УДК 539.3

Б. М. Калиняк

ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ ДО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Задача пружності для неоднорідної прямокутої області за плоского деформованого стану, коли задані масові сили, нормальні й дотичні навантаження на межі, зведена до розв'язування інтегро-диференціального рівняння та інтегральних умов. Рівняння записані відносно густини дотичних напружень.

Вступ. Побудова розв'язків задач, які описують напружено-деформований стан у заповнених однорідним матеріалом областях з кутовими точками, наведена в працях [1, 2]. Запропонований там метод розв'язування задач полягає у суперпозиції розв'язків для відповідних необмежених областей без кутових точок. Це дещо ускладнює задоволення крайових умов у кутових точках. За такого підходу, зокрема, важко відокремити змінні у базових рівняннях теорії пружності в областях типу прямокутника чи паралелепіпеда [3]. Отримані [3] точні розв'язки задачі пружності для однорідного прямокутника з використанням інтегральних крайових умов з допомогою введення системи власних функцій, які дають можливість відокремити змінні.

Через врахування неоднорідності матеріалу суттєво ускладнюється застосування методу відокремлення змінних та власних функцій або взагалі унеможливлюється під час розв'язування згаданої задачі, оскільки відповідні диференціальні рівняння мають змінні коефіцієнти. Як відомо [4], розв'язування обернених задач теорії пружності суттєво спрощується, коли відомі точні аналітичні розв'язки відповідних прямих задач. Тут добре зарекомендував себе метод безпосереднього інтегрування рівнянь руху і сумісності у напруженнях. Він дає можливість звести відповідні задачі пружності й термопружності до розв'язування інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь та інтегральних умов на напруження, які використані для розв'язування обернених задач термопружності у прямокутній області [5, 6].

Мета праці – звести задачу пружності для прямокутної області з характеристиками матеріалу, залежними від координат, до інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь, які б враховували узгодження крайових умов у кутових точках за плоского деформованого стану. Інший метод зведення задач пружності для однорідної смуги до інтегральних рівнянь запропоновано раніше [7].

Формулювання задачі. Розглянено задачу визначення напружень і деформацій у прямокутній області $D = \{(x,y) \in [-a,a] \times [-b,b]\}$ з відомим розподілом нормальних та дотичних навантажень на сторонах. Фізико-механічні характеристики матеріалу (модуль пружності E, коефіцієнт Пуассона ν) вважають відомими неперервними функціями координат: $E = E(x,y)$, $\nu = \nu(x,y)$.

Задачу зведемо до розв'язування рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = F_x , \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = F_y , \tag{1}$$

рівняння суцільності

$$2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \tag{2}$$

з урахуванням зв'язків між компонентами e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy} тензора деформацій і компонентами σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy} тензора напружень

$$e_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right], \qquad e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy},$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})\right],$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right], \tag{3}$$

припущення про плоско-деформований стан $e_{zz} = 0$ та межових умов

$$\sigma_{xx}(\pm a, y) = -p_1^{\pm}(y), \quad \sigma_{yy}(x, \pm b) = -q_1^{\pm}(x),$$

$$\sigma_{xy}(\pm a, y) = -p_2^{\pm}(y), \quad \sigma_{xy}(x, \pm b) = -q_2^{\pm}(x), \tag{4}$$

де $F_x = F_x(x,y)$, $F_y = F_y(x,y)$ – проекції густини масових сил на осях Ox та Oy.

Зведення до інтегро-диференціальних рівнянь. Введемо густину дотичних напружень $P(x,y)$ і виразимо через неї компоненти тензора напружень так, щоб задовольнялись рівняння рівноваги (1) та крайові умови (4):

$$\sigma_{xx} = \int\limits_{-a_x}^{x}\int\limits_{-a_x}^{\xi} P(\bar{\xi}, y)\,d\bar{\xi}\,d\xi + f_{xx}(x,y), \quad \sigma_{yy} = \int\limits_{-b_y}^{y}\int\limits_{-b_y}^{\eta} P(x, \bar{\eta})\,d\bar{\eta}\,d\eta + f_{yy}(x,y),$$

$$\sigma_{xy} = -\int\limits_{-a_x}^{x}\int\limits_{-b_y}^{y} P(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - f_{xy}(x,y), \tag{5}$$

де

$$f_{xx}(x,y) = \int\limits_{-a_x}^{x} F_x(\xi, y)\,d\xi - p_1^-(y) + \frac{\partial p_2^-(y)}{\partial y}\int\limits_{-a_x}^{x}\frac{q_2^-(\xi)}{q_2^-(-a_x)}\,d\xi,$$

$$f_{yy}(x,y) = \int\limits_{-b_y}^{y} F_y(x,\eta)\,d\eta - q_1^-(x) + \frac{\partial q_2^-(x)}{\partial x}\int\limits_{-b_y}^{y}\frac{p_2^-(\eta)}{q_2^-(-a_x)}\,d\eta, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{p_2^-(y)q_2^-(x)}{q_2^-(-a_x)}.$$

Якщо врахувати крайові умови (4) у кутових точках

$$\sigma_{xx}(\pm a, \pm b) = -p_1^{\pm}(\pm b), \quad \sigma_{yy}(\pm a, \pm b) = -q_1^{\pm}(\pm a),$$

$$\sigma_{xy}(\pm a, \pm b) = -p_2^{\pm}(\pm b), \quad \sigma_{xy}(\pm a, \pm b) = -q_2^{\pm}(\pm a), \tag{6}$$

то отримаємо:

$$p_2^+(b) = q_2^+(a), \; p_2^+(-b) = q_2^-(a), \; p_2^-(b) = q_2^+(-a), \; p_2^-(-b) = q_2^-(-a). \tag{7}$$

Якщо вирази (5) підставити у крайові умови (4), то одержимо інтегральні умови на густину

$$\sigma_{xx}(a,y) = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{\xi} P(\bar{\xi}, y)\,d\bar{\xi}\,d\xi + f_{xx}(a,y) = -p_1^+(y),$$

$$\sigma_{yy}(x,b) = \int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-b}^{\eta} P(x,\bar{\eta})\,d\bar{\eta}\,d\eta + f_{yy}(x,b) = -q_1^+(x),$$

$$\sigma_{xy}(a,y) = -\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{y} P(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - f_{xy}(a,y) = -p_2^+(y),$$

$$\sigma_{xy}(x,b) = -\int\limits_{-a}^{x}\int\limits_{-b}^{b} P(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - f_{xy}(x,b) = -q_2^+(x),$$

які з використанням формули інтегрування за частинами

$$\int_{-a}^{x}\int_{-a}^{\xi} P(\bar{\xi},y)\,d\bar{\xi}\,d\xi = \left[\xi\int_{-a}^{\xi} P(\bar{\xi},y)\,d\bar{\xi}\right]_{-a}^{x} - \int_{-a}^{x} \bar{\xi}P(\bar{\xi},y)\,d\bar{\xi} = \int_{-a}^{x} (x-\xi)P(\xi,y)\,d\xi \tag{8}$$

можна подати у вигляді

$$\int_{-a}^{a} (\xi-a)P(\xi,y)\,d\xi + f_{xx}(a,y) = -p_1^{+}(y)\,, \quad \int_{-b}^{b} (\eta-b)P(x,\eta)\,d\eta + f_{yy}(x,b) = -q_1^{+}(x)\,,$$

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{y} P(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + f_{xy}(a,y) = p_2^{+}(y)\,, \quad \int_{-a}^{x}\int_{-b}^{b} P(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + f_{xy}(x,b) = q_2^{+}(x)\,. \tag{9}$$

Безпосереднє підставляння виразів (5) у рівняння рівноваги (1) з використанням умов (6), (7) перетворює (1) у тотожність. Це означає, що рівняння рівноваги задовольняються автоматично. Підстановкою виразів (5) у рівняння сумісності (2) з використанням рівностей (3) можна отримати таке інтегро-диференціальне рівняння відносно густини дотичних напружень $P(x,y)$:

$$P(x,y) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-a}^{x}(x-\xi)P(\xi,y)\,d\xi + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{b}^{y}(y-\eta)P(x,\eta)\,d\eta\right] +$$

$$+\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\frac{\partial}{\partial y}\int_{-a}^{x}(x-\xi)P(\xi,y)\,d\xi + \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\frac{\partial}{\partial x}\int_{-b}^{y}(y-\eta)P(x,\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\int_{-a}^{x}\int_{-b}^{y}P(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\nu(1+\nu)}{E}\right)\right]\int_{-a}^{x}(x-\xi)P(\xi,y)\,d\xi -$$

$$-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\nu(1+\nu)}{E}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right)\right]\int_{-b}^{y}(y-\eta)P(x,\eta)\,d\eta +$$

$$+\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu(1+\nu)}{E}\right)\right]\int_{-b}^{y}P(x,\eta)\,d\eta + \tag{10}$$

$$+\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu(1+\nu)}{E}\right)\right]\int_{-a}^{x}P(\xi,y)\,d\xi + e_{zz}\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial y^2}\right) = \Phi(x,y)\,,$$

де

$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2 f_{xy}(x,y)}{\partial x\partial y} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{yy}}{\partial x^2}\right) + \frac{\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2 f_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yy}}{\partial y^2}\right) -$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\frac{\partial f_{xy}(x,y)}{\partial x} - \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial f_{xy}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) -$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial f_{xx}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) + \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial f_{yy}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu(1+\nu)}{E}\right) -$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial f_{yy}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) + \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial f_{xx}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu(1+\nu)}{E}\right) - \frac{E}{1-\nu^2}f_{xy}(x,y)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) -$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2} f_{xx} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\nu(1+\nu)}{E} \right) \right] - \frac{E}{1-\nu^2} f_{yy} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\nu(1+\nu)}{E} \right) \right].$$

Для однорідного прямокутника рівняння (10) суттєво спрощується і набуває вигляду

$$P(x,y) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-a}^{x} (x-\xi) P(\xi, y) d\xi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{b}^{y} (y-\eta) P(x,\eta) d\eta \right] = \Phi_0(x,y),$$

де

$$\Phi_0(x,y) = -\frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 f_{xy}(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{yy}}{\partial x^2} \right) + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 f_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{yy}}{\partial y^2} \right).$$

Розв'язки рівняння (10) та інтегральні умови (9) дають можливість визначити густину напружень $P(x,y)$, а відтак, з рівностей (5) і (3) – компоненти тензорів напружень та деформацій. Інтегральні умови (9) можна використовувати як вигідний попередній критерій правильності отриманих розв'язків задачі пружності, як із запропонованих інтегральних рівнянь, так й іншими способами.

1. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. – К.: Наук. думка, 1985. – 279 с..
3. *Vihak V., Tokovyi Yu., Rychahivskyy A.* Exact Solution of the Plane Problem of Elasticity in a Rectangular Region // J. of Comp. Appl. Mech. – 2002. – 3., № 2. – P. 193–206.
4. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – К.: Наук. думка, 1988. – 312 с.
5. *Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinskij A. V.* Reduction of plane thermoelasticity problem in inhomogeneous strip to integral Volterra type equation // J. of Thermal Stresses. – 1998. – 21, № 5. – P. 545–561.
6. *Kushnir R. M., Yasinskyy A. V.* Optimal Heating Control of Thermosensitive Rectangular Domain Under Restrictions on Stresses in a Plastic Zone // J. of Thermal Stresses. – 2010. – 33, № 3. – P. 251–261.
7. *Tokovyy Yu. V., Rychahivskyy A. V.* Reduction of plane thermoelasticity problem in inhomogeneous strip to integral Volterra type equation //Math. Model. and Anal. – 2005. – 10, № 2 – P. 91–100.

ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ К ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Задача упругости для неоднородного прямоугольника в случае плоского деформированного состояния с заданными массовыми силами, нормальными и касательными напряжениями на границе, приведена к интегро-дифференциальному уравнению и интегральным условиям. Уравнение записано относительно плотности касательных напряжений.

REDUCTION OF THE ELASTICITY PROBLEM IN INHOMOGENEOUS RECTANGULAR DOMAIN TO INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The elasticity problem for inhomogeneous rectangular domain in the case of plane strain state with known body forces, normal and tangential stresses on the boundary has been reduced to the solving of the integral-differential equation and integral conditions. The last one is written relative to the density of tangential stresses.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.09.12