УДК 519.6

Р. Р. Бігун, Г. Г. Цегелик

ЧИСЛОВИЙ МЕТОД МІНОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ЛОГАРИФМІЧНО ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

З використання апарату некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, побудовано новий числовий метод відшукання екстремуму як гладких, так і негладких логарифмічно опуклих функцій двох дійсних змінних.

Вступ. Класичну теорію мажорант і діаграм Ньютона, розроблену для степеневих рядів функцій однієї комплексної змінної, а пізніше узагальнену на ряди Діріхле, степеневі ряди і ряди Діріхле функцій двох комплексних змінних тощо, широко застосовують у теорії функцій комплексної змінної, обчислювальній математиці та інших галузях математики. Ідею класичного підходу до побудови апарату мажорант і діаграм Ньютона функцій, поданих рядами, використали в праці [4] для побудови т. зв. некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї та двох дійсних змінних, заданих таблично. Виявили, що цей апарат можна успішно застосувати для побудови числових методів розв'язування окремих класів задач алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь тощо. Зокрема, для апроксимації функцій; розробки числових методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем, точних на певних класах функцій; побудови числових методів розв'язування функціональних рівнянь, які не вимагають гладкості функцій в околі кореня тощо. Цей апарат використано [1] для побудови числових методів оптимізації негладких логарифмічно вгнутих функцій однієї, двох і багатьох дійсних змінних. Варто зазначити, що для відшукання екстремуму функцій розроблено багато числових методів [3]. Одним із найуживаніших є градієнтний, метод Ньютона і його модифікації та інші, яким присвячено чимало публікацій. Разом з тим, розробку числових методів оптимізації функцій, які можуть бути негладкими, розривними та дискретними, вперше розпочали під керівництвом Г. Г. Цегелика, керуючись розробленим ним апаратом некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично. Як продовження цих досліджень побудовано [2] апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, який використано для апроксимації функції.

Нижче розглянуто побудову апарату некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, та його використання для розробки числового методу оптимізації негладких логарифмічно опуклих функцій двох дійсних змінних.

Апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій двох дійсних змінних.

Нехай в області $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ визначена логарифмічно опукла функція $f(x,y)$, яка може бути як гладкою, так і негладкою. Побудуємо в області D сітку:

$$x = x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad h = \frac{b-a}{n};$$

$$y = y_j = c + js, \quad j = 0,1,\ldots,m, \quad s = \frac{d-c}{m}.$$

Позначимо:

$$f(x_i, y_j) = a_{ij} \qquad \left(i = 0,1,\ldots,n; j = 0,1,\ldots,m\right).$$

ISSN 1810-3022. Прикл. проблеми мех. і мат. – 2014. – Вип. 12. – С. 64–68.

У просторі xyz побудуємо множину точок $P_{ij}\left(x_i, y_j, -\ln a_{ij}\right)$ з координатами

$$x = x_i,\ y = y_j,\ z = -\ln a_{ij} \qquad \left(i = 0,1,\ldots,n; j = 0,1,\ldots,m\right).$$

З кожної точки P_{ij} проведемо півпряму у від'ємному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x,y) \in D$ визначимо точку $B\left(x, y, \chi(x,y)\right)$, де

$$\chi(x,y) = \sup_{(x,y,z) \in C(S).} z$$

Множина точок $B\left(x, y, \chi(x,y)\right)$, де $(x,y) \in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C(S)$ зверху. Ця поверхня є неперервною, вгнутою і її рівняння має вигляд

$$z = \chi(x,y)), \qquad (x,y) \in D.$$

Позначимо:

$$m_f(x,y) = \exp(-\chi(x,y)), \qquad (x,y) \in D.$$

Тоді для кожної точки $\left(x_i, y_j\right)$ $\left(i = 0,1,\ldots,n; j = 0,1,\ldots,m\right)$ виконується нерівність

$$m_f\left(x_i, y_j\right) \le | f(x_i, y_j) | = | z_{ij} | = a_{ij}.$$

Справді, з побудови δ_f випливає, що

$$-\ln a_{ij} \le \chi\left(x_i, y_j\right)$$

або

$$a_{ij} \ge \exp(-\chi\left(x_i, y_j\right)) = m_f\left(x_i, y_j\right).$$

Апроксимуючу функцію $m_f(x,y)$, $(x,y) \in D$, назвемо некласичною мінорантою Ньютона для функції $f(x,y)$, а δ_f – її діаграмою.

Нехай $m_f\left(x_i, y_j\right) = t_{ij}$, $\quad (i = 0,1,\ldots,n;\ j = 0,1,\ldots,m)$.

Величини

$$r_{ij}(x) = \left(\frac{t_{i-1,j}}{t_{ij}}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}} \qquad \left(i = 1,2,\ldots,n; j = 0,1,\ldots,m\right)$$

і

$$r_{ij}(y) = \left(\frac{t_{i,j-1}}{t_{ij}}\right)^{\frac{1}{y_j - y_{j-1}}} \qquad \left(j = 1,2,\ldots,m; i = 0,1,\ldots,n\right)$$

назвемо (i,j)-ми *числовими нахилами міноранти Ньютона* $m_f(x,y)$ відповідно в напрямі осей абсцис і ординат, а величини

$$d_{ij}(x) = \frac{r_{i+1,j}(x)}{r_{ij}(x)} \qquad \left(i = 1,2,\ldots,n-1; j = 0,1,\ldots,m; d_{0j} = d_{nj} = \infty\right)$$

і

$$d_{ij}(y) = \frac{r_{i,j+1}(y)}{r_{ij}(y)} \qquad \left(j = 1,2,\ldots,m-1; i = 0,1,\ldots,n; d_{i0} = d_{im} = \infty\right) \;-$$

(i,j)-ми *відхиленнями міноранти Ньютона* $m_f(x,y)$ відповідно в напрямі осей Ox і Oy.

Із вгнутості діаграми Ньютона δ_f випливають такі нерівності:

$$r_{ij}(x) \ge r_{i+1,j}(x), \quad (i = 0,1,\dots,n-1; j = 0,1,\dots,m);$$
$$r_{ij}(y) \ge r_{i,j+1}(y), \quad (i = 0,1,\dots,n; j = 0,1,\dots,m-1);$$
$$d_{ij}(x) \le 1, \quad (i = 1,2,\dots,n-1; j = 0,1,\dots,m);$$
$$d_{ij}(y) \le 1, \quad (i = 0,1,\dots,n; j = 1,2,\dots,m-1).$$

Алгоритм методу відшукання мінімуму логарифмічно опуклої функції. Нехай $f(x,y)$ – логарифмічно опукла функція, тоді $t_{ij} = a_{ij}$. Спочатку зауважимо, якщо для деякої точки $(x_k, y_l) \in D$ виконуються умови

$$r_{kl}(x) \ge 1, \quad r_{k+1,l}(x) < 1; \tag{1}$$

$$r_{kl}(y) \ge 1, \quad r_{k,l+1}(y) < 1, \tag{2}$$

то точка (x_k, y_l) з точністю $\varepsilon = \max(s,h)$ є точкою екстремуму функції $f(x,y)$.

Якщо умова (1) не виконується, то

$$r_{kl}(x) > 1, \quad r_{k+1,l}(x) \ge 1 \ , \tag{3}$$

або

$$r_{kl}(x) \le 1, \quad r_{k+1,l}(x) < 1; \tag{4}$$

за невиконання умови (2)

$$r_{kl}(y) > 1, \quad r_{k,l+1}(y) \ge 1, \tag{5}$$

або

$$r_{kl}(y) \le 1, \quad r_{k,l+1}(y) < 1. \tag{6}$$

Вибравши за початкове наближення екстремальної точки будь-яку точку $(x_k, y_l) \in D$, одержимо такий алгоритм методу.

1. Якщо для точки (x_k, y_l) виконуються умови (1), (2), то її з точністю $\varepsilon \le \max(s,h)$ приймаємо за оптимальну і на цьому робота алгоритму завершується.

2. Якщо для точки (x_k, y_l) не виконується умова (1), а тільки умова (2), то за умови (3) знаходимо найменше значення індекса $\mu \ge 1$, для якого $r_{k+\mu,l}(x) < 1$; за умови (4) – найменше значення індекса $\nu \ge 1$, для якого $r_{k-\nu,l}(x) \ge 1$. Знайшовши найближчу до (x_k, y_l) точку, для якої виконується умова (1) і позначивши її через (x_k, y_l), переходимо до пункту 1.

3. Якщо для точки (x_k, y_l) виконується умова (1), і не виконується умова (2), то за умови (5) знаходимо найменше значення індекса $\mu \ge 1$, для якого $r_{k,l+\mu}(y) < 1$; за умови (6) – найменше значення індекса $\nu \ge 1$, для якого $r_{k,l-\nu}(y) \ge 1$. Знайшовши найближчу до (x_k, y_l) точку, для якої виконується умова (2) і позначивши її через (x_k, y_l), переходимо до пункту 1.

4. Якщо для точки (x_k, y_l) умови (1), (2) не виконуються, то аналогічно, як у пункті 2, знаходимо найближчу до (x_k, y_l) точку, для якої вико-

нується умова (1). Позначивши цю точку через (x_k, y_l), аналогічно, як у пункті 3, знаходимо найближчу до неї точку, для якої виконується умова (2). Позначивши її через (x_k, y_l), переходимо до пункту 1.

Якщо з більшою точністю треба знайти екстремальну точку, то за область D беремо окіл знайденої точки, зменшуємо кроки h і s та виконуємо описаний алгоритм.

Оскільки за умови логарифмічно опуклої функції діаграма міноранти Ньютона неперервна і вгнута, коефіцієнти міноранти Ньютона збігаються з відповідними значеннями функції, а числові нахили вказують напрям спадання значень функції, то збіжність методу не залежить від початкового наближення.

Приклад 1. Розглянемо задачу мінімізації штрафної функції № 2, якщо n=2:

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 10^{-3}\left(x^2 + y^2 - 0.25\right)^2 \to \min.$$

Ця функція є строго опуклою.

Нехай h=s=0.001, $D = -1 \le x \le 2, -1 \le y \le 2$. Виберемо точку (0,5; 0,5) за початкову, отримаємо:

$(x_k, y_l) = (0{,}5;0{,}5)$; h=0,001; $r_{kl}(x)$=7,299; $r_{k+1,l}(x)$=7,262; $r_{kl}(y)$= 7,299; $r_{k,l+1}(y)$= 7,262.

Повторюючи кроки 1–4 алгоритму, перейдемо до точки (0,997; 0,997), для якої виконуються умови (1),(2). Послідовність ітерацій подано у таблиці 1.

Таблиця 1

№	(x_k, y_l)	h	$r_{kl}(x)$	$r_{k+1,l}(x)$	$r_{kl}(y)$	$r_{k,l+1}(y)$
1	(0,998; 0,997)	0,001	0,5285	0,27269	1,0227	0,52729
2	(0,997; 0,997)	0,001	1,0254	0,5285	1,0254	0,5285

Отже, з точністю 0,001 точку (0,997; 0,997) приймаємо за точку, де функція досягає свого мінімуму:

$$f(0{,}997;\ 0{,}997) = 0{,}0030387.$$

Приклад 2. Розглянемо задачу мінімізації строго опуклої функції:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 2xy - 5x + 10 \to \min.$$

Нехай h=s=0.01, $D = -2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2$. Виберемо точку (0; 0) за початкову, отримаємо:

$(x_k, y_l) = (0;0)$; h=0,01; $r_{kl}(x)$=1,6488; $r_{k+1,l}(x)$= 1,6486; $r_{kl}(y)$= 1,0003; $r_{k,l+1}(y)$= 0,9997.

Повторюючи кроки 1–4 алгоритму, перейдемо до точки (1,5; 0,5), для якої виконуються умови (1),(2). Послідовність ітерацій подано у таблиці 2.

Таблиця 2

№	(x_k, y_l)	h	$r_{kl}(x)$	$r_{k+1,l}(x)$	$r_{kl}(y)$	$r_{k,l+1}(y)$
1	2	3	4	5	6	7
1	(1,253; 0)	0,01	1,0019	0,9942	1,447	1,4328
2	(1,253; 0,413)	0,01	1,1413	1,1312	1,011	0,9979
3	(1,453; 0,413)	0,01	1,0281	1,0194	1,0107	0,9979

Продовження табл. 2

4	(1,453; 0,48)	0,01	1,0281	1,0194	1,0107	0,9979
5	(1,493; 0,48)	0,01	1,0021	0,9936	1,0237	1,0107
6	(1,493; 0,493)	0,01	1,0064	0,9979	1,0107	0,9979

Отже, з точністю 0,01 точку (1,5; 0,5) приймаємо за точку, де функція досягає свого мінімуму:

$$f(1{,}5;0{,}5)=6{,}25013.$$

Висновок. Побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для розробки нового числового методу відшукання екстремуму як гладких, так і негладких логарифмічно опуклих функцій двох дійсних змінних. Основна перевага методу над класичними методами оптимізації та їхніми модифікаціями полягає ось у чому:

- його збіжність не залежить від вибору початкового наближення;
- для роботи методу не треба знати, в якому околі знаходиться точка екстремуму;
- оптимізаційна функція може бути як гладкою, так і негладкою, розривною та дискретною;
- простота та наочність.

1. *Глебена М. І.* Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: Автор. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Івано-Франківськ, 2012. – 24 с.
2. *Глебена М. І., Г. Г Цегелик* Чисельний метод нульового порядку оптимізації негладких логарифмічно опуклих функцій / Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Математика та інформатика. – 2013. – Вип. 24, № 2. – С. 43–47.
3. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1974. – 374 с.
4. *Цегелик Г. Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190 с.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД МИНОРАНТНОГО ТИПА ОТЫСКАНИЯ ЭКСТРЕМУМА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ДЕЙСВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

С помощью аппарата неклассических минорант Ньютона и их диаграмм функций двух действительных переменных, заданных таблично, построен новый численный метод отыскания экстремума как гладких, так и негладких логарифмически выпуклых функций двух действительных переменных.

NUMERICAL METHOD OF MINORANT TYPE FOR FINDING EXTREMUM RANDOM LOGARITHMICALLY CONVEX FUNCTION OF TWO REAL VARIABLES

Using device of non-classic Newton's minorant and their graphs functions of two real table-like variables, constructed a new numerical method for finding extremum both smooth and non-smooth logarithmically convex functions of two real variables.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
23.05.14