УДК 539.3: 620.198

В. А. Шевчук

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ В ЦИЛІНДРІ З ТОНКИМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИВОМ

Запропоновано аналітичну модель для прогнозування залишкових напружень в циліндричних тілах з багатошаровими тонкими покривами, яка ґрунтується на застосуванні узагальнених граничних умов. На основі отриманого замкненого аналітичного розв'язку одновимірної задачі пружності для суцільного циліндра з багатошаровим покривом оцінено вплив геометричних і фізико-механічних характеристик покриву та підкладки, а також умов закріплення торців циліндра на залишковий напружений стан системи циліндр – багатошаровий покрив при її остиганні.

Вступ. Залишкові напруження в покривах, які виникають при їх нанесенні, суттєво впливають на міцність і надійність елементів конструкцій з покривами. Тому для оцінки цього фактора необхідно визначити рівень, знак і характер їх розподілу.

Температурні залишкові напруження в тілах з багатошаровими покривами переважно досліджували для тіл плоскої геометрії, де з використанням гіпотези плоских перерізів вдалося отримати відносно прості аналітичні вирази, зручні у практичному використанні [5, 13, 15, 19, 21, 23].

Для неплоских зразків кількість досліджень значно менша, що пов'язано з ускладненням відповідних задач. Переважно автори обмежувались системами з одно-, дво- та тришаровими покривами [3, 11, 12, 14, 16, 17]. Наведено [14, 18, 20, 22] алгоритм розрахунку відповідної задачі для циліндра з багатошаровим покривом, який зводиться до розв'язування системи лінійних рівнянь і не дає можливості апріорно оцінити вплив вхідних параметрів на рівень і знак залишкових напружень. Записано [1, 2, 4, 7] розв'язки статичної задачі термопружності для багатошарового циліндра у загальному випадку, застосовні для конкретних числових розрахунків.

Нижче на основі отриманих узагальнених граничних умов механічного спряження тіл з багатошаровими покривами [9] записано аналітичний розв'язок статичної задачі пружності для циліндра з багатошаровим покривом і досліджено залишковий напружений стан покриву залежно від умов закріплення торців циліндра.

Формулювання і розв'язування задачі пружності з узагальненою граничною умовою. Розглянемо напружено-деформований стан довгого суцільного кругового циліндра радіуса R з n-шаровим покривом товщиною $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$ під дією поля дисторсій e_{pq}^{0}, несумісність якого призводить до виникнення залишкових напружень.

Подамо компоненти e_{pq} тензора повної деформації у циліндричній системі координат (r, θ, z) у вигляді [6]

$$e_{pq} = e_{pq}^{0} + e_{pq}^{s}, \qquad p, q = r, \theta, z, \tag{1}$$

де e_{pq}^{s} – компоненти тензора пружних деформацій, що пов'язані з компонентами тензора залишкових напружень співвідношеннями закону Гука

$$e_{pq}^{s} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{pq} - \nu\delta_{pq}\sigma_{kk}\right], \tag{2}$$

де E – модуль Юнґа; ν – коефіцієнт Пуассона; δ_{pq} – символ Кронекера; σ_{kk} – сума нормальних напружень.

Вважаємо, що поле дисторсій описується кульовим тензором

$$e_{rr}^0 = e_{\theta\theta}^0 = e_{zz}^0 = e^0(r)\,,\ e_{r\theta}^0 = e_{rz}^0 = e_{\theta z}^0 = 0\,. \tag{3}$$

Надалі індексами i та T позначатимемо величини, що стосуються відповідно i-го шару покриву та тіла.

Тоді розв'язок для напружень в циліндрі $0 \le r \le R$ можна подати у вигляді [8]

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}}(r) = a + \frac{b}{r^2} - \frac{E_{\mathrm{T}}}{(1-\nu_{\mathrm{T}})r^2}\int_0^r e_{\mathrm{T}}^0(\xi)\,\xi\,d\xi\,, \tag{4}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\mathrm{T}}(r) = a - \frac{b}{r^2} + \frac{E_{\mathrm{T}}}{(1-\nu_{\mathrm{T}})r^2}\int_0^r e_{\mathrm{T}}^0(\xi)\xi\,d\xi - \frac{E_{\mathrm{T}}e_{\mathrm{T}}^0(r)}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\,, \tag{5}$$

а узагальнену граничну умову механічного спряження тіла з середовищем – у вигляді [9] (якщо у відповідних виразах замінити температурну деформацію на e^0)

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\nu_{\mathrm{T}}(G_{11}+G_{12})}{RE_{\mathrm{T}}}\right)\sigma_{rr}^{\mathrm{T}}(R) + \frac{G_{11}-\nu_{\mathrm{T}}G_{12}}{RE_{\mathrm{T}}}\sigma_{\theta\theta}^{\mathrm{T}}(R) + \frac{G_{12}-\nu_{\mathrm{T}}G_{11}}{RE_{\mathrm{T}}}\sigma_{zz}^{\mathrm{T}}(R) = \\ = \frac{N_e - (G_{11}+G_{12})e_{\mathrm{T}}^0(R)}{R}\,,\end{aligned} \tag{6}$$

де $\{G_{11}, G_{12}\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2}\{1, \nu_i\}$; $N_e = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{E_i}{1-\nu_i}\int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} e_i^0 dr$;

$r_0 = R$, $r_i = R + \sum\limits_{j=1}^{i} h_j \quad i = \overline{1, n}$.

Розглядатимемо два випадки:

(i) вільні кінці циліндра:

$$\int_0^R \sigma_{zz}\, r dr + RN_1 = 0\,, \tag{7.1}$$

(ii) кінці циліндра фіксовані від осьових переміщень:

$$e_{zz} \equiv 0\,. \tag{7.2}$$

З урахуванням неперервності тангенціальних деформацій на поверхні поділу тіло–покрив осьове зусилля N_1 в оболонці, якою моделюємо покрив, можна подати у вигляді [9, 10]

$$N_1 = G_{11}e_{zz}^{\mathrm{T}}(R) + G_{12}e_{\theta\theta}^{\mathrm{T}}(R) - N_e + C_2\sigma_{rr}^{\mathrm{T}}(R)\,, \tag{8}$$

де $C_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\left(h_i - \frac{\gamma_i^3 - \gamma_{i-1}^3}{h^2} + \frac{\gamma_i^4 - \gamma_{i-1}^4}{2h^3}\right)$, $\gamma_i = r_i - R$.

Враховуючи умову $\sigma_{rr}^{\mathrm{T}}\big|_{r=0} \ne \infty$, співвідношення (1)–(3) для тіла, узагальнену граничну умову (6), умову (7.1) та співвідношення (8) для випадку (i), умову (7.2) для випадку (ii), знаходимо наближений розв'язок задачі для циліндра $0 \le r \le R$:

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}}(r) = Z_1\tilde{G}_1 e_{zz} + \frac{E_{\mathrm{T}}}{2(1-\nu_{\mathrm{T}})}\left(Z_1 Y_1\tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R) - \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(r)\right) + Z_1\tilde{N}_e\,, \tag{9}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\mathrm{T}}(r) = Z_1\tilde{G}_1 e_{zz} + \frac{E_{\mathrm{T}}}{2(1-\nu_{\mathrm{T}})}\left(Z_1 Y_1\tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R) + \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(r) - 2e_{\mathrm{T}}^0(r)\right) + Z_1\tilde{N}_e\,, \tag{10}$$

$$\sigma_{zz}^{\mathrm{T}}(r) = \left(2\nu_{\mathrm{T}} Z_1 \tilde{G}_1 + E_{\mathrm{T}}\right) e_{zz} + \frac{E_{\mathrm{T}}}{1-\nu_{\mathrm{T}}}\left(\nu_{\mathrm{T}} Z_1 Y_1 \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R) - e_{\mathrm{T}}^0(r)\right) + 2\nu_{\mathrm{T}} Z_1 \tilde{N}_e\,, \tag{11}$$

де для випадку (i)

$$e_{zz} = \frac{Y_2 - Z_2 Y_1 + \tilde{C}_2}{Z_2 \tilde{G}_1 - \tilde{G}_2 + 0.5 E_{\mathrm{T}}}\,\frac{E_{\mathrm{T}} \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R)}{2(1-\nu_{\mathrm{T}})} + \frac{1 - Z_2}{Z_2 \tilde{G}_1 - \tilde{G}_2 + 0.5 E_{\mathrm{T}}}\,\tilde{N}_e\,. \tag{12}$$

Тут

$$\tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r e_{\mathrm{T}}^0(\xi)\,\xi\,d\xi\,, \quad Z_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{G_{11}}{RG_{\mathrm{T}}}}\,, \quad Z_2 = \left(\nu_{\mathrm{T}} + \frac{G_{12}}{RG_{\mathrm{T}}} + \tilde{C}_2\right) Z_1\,,$$

$$G_{\mathrm{T}} = \frac{E_{\mathrm{T}}}{1 - \nu_{\mathrm{T}} - 2\nu_{\mathrm{T}}^2}\,, \quad \tilde{C}_2 = \frac{C_2}{R}\,, \quad \tilde{N}_e = \frac{N_e}{R}\,, \quad \tilde{G}_k = \frac{\nu_{\mathrm{T}} G_{1k} - G_{1l}}{R}\,,$$

$$Y_k = 1 - \frac{(1+\nu_{\mathrm{T}})\,G_{1k}}{RE_{\mathrm{T}}}\,, \quad k = 1, 2\,, \quad l = 3 - k\,.$$

Підставляючи вирази (9)–(11) у формули відновлення [9], знаходимо напруження в i-му шарі покриву $r_{i-1} \le r \le r_i$:

$$\sigma_{rr}^i(r) = \sigma_{rr}^{\mathrm{T}}(R)\left[1 - \frac{3(r-R)^2}{h^2} + \frac{2(r-R)^3}{h^3}\right], \tag{13}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i(r) = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left\{\left[\nu_i - \nu_{\mathrm{T}} + \frac{Z_1 \tilde{G}_1}{G_{\mathrm{T}}}\right] e_{zz} + (1+\nu_{\mathrm{T}}) Z_1 \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R) - (1+\nu_i) e_i^0(r) + \right.$$
$$\left. + \frac{Z_1}{G_{\mathrm{T}}}\tilde{N}_e\right\} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{rr}^i(r), \tag{14}$$

$$\sigma_{zz}^i(r) = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left\{\left[1 - \nu_i \nu_{\mathrm{T}} + \nu_i \frac{Z_1 \tilde{G}_1}{G_{\mathrm{T}}}\right] e_{zz} + \nu_i (1+\nu_{\mathrm{T}}) Z_1 \tilde{e}_{\mathrm{T}}^0(R) - (1+\nu_i) e_i^0(r) + \right.$$
$$\left. + \nu_i \frac{Z_1}{G_{\mathrm{T}}}\tilde{N}_e\right\} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{rr}^i(r). \tag{15}$$

Залишкові напруження при охолодженні покриву. Проаналізуємо ситуацію, коли підкладка з нанесеним покривом остигає. Тоді $e_k^0 = \alpha_k t$, де α_k – коефіцієнт лінійного температурного розширення (КЛТР) матеріалу $k \in \{\mathrm{T}\} \cup \{1, 2, \ldots, n\}$, t – зміна температури за рівномірного охолодження системи тіло–багатошаровий покрив.

Загальний випадок. Тоді формули (9)–(12), (14), (15) матимуть вигляд

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\theta\theta}^{\mathrm{T}} = \frac{Z_1}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i h_i}{1-\nu_i}\left[\frac{\nu_{\mathrm{T}} - \nu_i}{1+\nu_i} e_{zz} + \left(\alpha_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\mathrm{T}}\right) t\right], \tag{16}$$

$$\sigma_{zz}^{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{T}}\left(e_{zz} - Z_1 \alpha_{\mathrm{T}} t\right) + \frac{Z_1}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i h_i}{1-\nu_i}\left[2\nu_{\mathrm{T}}\frac{\nu_{\mathrm{T}} - \nu_i}{1+\nu_i} e_{zz} + \left(2\nu_{\mathrm{T}}\alpha_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\mathrm{T}}\right) t\right], \tag{17}$$

де для вільних торців (i)

$$e_{zz} = \left[\frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2} \left[1 - \nu_i \nu_{\mathrm{T}} + (\nu_{\mathrm{T}} - \nu_i) Z_2 \right] + 0.5 E_{\mathrm{T}} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\left(1 - Z_2 - \frac{(1+\nu_{\mathrm{T}})}{R E_{\mathrm{T}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2} (\nu_i - Z_2) + \tilde{C}_2 \right) \frac{E_{\mathrm{T}} \alpha_{\mathrm{T}} t}{2(1-\nu_{\mathrm{T}})} + \frac{1-Z_2}{R} \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \alpha_i h_i}{1-\nu_i} t \right], \tag{18}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i(r) = \frac{E_i Z_1}{\left(1-\nu_i^2\right) G_{\mathrm{T}} R} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k h_k (\nu_{\mathrm{T}} - \nu_k)}{1-\nu_k^2} e_{zz} + \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k \alpha_k h_k}{1-\nu_k} t \right] +$$

$$+ \frac{E_i (\nu_i - \nu_{\mathrm{T}})}{1-\nu_i^2} e_{zz} - \left(\alpha_i - Z_1 \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \alpha_{\mathrm{T}} \right) \frac{E_i t}{1-\nu_i} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \sigma_{rr}^i(r), \tag{19}$$

$$\sigma_{zz}^i(r) = \frac{E_i \nu_i Z_1}{(1-\nu_i^2) G_{\mathrm{T}} R} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k h_k (\nu_{\mathrm{T}} - \nu_k)}{1-\nu_k^2} e_{zz} + \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k \alpha_k h_k}{1-\nu_k} t \right\} +$$

$$+ \frac{E_i (1 - \nu_i \nu_{\mathrm{T}})}{1-\nu_i^2} e_{zz} - \left(\alpha_i - Z_1 \nu_i \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \alpha_{\mathrm{T}} \right) \frac{E_i t}{1-\nu_i} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \sigma_{rr}^i(r). \tag{20}$$

Врахувавши (13), подамо формули (19) і (20) у вигляді

$$\sigma_{\theta\theta}^i(r) = -\frac{E_i t}{1-\nu_i} \left(\alpha_i - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \alpha_{\mathrm{T}} \right) + \frac{Z_1 t \beta_i^{\theta}(r)}{R} \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k h_k}{1-\nu_k} \left(\alpha_k - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_k} \alpha_{\mathrm{T}} \right) +$$

$$+ \left[\frac{Z_1 \beta_i^{\theta}(r)}{R} \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k h_k (\nu_{\mathrm{T}} - \nu_k)}{1-\nu_k^2} + \frac{E_i (\nu_i - \nu_{\mathrm{T}})}{1-\nu_i^2} \right] e_{zz}, \tag{21}$$

$$\sigma_{zz}^i(r) = -\frac{E_i t}{1-\nu_i} \left(\alpha_i - \nu_i \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_i} \alpha_{\mathrm{T}} \right) + \frac{Z_1 t \beta_i^{z}(r)}{R} \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k h_k}{1-\nu_k} \left(\alpha_k - \frac{1+\nu_{\mathrm{T}}}{1+\nu_k} \alpha_{\mathrm{T}} \right) +$$

$$+ \left[\frac{Z_1 \beta_i^{z}(r)}{R} \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k h_k (\nu_{\mathrm{T}} - \nu_k)}{1-\nu_k^2} + \frac{E_i (1 - \nu_i \nu_{\mathrm{T}})}{1-\nu_i^2} \right] e_{zz}, \tag{22}$$

де

$$\beta_i^{\theta}(r) = \frac{E_i}{(1-\nu_i^2) G_{\mathrm{T}}} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \kappa(r); \quad \beta_i^{z}(r) = \frac{E_i \nu_i}{(1-\nu_i^2) G_{\mathrm{T}}} + \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \kappa(r);$$

$$\kappa(r) = 1 - \frac{3(r-R)^2}{h^2} + \frac{2(r-R)^3}{h^3}. \tag{23}$$

Сталий коефіцієнт Пуассона:

$$\nu_i = \nu_{\mathrm{T}} = \nu \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n}. \tag{24}$$

Тоді формули (16)–(18), (21)–(23) матимуть вигляд

$$\sigma_{rr}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\theta\theta}^{\mathrm{T}} = \frac{\tilde{Z}_1 t}{R(1-\nu)} \sum_{i=1}^{n} E_i h_i (\alpha_i - \alpha_{\mathrm{T}}), \tag{25}$$

$$\sigma_{zz}^{\mathrm{T}} = E_{\mathrm{T}} \left(e_{zz} - \tilde{Z}_1 \alpha_{\mathrm{T}} t \right) + \frac{\tilde{Z}_1 t}{R(1-\nu)} \sum_{i=1}^{n} E_i h_i (2\nu\alpha_i - \alpha_{\mathrm{T}}), \tag{26}$$

$$
\begin{aligned}
e_{zz} &= \left[\frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} E_i h_i + 0.5 E_{\text{T}} \right]^{-1} \times \\
&\times \left[\left(1 - \tilde{Z}_2 - \frac{\nu - \tilde{Z}_2}{R E_{\text{T}} (1-\nu)} \sum_{i=1}^{n} E_i h_i + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{h}{R} \right) 0.5 E_{\text{T}} \alpha_{\text{T}} + \frac{1 - \tilde{Z}_2}{R} \sum_{i=1}^{n} E_i \alpha_i h_i \right] \frac{t}{1-\nu},
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\sigma_{\theta\theta}^{i}(r) = \frac{t}{1-\nu} \left[-E_i (\alpha_i - \alpha_{\text{T}}) + \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{\beta}_i^{\theta}(r)}{R} \sum_{k=1}^{n} E_k h_k (\alpha_k - \alpha_{\text{T}}) \right], \tag{28}
$$

$$
\sigma_{zz}^{i}(r) = \frac{t}{1-\nu} \left[-E_i (\alpha_i - \nu \alpha_{\text{T}}) + \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{\beta}_i^{z}(r)}{R} \sum_{k=1}^{n} E_k h_k (\alpha_k - \alpha_{\text{T}}) \right] + E_i e_{zz}, \tag{29}
$$

$$
\tilde{\beta}_i^{\theta}(r) = \frac{E_i (1-2\nu)}{E_{\text{T}} (1-\nu)} + \frac{\nu}{1-\nu} \kappa(r), \quad \tilde{\beta}_i^{z}(r) = \frac{E_i \nu (1-2\nu)}{E_{\text{T}} (1-\nu)} + \frac{\nu}{1-\nu} \kappa(r),
$$

$$
\tilde{Z}_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{(1-2\nu)}{(1-\nu) R E_{\text{T}}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i h_i}, \quad \tilde{Z}_2 = \nu + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{h}{R} \tilde{Z}_1. \tag{30}
$$

З формули (25) випливає, що знак залишкових радіальних напружень на поверхні поділу циліндр–покрив $\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}^{\text{T}}(R) = \sigma_{rr}^{1}(R)$ не залежить від коефіцієнта Пуассона і способу закріплення торців циліндра.

Причому, коли КЛТР кожного з шарів покриву більший, ніж підкладки

$$
\alpha_i > \alpha_{\text{T}} \ \text{ для } \ i = \overline{1, n}, \tag{31}
$$

ці напруження завжди стискальні, а коли менший –

$$
\alpha_i < \alpha_{\text{T}} \ \text{ для } \ i = \overline{1, n} \tag{32}
$$

– завжди розтягальні.

Слід зауважити, що коли не для всіх шарів покриву виконується одна з умов (31) або (32), то знак цих напружень визначатиме ефективна величина $\sum_{i=1}^{n} E_i h_i (\alpha_i - \alpha_{\text{T}})$, тобто на нього впливатиме і жорсткість кожного окремого шару покриву.

Зі збільшенням температурної зміни $|t|$, модуля Юнґа підкладки E_{T}, зменшенням радіуса циліндра R напруження $\tilde{\sigma}_{rr}$ зростають за абсолютним значенням. Те саме відбувається за виконання однієї з умов (31) або (32) зі збільшенням різниці КЛТР $|\alpha_i - \alpha_{\text{T}}|$.

Можна зауважити, що збільшення модуля Юнґа E_j і товщини h_j шару покриву з найбільшим КЛТР за виконання умови (31) і шару покриву з найменшим КЛТР за виконання умови (32) призводить також до зростання за абсолютним значенням радіальних напружень $\tilde{\sigma}_{rr}$.

Так само для цього випадку з формули (28) випливає, що знак колових напружень в i-му шарі покриву $\sigma_{\theta\theta}^{i}$ не залежить від способу закріплення торців циліндра і в основному визначається знаком величини $\alpha_i - \alpha_{\text{T}}$. Зі збільшенням температурної зміни $|t|$ ці напруження зростають за абсолютним значенням.

Слід зазначити, що через відмінність знака величини $\alpha_k - \alpha_{\text{T}}$ у відхиленні КЛТР у k-му шарі покриву від знака відхилення КЛТР в i-му шарі $\alpha_i - \alpha_{\text{T}}$ колові напруження у i-му шарі збільшуються за абсолютним значенням.

За виконання умови

$$(\alpha_k - \alpha_{\text{T}})(\alpha_i - \alpha_{\text{T}}) < 0 \qquad k = \overline{1, n}; \;\; k \neq i \tag{33}$$

зі збільшенням модуля Юнґа i-го шару E_i, різниці КЛТР $|\alpha_i - \alpha_{\text{T}}|$, зменшенням товщини i-го шару h_i ці напруження збільшуються за абсолютним значенням.

З цієї ж формули (28) випливає, що жорсткістні властивості інших шарів покриву менше впливають на напруження в цьому шарі. Зі зменшенням товщини покриву колові напруження прямують до граничного значення $\sigma^i_{\theta\theta} = \dfrac{E_i t}{1-\nu}(\alpha_{\text{T}} - \alpha_i)$.

Закріплені торці циліндра. Тут формули (16), (17), (21), (22) матимуть вигляд

$$\sigma^{\text{T}}_{rr} = \sigma^{\text{T}}_{\theta\theta} = \frac{Z_1 t}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i h_i}{1-\nu_i}\left(\alpha_i - \frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\text{T}}\right), \tag{34}$$

$$\sigma^{\text{T}}_{zz} = -Z_1 E_{\text{T}}\alpha_{\text{T}} t + \frac{Z_1 t}{R}\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i h_i}{1-\nu_i}\left(2\nu_{\text{T}}\alpha_i - \frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\text{T}}\right), \tag{35}$$

$$\sigma^i_{\theta\theta}(r) = -\frac{E_i t}{1-\nu_i}\left(\alpha_i - \frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\text{T}}\right) + \frac{Z_1 t}{R}\beta^{\theta}_i(r)\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k}\left(\alpha_k - \frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_k}\alpha_{\text{T}}\right), \tag{36}$$

$$\sigma^i_{zz}(r) = -\frac{E_i t}{1-\nu_i}\left(\alpha_i - \nu_i\frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\text{T}}\right) + \frac{Z_1 t}{R}\beta^{z}_i(r)\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k}\left(\alpha_k - \frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_k}\alpha_{\text{T}}\right). \tag{37}$$

З (34) випливає, що при

$$\alpha_i > \frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\text{T}} \;\; \text{для} \;\; i = \overline{1, n} \tag{38}$$

напруження σ_{rr} стискальні, а при

$$\alpha_i < \frac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\text{T}} \;\; \text{для} \;\; i = \overline{1, n} \tag{39}$$

– розтягальні.

Якщо не для всіх шарів покриву виконується одна з умов (38) або (39), знак напружень σ_{rr} визначатиме ефективна величина $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i h_i\left(\alpha_i - \dfrac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\text{T}}\right)$.

Як і в попередньому випадку, зі збільшенням температурної зміни $|t|$, модуля Юнґа підкладки E_{T}, зменшенням радіуса циліндра R напруження σ_{rr} збільшуються за абсолютним значенням. За виконання однієї з умов (38) або (39) зі збільшенням різниці $\left|\alpha_i - \dfrac{1+\nu_{\text{T}}}{1+\nu_i}\alpha_{\text{T}}\right|$ вони також зростають за абсолютним значенням.

З формул (36), (37) випливає, що колові та осьові напруження в i-му шарі покриву збільшуються із підвищенням температурної зміни $|t|$. Знак колових напружень, в основному, визначає знак величини $\alpha_i - \dfrac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T$, а осьових – знак $\alpha_i - \nu_i \dfrac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T$.

За виконання умови

$$\left(\alpha_k - \frac{1+\nu_T}{1+\nu_k}\alpha_T\right)\left(\alpha_i - \frac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T\right) < 0 \qquad k = \overline{1,n};\ k \neq i \tag{40}$$

зі збільшенням модуля Юнґа i-го шару E_i, різниці $\left|\alpha_i - \dfrac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T\right|$, зменшенням товщини i-го шару h_i колові напруження $\sigma^i_{\theta\theta}$ збільшуються за абсолютним значенням.

Виконання умови

$$\left(\alpha_k - \frac{1+\nu_T}{1+\nu_k}\alpha_T\right)\left(\alpha_i - \nu_i\frac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T\right) < 0, \quad k = \overline{1,n} \tag{41}$$

забезпечує збільшення осьових напружень σ^i_{zz} за абсолютним значенням з ростом модуля Юнґа i-го шару E_i та різниці $\left|\alpha_i - \nu_i\dfrac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T\right|$.

Якщо виконується умова (41) для $k \in \{1,\ldots,i-1\} \cup \{i+1,\ldots,n\}$ та

$$\left(\alpha_i - \frac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T\right)\left(\alpha_i - \nu_i\frac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T\right) > 0, \tag{42}$$

то зі зменшенням товщини i-го шару h_i осьові напруження збільшуватимуться за абсолютним значенням.

З (36) і (37) випливає, що жорсткістні властивості інших шарів слабше впливають на колові та осьові напруження в цьому шарі.

Зі зменшенням товщини покриву колові напруження прямують до граничного значення $\tilde{\sigma}^i_{\theta\theta} = \dfrac{E_i t}{1-\nu_i}\left(\dfrac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T - \alpha_i\right)$, а осьові – до $\tilde{\sigma}^i_{zz} = \dfrac{E_i t}{1-\nu_i}\left(\nu_i\dfrac{1+\nu_T}{1+\nu_i}\alpha_T - \alpha_i\right)$.

Вільні торці циліндра. Тут знак і рівень радіальних напружень на поверхні поділу циліндр–покрив (формули (16) і (18)), колових та осьових напружень в i-му шарі покриву (формули (21) і (22)) залежать від усього комплексу геометричних і термомеханічних параметрів підкладки і шарів покриву.

Зі збільшенням температурної зміни $|t|$, модуля Юнґа підкладки E_T, зменшенням радіуса циліндра R напруження $\tilde{\sigma}_{rr}$ зростають за абсолютним значенням.

Зі зменшенням товщини покриву колові і осьові напруження прямують до граничного значення $\tilde{\sigma}^i = \dfrac{E_i t}{1-\nu_i}(\alpha_T - \alpha_i)$.

Висновки. На основі аналітичного розв'язку статичної задачі пружності для циліндра з тонким багатошаровим покривом, отриманого із застосуванням узагальнених граничних умов, проаналізовано вплив геометричних і фізико-механічних характеристик покриву і підкладки, а також умов закріплення торців циліндра на залишковий напружений стан системи тіло–багатошаровий покрив. Виявлено умови, за яких можуть виникати небезпечні радіальні, колові та осьові напруження. Отриманий замкнений аналітичний розв'язок є відносно простим і зручним для практичного використання.

1. *Вігак В. М.* Розв'язки одновимірних задач пружності та термопружності для циліндричних кусково-однорідних тіл // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 4. – С. 139–148.

Те саме: *Vigak V. M.* Solutions of one-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for cylindrical piecewise-homogeneous problems // J. Math. Sci. – 1999. – 96, № 2. – P. 3057–3064.

2. *Вигак В. М., Ригин А. М.* Температурные напряжения в многослойном кусочно-однородном цилиндре // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 15. – С. 63–67.
3. *Гаврись О. П., Шевчук П. Р.* Вплив кривини поверхні та способів закріплення підкладки на характер формування залишкових деформацій при високотемпературному нанесенні покрить // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 138–146.
4. *Коляно Ю. М., Процюк Б. В.* Термопружність багатошарового циліндра // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 8. – С. 718–721.
5. *Мартыненко А. А.* К исследованию остаточных напряжений в многослойных покрытиях // Пробл. прочности. – 1980. – № 11. – С. 109–110.

Те саме: *Martynenko A. A.* Residual stresses in multilayer coatings // Strength of Mater. – 1980. – 12, № 11. – P. 1448–1450.

6. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872с.
7. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368с.
8. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576с.
9. *Шевчук В. А.* Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка – 2011. – 19, № 5. – Вип. 15, т 1. – С. 129–139.
10. *Шевчук В. А.* Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями // Пробл. прочности. – 2000. – № 1. – С. 136–150.
11. *Ciawarella M, Decuzzi P., Tagarielli V. L., Demelio G. P.* Simple formulas for thermoelastic stresses in TBC coatings // J. Thermal Stresses. – 2003. – 26, Iss. 5. – P. 409–422.
12. *Evans A. G., Crumley G. B., Demaray R. E.* On the mechanical behavior of brittle coatings and layers // Oxid. Met. – 1983. – 20, № 5–6. – P. 193–216.
13. *Hsueh C. H.* Thermal stresses in elastic multilayer systems // Thin Solid Films. – 2002. – 418, Iss. 2. – P. 182–188.
14. *Kroupa F.* Stresses in coatings on cylindrical surfaces// Acta Techn. CSAV. – 1994. – 39. – P. 243–274.
15. *Kroupa F., Knesl Z., Valach J.* Residual stresses in graded thick coatings // Ibid. – 1993. – 38. – P. 29–74.
16. *Mao W. G., Jiang J. P., Zhou Y. C., Lu C.* Effects of substrate curvature radius, deposition temperature and coating thickness on the residual stress field of cylindrical thermal barrier coatings // Surface & Coating Technology. – 2011. – 205. – P. 3093–3102.
17. *Naik R. A.* Simplified micromechanical equations for thermal residual stress analysis of coated fiber composites // J. Composites Technology & Research. – 1992. – 14, № 3. – P. 182–186.
18. *Nusier S.Q., Newaz G.M.* Transient residual stresses in thermal barrier coatings: analytical and numerical results // ASME J. Appl. Mech. – 1998. – 65. – P. 346–353.
19. *Shaw L. L.* Thermal residual stresses in plates and coatings composed of multilayered and functionally graded materials // Composites Part B. – 1998. – 29B. – P. 199–210.

20. *Warwick C. M.*, *Clyne T. W.* Development of composite coaxial cylinder stress analysis model and its application to SiC monofilament systems // J. Mat. Sci. – 1991. – 26. – P. 3817–3827.
21. *Zhang N.-H.* Thermoelastic stresses in multilayered beams // Thin Solid Films. – 2007. – 515, Iss. 23. – P. 8402–8406.
22. *Zhang X. C., Xu B. S., Wang H. D. et al.* Prediction of three-dimensional residual stresses in the multilayer coating-based systems with cylindrical geometry // Composites Science and Technology. – 2006. – 66, № 13. – P. 2249–2256.
23. *Zhang X. C., Xu B. S., Wang H. D., Wu Y. X.* An analytical model for predicting thermal residual stresses in multilayer coating systems // Thin Solid Films. – 2005. – 488, Iss. 1–2. – P. 274–282.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ЦИЛИНДРЕ С ТОНКИМ МНОГОСЛОЙНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Предложена аналитическая модель для прогнозирования остаточных напряжений в цилиндрических телах с многослойными тонкими покрытиями, основывающаяся на применении обобщенных граничных условий. На основе полученного замкнутого аналитического решения одномерной задачи упругости для сплошного цилиндра с многослойным покрытием проанализировано влияние геометрических и физико-механических характеристик покрытия и подложки, а также условий закрепления торцов цилиндра на остаточное напряженное состояние системы цилиндр–многослойное покрытие при ее остывании.

DETERMINATION OF RESIDUAL STRESSES IN CYLINDER WITH THIN MULTILAYER COATING

The analytical model for prediction of residual stresses in cylindrical bodies with thin multilayer coatings based on the use of the generalized boundary conditions has been suggested. On the basis of the obtained closed analytical solution of the one-dimensional elasticity problem for a solid cylinder with a multilayer coating, the analysis of the influence of geometrical and physico-mechanical properties of the coating and substrate, as well as conditions of fixing of cylinder ends, on residual stress state of cylinder – multilayer coating system under its cooling has been performed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.04.12