

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ЧАСІВ ТА УЗГОДЖЕНОСТІ КРАЙОВИХ УМОВ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО РУХУ ГАЗУ В ТРУБОПРОВОДІ

Досліджено моделі неусталеного руху газу в трубопроводі за ізотермічних умов. Показано, що граничні умови необхідно узгоджувати з перехідними часами, які залежать від режиму транспортування та геометрії трубопроводу. Запропоновано методикку лінеаризації рівнянь, які входять у математичну модель руху газу, та побудовано ітераційну схему розв'язування вихідних систем нелінійних диференціальних рівнянь. Отримані результати апробовані в ході обчислювального експерименту на модельній задачі. Реалізовано скінченно-елементну модель задачі із використанням методу Петрова–Гальоркіна.

Вступ. Для дослідження багатьох природних явищ створюють відповідні математичні моделі, що пов'язано з певними допущеннями як у фізичних процесах, так і у побудові математичного апарату. Зокрема, для спрощення математичної моделі руху газу в трубопроводах вважають, що зміну густини газу з часом можна знехтувати [3, 4]. Очевидно, що за повільних процесів таке допустиме. Однак за швидкої їх зміни таке припущення може призвести до втрати адекватності на деяких просторово-часових інтервалах. Далі виникають обчислювальні труднощі, оскільки в розрахунку задіяні великі та малі числа. Через те виникає втрата точних значних цифр. Тому кожна математична модель дає можливість розв'язувати відповідний клас задач. Очевидно, що для аналізу адекватності моделей необхідно дослідити вплив кожного її складника та прийнятих допущень.

Мета роботи – вивчити та проаналізувати складники моделей руху газу в трубопроводах, модифікувати їх так, щоб під час обчислень брали участь числа приблизно однакового порядку, та дослідити узгодженість швидкості поширення газової хвилі із заданням граничних умов за різних режимів транспортування газу.

Формулювання задачі. В ізотермічному випадку поширеною математичною моделлю руху газу в горизонтальному трубопроводі є система взаємопов'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних [2, 3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2D} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \\ \rho = \rho zRT. \end{cases} \quad (1)$$

Перше рівняння останньої формули отримано в припущенні, що зміну густини газу з часом можна знехтувати. Вихідна система має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2D} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \\ \rho = \rho zRT, \end{cases} \quad (2)$$

де ρ, v, p – відповідно, густина, швидкість руху і тиск газу; λ – коефіцієнт гідравлічного опору; T – температура газу; D – діаметр труби; t – час; x – біжуча координата, $x \in [0, L]$; L – довжина трубопроводу; c – швидкість звуку в газі.

Для обчислення коефіцієнта стисливості Z , який описує відмінність реального газу від ідеального, побудовано чимало емпіричних формул, зокрема [3] $Z = 1/(1 + f\rho)$, де ρ вимірюють в атмосферах, а $f = (24 - 0.21t^{\circ}\text{C}) \cdot 10^{-4}$, $t, ^{\circ}\text{C}$ – температура газу; R – газова стала.

На практиці значення тисків ρ порядку 10^6 , а значення швидкості – порядку десяти. Задля стійкості числових методів в алгоритмі розв'язування системи (2) вигідно виконати такі заміни, які би вирівняли порядки чисел. Якщо використати співвідношення

$$\rho = \frac{p}{ZRT}$$

і ввести позначення

$$f = \ln(\rho) \text{ та } \gamma = ZRT,$$

то система (2) набуде вигляду

$$\begin{cases} \gamma \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\lambda v^2}{2D} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Вихідним станом на початку нестационарного процесу є стаціонарний розподіл тиску. Тому в цьому випадку необхідно знайти розв'язок системи (3) за граничних та початкових умов.

Лінеаризація вихідної нелінійної системи. Як система (2), так і система (3) нелінійні. Отримати їх точний аналітичний розв'язок можна в окремих випадках. Тут добре зарекомендував себе спосіб, який поєднує лінеаризацію цих систем, аналітичний їх розв'язок з подальшою ітерацією лінеаризованих величин. Розглянемо один зі способів лінеаризації, який дає змогу будувати ітераційний процес уточнення системи (3).

У першому рівнянні системи (3) другий доданок

$$\frac{\lambda v^2(x)}{2D} = \mathcal{V} \frac{\lambda v(x)}{2D},$$

а в другому рівнянні

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \mathcal{V} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Тут \mathcal{V} – наближене значення швидкості газу на попередньому кроці ітерації.

Запишемо вихідну систему у вигляді

$$\begin{cases} c_1 \frac{\partial f}{\partial x} + c_2 v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ c_3 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + c_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Тут

$$c_1 = ZRT, \quad c_2 = \frac{\lambda \mathcal{V}}{2D}, \quad c_3 = \mathcal{V}, \quad c_4 = \frac{ZRT}{c^2}.$$

Для знаходження коректного розв'язку системи (4) необхідно задати узгоджені початково-граничні умови. Початковою умовою виступає розв'язок вихідної системи в стаціонарному випадку, який за заданих граничних параметрів v_0 та f_0 має вигляд

$$v_{st}(x) = v_0 e^{\frac{c_2 c_3 x}{c_1}}, \quad f_{st}(x) = (c_3 f_0 + v_0 - v_0 e^{\frac{c_2 c_3 x}{c_1}}) / c_3. \quad (5)$$

На практиці, як правило, легше керувати зміною тиску на кінцях трубопроводу, ніж швидкістю руху газу. Такі зміни достатньо добре описує експоненціальний закон, зокрема,

$$\rho_o(t) = \rho_{on} + (\rho_o - \rho_{on}) e^{-\gamma_0 t}, \quad (6a)$$

$$\rho_e(t) = \rho_{en} + (\rho_e - \rho_{en}) e^{-\gamma_e t}, \quad (66)$$

відповідно, на вході та виході трубопроводу. Тут ρ_0, ρ_{0n} – тиски газу у вихідному та новому стаціонарному стані течії газу; параметр γ_0 характеризує швидкість переходу з одного стану в інший на початку трубопроводу; $\rho_e, \rho_{en}, \gamma_e$ – аналогічні параметри в кінці трубопроводу.

Розв’язок задачі методом скінченних елементів. В операторному вигляді лінеаризована система (4) матиме вигляд [2]

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = VU. \quad (7)$$

Тут U – диференціальний оператор, який містить похідні за часом та координатою;

$$u = (f, v)^T; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_4 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_3 & 1 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} 0 & -c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для розв’язування системи (7) використовуємо схему Гальоркіна в поєднанні зі скінченно-різницевою дискретизацією за часом [1, 4]. Тоді вона набуде вигляду

$$(A^n (\bar{U}^{*n+1} - \bar{U}^{*n}) + B^n \Delta t \bar{U}^{*n+1} - V^n \Delta t \bar{U}^{*n+1}, \psi_k(x)) = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (8)$$

Тут $\psi_k(x)$ – пробні функції, визначені інтерполяцією функцій ϕ_k, χ_k :

$$\begin{aligned} \psi_k &= \phi_k + \alpha(\chi_k - \phi_k); \\ \chi_k(\xi) &= \begin{cases} 4 - 6\xi & \text{при } 0 < \xi < 1; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \end{aligned}$$

Числовий експеримент. Для цього використовували трубопровід довжиною 100 км, діаметром 1.388 м за таких значень параметрів: $\lambda = 0.009$, $\rho_0 = 0.682 \text{ кг/м}^3$, $T = 313 \text{ }^\circ\text{K}$, $R = 506.7 \text{ Дж/кг }^\circ\text{K}$, $z = 0.87$. Граничні умови задавали на тиск газу, який змінювався з часом від 60 до 70 атм на лівому краю, та на відбір газу на правому краю $q_r = 1027 \text{ м}^3/\text{с}$. Вхідними вибрали системи (1) і (3). Граничні умови задали так, щоби значення відборів газу були однаковими у початковому та усталеному режимах руху газу. Задавши відносну оцінку зміни тиску

$$\frac{|\rho - \rho_{st}|}{\rho_{st}} > 0.001, \quad (9)$$

можна визначити, за який час від початку дії процесу зміняться фізичні параметри газу, а отже, знайти швидкість поширення хвилі в газі. Крок за часом $dt = 10 \text{ с}$, кількість елементів розбиття за просторовою координатою $kx = 8$.

На рис. 1 побудовані графіки значень різниць $\rho(t_i) - \rho(t_{i-1})$ на різних ділянках трубопроводу за використання моделі (3), і зроблено висновок про залежність реакції тиску газу вздовж труби від зміни тиску на краю трубопроводу.

Побудовано також (рис. 2) графіки значень цих різниць за вживання різних моделей щоби зробити висновки про перехідні часи нестационарних процесів в експериментальній задачі.

Виявлено, що для стабільного розрахунку газодинамічних параметрів (запасу газу, розподілу тиску тощо) точність задання крайових умов необхідно узгоджувати з точністю, яку вимагають під час розв’язування відповідної практичної задачі. Штучне нав’язання неузгоджених граничних умов на тиск призводить до того, що значення тисків та швидкостей у цих двох задачах відрізняються до 5% (рис. 2а).

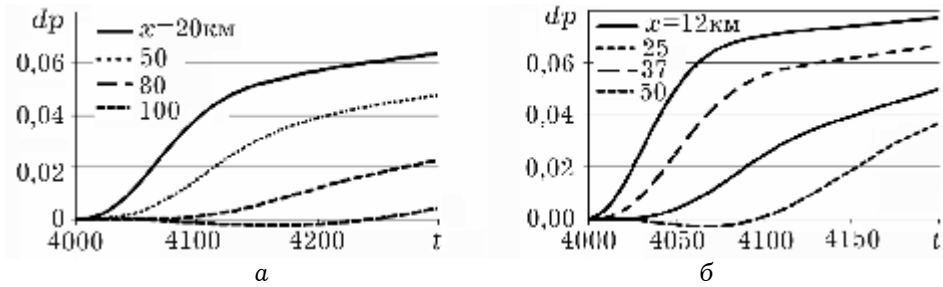


Рис. 1. Значення різниць $\rho(t_i) - \rho(t_{i-1})$ на різних ділянках трубопроводу для $L = 100$ км (а) і 50 км (б).

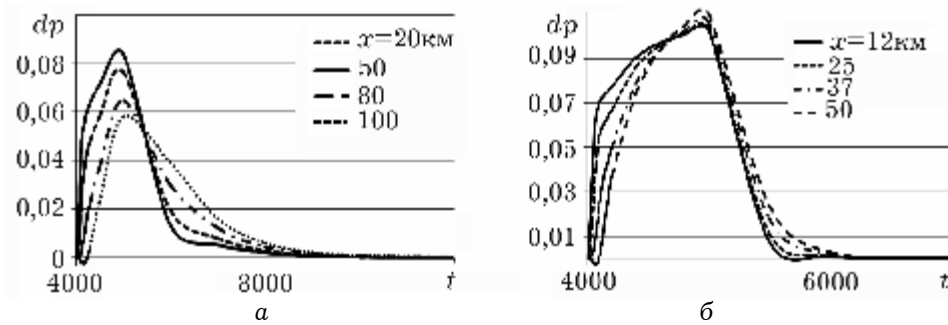


Рис. 2. Зміна тисків $\rho(t_i) - \rho(t_{i-1})$ у часі для $L = 100$ км (а) і 50 км (б).

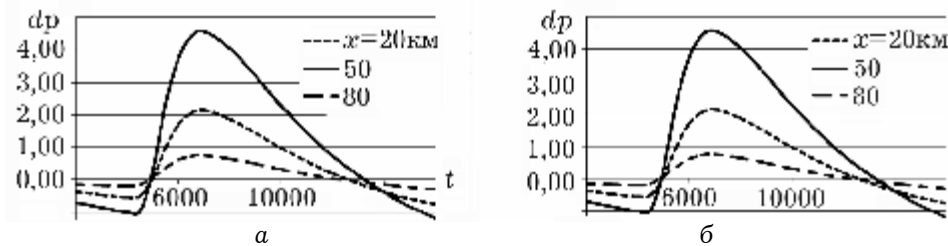


Рис. 3. Залежність різниці швидкостей $v_1(x, t) - v_3(x, t)$ (а) і тисків $\rho_1(x, t) - \rho_3(x, t)$ (б) від часу, знайдених за моделями (1) та (3).

З рис. 1 видно, що тиск газу починає змінюватись (відносно вказаної оцінки (9)) за часом від лівого кінця трубопроводу до правого зі швидкістю $c \approx 400$ м/с, що відповідає швидкості звуку в газі. Перехідний час нестационарного процесу пропорційний довжині трубопроводу (рис. 2) та не залежить суттєво від зміни граничної умови.

З графіків видно, що тиск газу починає змінюватись за часом від лівого кінця трубопроводу до правого із швидкістю поширення звуку в газі $c \approx 400$ м/с.

Отримані результати підтверджують той факт, що за задання граничних умов необхідно враховувати час затримки проходження хвилі вздовж трубопроводу. В протилежному випадку виникне неузгодженість граничних умов, що може призвести до неточності визначення параметрів процесу руху газу в трубопроводах. Особливо це стосується випадку, коли будують математичну модель газотранспортної системи.

Масу газу в трубопроводі обчислювали за формулою

$$M = \int_V \rho dv,$$

де інтегрували за об'ємом трубопроводу V ; M – маса газу в сховищі; ρ – густина газу. Як видно з отриманих результатів (рис. 3б) і останньої формули, моделі (1) та (3) під час обчислення запасу газу в газотранспортній системі можуть призвести до деякої неузгодженості результатів. Цей факт необхідно враховувати, моделюючи газотранспортні системи.

1. Алгоритми розрахунку гідродинамічних параметрів течії газу в трубопроводах (1) / Н. Лопух, М. Притула, Я. П'янило, Я. Савула // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2007. – Вип. 12. – С. 108–117.
2. Лопух Н. Вплив неусувної похибки на розрахунок газодинамічних параметрів руху газу в трубопроводі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 97–104.
3. Селезнев, В. Е., Алешин В. В., Клишин Г. С. Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 448 с.
4. Miller J., Wang S. An exponentially fitted finite element volume method for the numerical solution of 2D unsteady incompressible flow problems // J. Comput. Phys. – 1994. – Ass. 115(1). – P. 56–64.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ВРЕМЕН И СОГЛАСОВАННОСТИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДЕ

Исследованы модели неустановившегося движения газа в трубопроводе в изотермических условиях. Показано, что граничные условия необходимо согласовывать с переходными временами, которые зависят от режима транспортировки и геометрии трубопровода. Предложена методика линеаризации уравнений, входящих в математическую модель движения газа, и построено итерационную схему решения исходных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Полученные результаты апробированы в ходе вычислительного эксперимента на модельной задаче. Реализовано конечно-элементную модель задачи с использованием метода Петрова–Галеркина.

RESEARCH OF TRANSITIVE TIMES AND COORDINATION OF BOUNDARY CONDITIONS AT NON-STATIONARY GAS MOTION IN THE PIPELINE

In the work models of unsteady gas motion in the pipeline in an isothermal condition are investigated. It is shown, that boundary conditions are necessary for coordinating with transitive times which depend on a mode of transportation and pipeline geometry. The technique of linearization of the equations entering into mathematical model of gas motion is offered and the iterative scheme of the decision of initial systems of the nonlinear differential equations is constructed. The received results are approved during computing experiment on modelling problems. Finite element model of a problem with use of Petrov–Galerkin method is realised.

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
19.09.12