engng. Math. – 2008. – № 2–4. – P. 375–369.
13. Prudnikov A. V., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Direct Laplace transforms. New York: Integrals and Series, 1992. – Vol. 4. – 331 p.

#### **МЕТОД ЛИНЕАРИЗУЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКОЙ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОЙ ШАЙБЫ**

*На примере определения температурного поля в тонкой термочувствительной шайбе, через цилиндрические и боковые поверхности которой осуществляется конвективный теплообмен со средой постоянной температуры, апробирован метод линеаризующих параметров нахождения температурных полей в тонкостенных термочувствительных элементах конструкций. Определены и исследованы компоненты напряженно-деформированного состояния, вызванного найденным распределением температуры.*

#### **THE LINEARIZATION PARAMETERS METHOD IN THERMOELASTIC PROBLEM OF A THIN THERMOSENSITIVE HOLLOW DISK**

*By the example of determining the temperature field in a thin thermosensitive hollow disk, with convective heat exchange condition at its cylindrical, upper, and lower surfaces with environments of constant temperature, the method of linearized parameters developed for determining the temperature field in thermosensitive structure elements was tested. Also the stressed-strained state caused by the found temperature distribution was determined.*