УДК 517.98

В. Я. Лозинська[1], С. В. Шарин[2]

ПОЛІНОМІАЛЬНІ ω-УЛЬТРАРОЗПОДІЛИ ТИПУ БЕРЛІНГА І ТИПУ РУМ'Є

Побудовано поліноміальний аналог ω-ультрарозподілів типу Берлінга і типу Рум'є. Описано узагальнену операцію диференціювання та групу зсувів у просторі поліноміальних ω-ультрарозподілів.

Вступ. Теорія лінійних неперервних функціоналів давно стала одним із інструментів для моделювання та розв'язання багатьох задач математичної фізики. Недоліком цієї теорії є відсутність алгебричної структури на просторі всіх узагальнених функцій. Сучасний стан досліджень у деяких галузях науки все частіше вимагає нелінійного узагальнення поняття розподілу. Крім того, алгебри розподілів та ультрарозподілів з тензорною операцією множення використовують, наприклад, у квантовій теорії поля [3]. Дослідженням у цьому напрямку, зокрема вивченню алгебр поліноміальних розподілів та поліноміальних ультрарозподілів, присвячені праці [2, 6, 9, 10].

Нехай $D'_{(\omega)}(\Omega)$, $D'_{\{\omega\}}(\Omega)$ – простори ω-ультрарозподілів на відкритій множині $\Omega \subset \mathbb{R}$ типу Берлінга і Рум'є відповідно, які позначаємо одним символом D'_*. Будуємо простір $P(D'_*)$ неперервних поліномів на просторі D'_*, а також сильно спряжений до нього простір $P'(D'_*)$. Елементи простору $P'(D'_*)$ називаємо поліноміальними ω-ультрарозподілами. Їх можна розуміти як поліноміальне узагальнення лінійних ω-ультрарозподілів, оскільки $D'_* \subset P'(D'_*)$. Простори $P(D'_*)$ та $P'(D'_*)$ мають з точністю до топологічного ізоморфізму тензорну структуру (теорема 1). Користуючись таким поданням, вводимо на цих просторах алгебричні операції (теорема 2), оператор диференціювання (теореми 3 та 4), узагальнюємо групу зсувів та показуємо, що її генератором є введений оператор диференціювання (теорема 6).

Попередні відомості і позначення. *Поліноми на локально опуклих просторах.* Нехай X, Y – локально опуклі комплексні векторні простори. Простір всіх лінійних неперервних операторів з X в Y позначимо $\mathcal{L}(X,Y)$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. Для простоти писатимемо $\mathcal{L}(X)$ замість $\mathcal{L}(X,X)$.

Для довільного локально опуклого простору X сильно спряжений простір завжди позначатимемо X'. Дію функціонала $f \in X'$ на елемент $x \in X$ записуватимемо як $\langle f, x\rangle$.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ простір всіх n-лінійних неперервних функціоналів на X позначимо $\mathcal{L}(^nX,\mathbb{C}) := \mathcal{L}(X\times\ldots\times X,\mathbb{C})$. Функціонал $F \in \mathcal{L}(^nX,\mathbb{C})$ називають симетричним, якщо $F(x_1,\ldots,x_n) = F(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$, де σ – довільна перестановка множини $\{1,\ldots,n\}$. Простір всіх симетричних n-лінійних неперервних функціоналів позначимо $\mathcal{L}_s(^nX,\mathbb{C})$.

Визначимо діагональне відображення $\Delta_n : X \ni x \mapsto (x_1,\ldots,x_n) \in X\times\ldots\times X$. Відображення P називають неперервним n-однорідним поліномом, якщо знайдеться таке $F \in \mathcal{L}_s(^nX,\mathbb{C})$, що $P(x) = F(\Delta_n(x))$. Простір усіх неперервних n-однорідних поліномів позначимо $P_n(X)$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. За означенням приймемо $P_0(X) := \mathbb{C}$.

Для n-го (симетричного) тензорного степеня простору X використовуватимемо позначення $\otimes^n X$ (відповідно $\otimes_s^n X$), $n \in \mathbb{N}$. За означенням приймемо $\otimes^0 X = \otimes_s^0 X := \mathbb{C}$. Поповнення тензорного добутку $\otimes$ (симетричного тензорного добутку $\otimes_s$) у проективній локально опуклій топології позначатимемо $\otimes_p$ (відповідно $\otimes_{s,p}$).

Для означення простору $P_n(X)$ можна використати лінійні топологічні ізоморфізми $P_n(X) \cong L_s({}^n X, \mathbb{C}) \cong (\otimes_{s,p}^n X)'$, описані раніше [5]. Розглянемо природне вкладення

$$\otimes_n : X \times \ldots \times X \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \otimes_p^n X.$$

Ізоморфізм $\left(\otimes_{s,p}^n X\right)' \ni p_n \mapsto P_n := p_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in P_n(X)$ однозначно визначає n-однорідний поліном як композицію

$$P_n(X) = \left\langle p_n, \otimes^n x \right\rangle, \text{ де } \otimes^n x := x \otimes \ldots \otimes x = (\otimes_n \circ \Delta_n)x, \quad x \in X.$$

Простір всіх скінченних сум $P(X) = \left\{ P = \sum_{n=0}^{m} P_n : P_n \in P_n(X), m \in \mathbb{N} \right\}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X, називають *простором неперервних поліномів* на X.

Символами $P'(X)$, $P_n'(X)$ позначатимемо сильно спряжені простори до $P(X)$, $P_n(X)$ відповідно. Аналогічні простори поліномів $P(X')$, $P_n(X')$ і сильно спряжених до них просторів $P'(X')$, $P_n'(X')$ вважаємо визначеними для простору X'.

Простір $P(X)$ є топологічною алгеброю з одиницею і множенням $P(x) \cdot Q(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} P_m(x) \cdot Q_{n-m}(x)$. Якщо X неперервно і щільно вкладається в X', то правильним є неперервне щільне вкладення $P(X') \hookrightarrow P'(X')$ (див. [10]). Тому множення алгебри $P(X')$ можна єдиним чином продовжити до множення в алгебрі $P'(X')$.

Символом $\bigtimes_{n \in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n X$ позначимо декартовий локально опуклий добуток, символом $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n X$ – пряму локально опуклу суму симетричних тензорних степенів $\otimes_{s,p}^n X$ простору X; аналогічні позначення для простору X'. Зауважимо, що елементи прямої суми містять лише скінченну кількість доданків.

Якщо X є ядерним (F) або (DF) локально опуклим простором (див. [1, 7]), то простори $\otimes_{s,p}^n X'$ і $(\otimes_{s,p}^n X)'$ – топологічно ізоморфні.

Ультрадиференційовні функції і ω-ультрарозподіли. Нехай $v(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – така неперервна зростальна функція, що $v|_{[0,1]} \equiv 0$. Функцію $\omega(t) := v(|t|)$ назвемо ваговою, якщо вона задовольняє такі умови (див. [4, 8]):

(α) існує таке $L \geq 1$, що $\omega(2t) \leq L(1 + \omega(t))$ для всіх $t \geq 0$,

(β) $\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt < \infty$, (γ) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\ln(1+t)}{\omega(t)}=0$,

(δ) функція $[0,\infty)\ni t\mapsto\omega(e^t)\in[0,\infty)$ є опуклою.

Зауважимо, що будь-яка вагова функція ω є парною і для всіх $t,s\in\mathbb{R}$ задовольняє нерівність (див. [4])

$$\omega(t+s)\le L(1+\omega(t)+\omega(s)). \tag{1}$$

Нехай ω – вагова функція і $K\subset\mathbb{R}$ – компактна множина. Для довільного $\lambda>0$ визначимо банаховий простір

$$D_\lambda(K)=\left\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}):\operatorname{supp}\varphi\subset K,\|\varphi\|_\lambda:=\int_{\mathbb{R}}|\hat{\varphi}(t)|\,e^{\lambda\omega(t)}dt<\infty\right\}, \tag{2}$$

де $\hat{\varphi}(t):=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)e^{-ixt}dx$ – перетворення Фур'є функції φ.

Розглянемо простір $D_{\{\omega\}}(K):=\lim\limits_{\lambda\to 0} ind\, D_\lambda(K)$, наділений топологією індуктивної границі, та простір $D_{(\omega)}(K):=\lim\limits_{\lambda\to\infty} pr\, D_\lambda(K)$, наділений топологією проективної границі. Для відкритої множини $\Omega\subset\mathbb{R}$ визначимо:

$$D_{\{\omega\}}(\Omega):=\lim_{K} ind\, D_{\{\omega\}}(K)\ \text{ і }\ D_{(\omega)}(\Omega):=\lim_{K} ind\, D_{(\omega)}(K),$$

де індуктивні границі беруть по всіх компактних підмножинах Ω. Простори $D_{\{\omega\}}(\Omega)$ і $D_{(\omega)}(\Omega)$ наділимо відповідними топологіями індуктивної границі.

Елементи простору $D_{(\omega)}(\Omega)$ (відповідно $D_{\{\omega\}}(\Omega)$) називають основними ультрадиференційовними функціями типу Берлінга (відповідно типу Рум'є). Надалі для скорочення записів обидва простори $D_{(\omega)}:=D_{(\omega)}(\Omega)$ і $D_{\{\omega\}}:=D_{\{\omega\}}(\Omega)$ позначатимемо одним символом D_*, маючи на увазі, що $*$ може набувати значень (ω) або $\{\omega\}$.

Твердження 1 ([4]). *Нехай $K\subset\mathbb{R}$ – компактна множина. Тоді*
(1) простір $D_{\{\omega\}}(K)$ є ядерним (DF) простором, зокрема, він повний і рефлексивний;
(2) простір $D_{(\omega)}(K)$ є ядерним простором Фреше.

Твердження 2 ([4]). *Нехай ω і σ – такі вагові функції, що $\sigma=o(\omega)$. Тоді вкладення*

$$D_{(\omega)}(\Omega)\hookrightarrow D_{\{\omega\}}(\Omega)\hookrightarrow D_{(\sigma)}(\Omega)\hookrightarrow D(\Omega)$$

є неперервними і секвенційно щільними для кожної відкритої множини $\Omega\subset\mathbb{R}$, де $D(\Omega)$ – простір основних функцій Шварца [7].

Нехай D'_* – сильно спряжений простір до D_*. Елементи простору $D'_{(\omega)}(\Omega)$ називатимемо ω-ультрарозподілами типу Берлінга, елементи $D'_{\{\omega\}}(\Omega)$ – ω-ультрарозподілами типу Рум'є.

Поліноміальні ω-ультрарозподіли типу Берлінга і типу Рум'є. У працях [9, 10] побудовано поліноміальне розширення ультрарозподілів з носіями на півосі $[0,+\infty)$ та в конусі $\mathbb{R}^d_+$ відповідно. Побудуємо поліноміальні розширення ω-ультрарозподілів типу Берлінга і типу Рум'є. З тверджень 1 та 2 випливає, що для $X=D'_*$ можна застосувати абстрактну теорію, розвинуту раніше [10], і, як наслідок, отримати такі теореми, які наведемо без доведень.

Теорема 1. *Справджуються такі лінійні топологічні ізоморфізми:*

$$\otimes^n_{s,p}D'_*\simeq P_n(D_*),\quad \otimes^n_{s,p}D_*\simeq P_n(D'_*),\quad \mathop{\times}_{n\in\mathbf{Z}_+}\otimes^n_{s,p}D'_*\simeq P'(D'_*),\quad \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+}\otimes^n_{s,p}D_*\simeq P(D'_*).$$

Елементи простору $P(D'_*)$ (відповідно $P'(D'_*)$) назвемо поліноміальними основними функціями (відповідно поліноміальними ω-ультрарозподілами) типу Берлінга, якщо $* = (\omega)$, і типу Рум'є, якщо $* = \{\omega\}$. Надалі, враховуючи ізоморфізми з теореми 1, поліноміальні основні функції та поліноміальні ω-ультрарозподіли записуватимемо у вигляді $\bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} p_n := (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m, 0, \ldots)$ для деякого $m \in \mathbb{Z}_+$ та $\bigtimes\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} x_n := (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ відповідно, де $p_n \in \otimes^n_{s,p} D_*$, $x_n \in \otimes^n_{s,p} D'_*$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 2. *(i) Пряма сума* $\bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_*$ *є локально опуклою алгеброю відносно операції* $p \circledast q := \bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \left(\sum\limits_{m=0}^{n} p_m \otimes_s q_{n-m} \right)$, *де* $p := \bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} p_n$, $q := \bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} q_n$.

(ii) Декартів добуток $\bigtimes\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D'_*$ *є локально опуклою алгеброю відносно операції* $x \circledast y := \bigtimes\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \left(\sum\limits_{m=0}^{n} x_m \otimes_s y_{n-m} \right)$, *де* $x := \bigtimes\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} x_n$, $y := \bigtimes\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} y_n$.

(iii) Відображення $\left\{ \bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_*, \circledast \right\} \to \{P(D'_*), \cdot\}$ *та* $\left\{ \bigtimes\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D'_*, \circledast \right\} \to \{P'(D'_*), \cdot\}$ *з теореми 1 є ізоморфізмами відповідних алгебр.*

У просторі $\mathcal{L}\left(\bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_* \right)$ лінійних неперервних операторів розглянемо підалгебру операторів $\mathcal{L}_\Gamma\left(\bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_* \right)$, які залишають простори $\otimes^n_{s,p} D_*$ інваріантними, тобто

$$\mathcal{L}_\Gamma\left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_* \right) := \begin{pmatrix} \mathcal{L}\left(\otimes^0_{s,p} D_*\right) & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \mathcal{L}\left(\otimes^1_{s,p} D_*\right) & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathcal{L}\left(\otimes^n_{s,p} D_*\right) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Аналогічний сенс має позначення $\mathcal{L}_\Gamma\left(\bigtimes\limits_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D'_* \right)$.

Диференціювання на просторах поліноміальних ω-ультрарозподілів типу Берлінга і типу Рум'є. З означення просторів $D_{\{\omega\}}(\Omega)$ і $D_{(\omega)}(\Omega)$ випливає, що для довільної функції $\varphi \in D_{\{\omega\}}(\Omega)$ (відповідно $\varphi \in D_{(\omega)}(\Omega)$) знайдеться такий компакт $K \subset \mathbb{R}$, що $\varphi \in D_{\{\omega\}}(K)$ (відповідно $\varphi \in D_{(\omega)}(K)$); при цьому для деякого $\lambda > 0$ (відповідно для всіх $\lambda > 0$) справджується нерівність $\|\varphi\|_\lambda < \infty$ (див. ф-лу (2)).

Нехай D – оператор диференціювання на просторі основних (лінійних) ультрадиференційовних функцій D_*. Лінійність цього оператора очевидна. Покажемо його неперервність. З нерівності (1) та умови (γ) для вагової функції ω випливає:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln|t|}{\lambda\omega(t)} + 1 \right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln|t|}{\omega(t-1)} \cdot \frac{\omega(t-1)}{\lambda\,\omega(t)} + 1 \right) \le \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln|t|}{\omega(t-1)} \cdot \frac{1+\omega(t)}{\lambda\omega(t)} + 1 \right) = 1.$$

Тому знайдеться така константа $C > 1$, що $\dfrac{\ln|t|}{\lambda\omega(t)} + 1 < C$ при $|t| > 1$. З нерівностей

$$\|\mathrm{D}\varphi\|_\lambda := \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(t)|\,|it|\,e^{\lambda\omega(t)}dt = \int_{-1}^{1} |\hat{\varphi}(t)|\,|it|\,e^{\lambda\omega(t)}dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\hat{\varphi}(t)|\,|it|\,e^{\lambda\omega(t)}dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{1} |\hat{\varphi}(t)|\,e^{C\lambda\omega(t)}dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\hat{\varphi}(t)|\,e^{\ln|t| + \lambda\omega(t)}dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} |\hat{\varphi}(t)|\,e^{C\lambda\omega(t)}dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\hat{\varphi}(t)|\,e^{\lambda\omega(t)\left(\frac{\ln|t|}{\lambda\omega(t)}+1\right)}dt \le$$

$$\le \int_{-1}^{1} |\hat{\varphi}(t)|\,e^{C\lambda\omega(t)}dt + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |\hat{\varphi}(t)|\,e^{C\lambda\omega(t)}dt = \|\varphi\|_{C\lambda}$$

випливає неперервність оператора диференціювання D у просторі D_*.

Система функцій

$$\otimes^n \varphi : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \varphi(t_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(t_n), \tag{3}$$

де $\varphi \in D_*$, є тотальною підмножиною у просторі $\otimes_{s,p}^n D_*$. Кожен елемент простору $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*$ можна апроксимувати лінійною комбінацією елементів вигляду (3). Тому коректним є таке означення.

На просторі $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*$ визначимо оператор ∂, що на довільний елемент вигляду $p := \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n \varphi$, де $\otimes^n\varphi \in \otimes_{s,p}^n D_*$, $\varphi \in D_*$, діє за правилом

$$\partial p = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \partial_n[\otimes^n \varphi], \text{ де } \partial_0[\otimes^0\varphi] = 0,\ \partial_n[\otimes^n\varphi] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi\otimes \mathrm{D}(\varphi)}_{j}\otimes\underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi}_{n-j}.$$

Очевидно, що оператор ∂ належить підалгебрі $\mathcal{L}_\Gamma\left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*\right)$.

Теорема 3. *Оператор ∂ є неперервним диференціюванням на алгебрі* $\left\{\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*, \text{å}\right\}$, *тобто*

$$\partial(p \,\text{å}\, q) = \partial p \,\text{å}\, q + p \,\text{å}\, \partial q \tag{4}$$

для довільних $p, q \in \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*$.

Доведення. Нехай $p = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n \varphi$ і $q = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n \psi$, $p, q \in \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*$, $\varphi, \psi \in D_*$. Тоді з теореми 2 випливає:

$$p \,\text{å}\, q = \left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n \varphi\right) \text{å} \left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n \psi\right) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+}\left(\sum_{m=0}^{n} (\otimes^m \varphi) \otimes_s (\otimes^{n-m}\psi)\right).$$

Для спрощення через ∂_n^j позначимо оператор, що на довільний елемент вигляду $\otimes^n\varphi \in \otimes_{s,p}^n D_*$ діє за правилом

$$\partial_n^j[\otimes^n\varphi] := \underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi\otimes \mathrm{D}(\varphi)}_{j}\otimes\underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi}_{n-j},\quad n, j \in \mathbb{N},\ j \le n. \tag{5}$$

Далі безпосередньо переконуємось у правильності рівності (4):

$$\partial(p \,\text{å}\, q) = \bigoplus_{n\in \text{¥}} \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial_n^j \left[(\otimes^m \varphi) \otimes_s (\otimes^{n-m} \psi)\right] =$$

$$= \bigoplus_{n\in \text{¥}} \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \partial_m^j [\otimes^m \varphi] \otimes_s (\otimes^{n-m} \psi) + \sum_{j=1}^{n-m} (\otimes^m \varphi) \otimes_s \partial_{n-m}^j [\otimes^{n-m} \psi] \right) =$$

$$= \bigoplus_{n\in \text{¥}} \sum_{m=0}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{m} \partial_m^j [\otimes^m \varphi] \right) \otimes_s \left(\otimes^{n-m} \psi\right) \right) +$$

$$+ \bigoplus_{n\in \text{¥}} \sum_{m=0}^{n} \left((\otimes^m \varphi) \otimes_s \left(\sum_{j=1}^{n-m} \partial_{n-m}^j [\otimes^{n-m} \psi] \right) \right) = \partial p \,\text{å}\, q + p \,\text{å}\, \partial q.$$

◊

На просторі $\bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D'_*$ визначимо оператор ∂', що на довільний елемент вигляду $x := \bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes^n f$, де $\otimes^n f \in \otimes_{s,p}^n D'_*$, $f \in D'_*$, діє за правилом

$$\partial' x = \bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \partial'_n [\otimes^n f], \text{ де } \partial'_0[\otimes^0 f] = 0,\ \partial'_n[\otimes^n f] = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f \otimes \ldots \otimes f \otimes \mathrm{D}'(f)}_{j} \otimes \underbrace{f \otimes \ldots \otimes f}_{n-j},$$

де D' – оператор узагальненого диференціювання. Очевидно, що оператор ∂' належить підалгебрі $L_{\Gamma}\left(\bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D'_* \right)$.

Теорема 4. *Оператор* ∂' *є неперервним диференціюванням на алгебрі* $\left\{ \bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D'_*, \text{å} \right\}$, *тобто*

$$\partial'(x \,\text{å}\, y) = \partial' x \,\text{å}\, y + x \,\text{å}\, \partial' y \tag{6}$$

для довільних $x, y \in \bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D'_*$.

Для доведення рівності (6) слід повторити аналогічні міркування, як у теоремі 3.

У теорії лінійних ω-ультрарозподілів операція диференціювання D на просторі основних ультрадиференційовних функцій D_* однозначно визначає оператор узагальненого диференціювання D' на просторі ω-ультрарозподілів D'_* як спряжений оператор. З теореми 1 випливає, що $\left\langle \bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D'_*, \bigoplus_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_* \right\rangle$ – дуальна пара. Вище означили оператор ∂' на просторі $\bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D'_*$ та оператор ∂ на просторі $\bigoplus_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*$. Покажемо, що оператори ∂' та ∂ є взаємно спряжені відносно цієї дуальності.

Теорема 5. *Оператори* ∂' *і* ∂ *задовольняють дуальне співвідношення*

$$\langle \partial' x, p \rangle = -\langle x, \partial p \rangle, \text{ для всіх } x \in \bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D'_* \text{ та } p \in \bigoplus_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*.$$

Доведення. Теорему достатньо довести для елементів вигляду $x := \bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes^n f$ з простору $\bigtimes_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D'_*$ та $p := \bigoplus_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes^n \varphi$ з простору $\bigoplus_{n\in \mathbf{Z}_+} \otimes_{s,p}^n D_*$, де $f \in D'_*$, $\varphi \in D_*$. Потрібне дуальне співвідношення випливає з таких рівностей:

$$\langle \partial' x, p\rangle = \Big\langle \mathop{\times}_{n\in\mathbf{Z}_+} \partial'_n[\otimes^n f], \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n \varphi \Big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big\langle \partial'_n[\otimes^n f], \otimes^n \varphi\big\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f\otimes\ldots\otimes f\otimes \mathrm{D}'(f)}_{j}\otimes \underbrace{f\otimes\ldots\otimes f}_{n-j}, \otimes^n\varphi \Big\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \underbrace{f\otimes\ldots\otimes f\otimes \mathrm{D}'(f)}_{j}\otimes \underbrace{f\otimes\ldots\otimes f}_{n-j}, \otimes^n\varphi \Big\rangle =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \langle f,\varphi\rangle^{n-1} \langle \mathrm{D}'(f),\varphi\rangle = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \langle f,\varphi\rangle^{n-1} \langle f, \mathrm{D}(\varphi)\rangle =$$

$$= -\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \Big\langle \otimes^n f, \underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi\otimes \mathrm{D}(\varphi)}_{j}\otimes \underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi}_{n-j} \Big\rangle =$$

$$= -\sum_{n\in\mathbb{N}} \Big\langle \otimes^n f, \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi\otimes \mathrm{D}(\varphi)}_{j}\otimes \underbrace{\varphi\otimes\ldots\otimes\varphi}_{n-j} \Big\rangle =$$

$$= -\sum_{n\in\mathbb{N}} \big\langle \otimes^n f, \partial_n[\otimes^n\varphi]\big\rangle = -\Big\langle \mathop{\times}_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n f, \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \partial_n[\otimes^n\varphi]\Big\rangle = -\langle x, \partial p\rangle.$$

◊

Групи зсувів на просторах поліноміальних ω-ультрарозподілів типу Берлінга і типу Рум'є. На просторі D_* визначимо оператор зсуву $T_s : \varphi(\cdot) \mapsto \varphi(\cdot - s)$ для кожного $s\in\mathbb{R}$. Нехай T'_s – спряжений оператор до T_s відносно дуальної пари $\langle D'_*, D_*\rangle$.

Зауважимо, що перетворення Фур'є володіє властивістю $\widehat{T_s\varphi}(t) = e^{-ist}\widehat{\varphi}(t)$. Тепер неперервність оператора зсуву для кожного $s\in\mathbb{R}$ випливає з рівностей

$$\| T_s\varphi\|_\lambda = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{T_s\varphi}(t)|\, e^{\lambda\omega(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} | e^{-ist}\widehat{\varphi}(t)|\, e^{\lambda\omega(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(t)|\, e^{\lambda\omega(t)}dt = \|\varphi\|_\lambda .$$

Нехай $1_{\mathbb{C}} \in \mathrm{L}(\mathbb{C})$ – оператор множення на $1\in\mathbb{C}$. Для кожного $s\in\mathbb{R}$ визначимо оператори $\Gamma(T_s)\in \mathrm{L}\Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_*\Big)$ та $\Gamma(T'_s)\in \mathrm{L}\Big(\mathop{\times}_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D'_*\Big)$ так:

$$\Gamma(T_s) := \mathop{\times}_{n\in\mathbf{Z}_+} T_s^{\otimes n} : q = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} q_n \mapsto \Gamma(T_s)q := \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} T_s^{\otimes n} q_n ,$$

$$\Gamma(T'_s) := \mathop{\times}_{n\in\mathbf{Z}_+} T_s'^{\otimes n} : x = \mathop{\times}_{n\in\mathbf{Z}_+} x_n \mapsto \Gamma(T'_s)x := \mathop{\times}_{n\in\mathbf{Z}_+} T_s'^{\otimes n} x_n ,$$

де $q_n \in \otimes^n_{s,p} D_*$, $x_n \in \otimes^n_{s,p} D'_*$, $T_s^{\otimes 0} := 1_{\mathbb{C}}$, $T_s'^{\otimes 0} := 1_{\mathbb{C}}$, а кожен оператор $T_s^{\otimes n} \in \mathrm{L}\big(\otimes^n_{s,p} D_*\big)$ $\big($відповідно $T_s'^{\otimes n} \in \mathrm{L}\big(\otimes^n_{s,p} D'_*\big)\big)$, $n\in\mathbb{N}$, визначимо як лінійне та неперервне розширення відображення $\varphi_1 \otimes_s \ldots \otimes_s \varphi_n \mapsto T_s\varphi_1 \otimes_s \ldots \otimes_s T_s\varphi_n$, де $\varphi_i \in D_*$, $i = 1,\ldots,n$ (відповідно відображення $f_1 \otimes_s \ldots \otimes_s f_n \mapsto T'_s f_1 \otimes_s \ldots \otimes_s T'_s f_n$, де $f_i \in D'_*$, $i = 1,\ldots,n$). Оператори $\Gamma(T_s)$ та $\Gamma(T'_s)$ часто називають другим квантуванням операторів T_s та T'_s відповідно.

Теорема 6. *(i) Однопараметрична сім'я лінійних операторів* $\{\Gamma(T_s) : s\in \mathbb{R}\}$ *є* (C_0)*-групою неперервних автоморфізмів алгебри* $\left\{\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_*, \circledast\right\}$. *Генератором цієї групи є оператор диференціювання* ∂.

(ii) Однопараметрична сім'я лінійних операторів $\{\Gamma(T'_s) : s\in \mathbb{R}\}$ *є* (C_0)*-групою неперервних автоморфізмів алгебри* $\left\{\bigtimes_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D'_*, \circledast\right\}$. *Генератором цієї групи є оператор диференціювання* ∂'.

Доведення. Доведемо, що для кожного $s\in\mathbb{R}$ оператор $\Gamma(T_s)$ є неперервним автоморфізмом. Очевидно, що $T_s^{\otimes 0}(p_0\otimes_s q_0) = p_0\cdot q_0 = T_s^{\otimes 0}p_0\otimes_s T_s^{\otimes 0}q_0$ для всіх $p_0, q_0\in\otimes^n_{s,p}D_* = \mathbb{C}$. З означення оператора $T_s^{\otimes n}$, $n\in\mathbb{N}$, випливає, що для довільних елементарних тензорів і для кожного $m\in\mathbb{N}$, $m\le n$, справджується рівність

$$T_s^{\otimes n}(\varphi_1\otimes_s \dots\otimes_s \varphi_n) = T_s\varphi_1\otimes_s\dots\otimes_s T_s\varphi_n =$$
$$= (T_s\varphi_1\otimes_s\dots\otimes_s T_s\varphi_m)\otimes_s (T_s\varphi_{m+1}\otimes_s\dots\otimes_s T_s\varphi_n) =$$
$$= T_s^{\otimes m}(\varphi_1\otimes_s\dots\otimes_s\varphi_m)\otimes_s T_s^{\otimes n-m}(\varphi_{m+1}\otimes_s\dots\otimes_s\varphi_n).$$

Звідси отримуємо:

$$\Gamma(T_s)(p\circledast q) = \Gamma(T_s)\left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+}\left(\sum_{m=0}^n p_m\otimes_s q_{n-m}\right)\right) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+}\left(\sum_{m=0}^n T_s^{\otimes n}(p_m\otimes_s q_{n-m})\right) =$$
$$= \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+}\left(\sum_{m=0}^n \left(T_s^{\otimes m}p_m\otimes_s T_s^{\otimes n-m}q_{n-m}\right)\right) = \Gamma(T_s)p\circledast\Gamma(T_s)q,$$

де елементи $p := \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} p_n$, $q := \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} q_n$, $p_n := \otimes^n\varphi$, $q_n := \otimes^n\psi$, $\varphi,\psi\in D_*$, утворюють тотальну підмножину в просторі $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+}\otimes^n_{s,p} D_*$. Отже, $\Gamma(T_s)$ – неперервний автоморфізм алгебри $\left\{\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+}\otimes^n_{s,p} D_*, \circledast\right\}$.

Для кожного n розглянемо групу $T_s^{\otimes n}$ на тотальній підмножині $\{\otimes^n\varphi : \varphi\in D_*\}$ у просторі $\otimes^n_{s,p}D_*$. Використовуючи (C_0) властивість групи T_s, легко довести цю ж властивість для групи $T_s^{\otimes n}$. Остаточно, сильна неперервність групи $\Gamma(T_s)$ випливає із властивостей топології прямої суми.

Знайдемо генератор групи $T_s^{\otimes n}$. Для кожного фіксованого $\otimes^n\varphi$, $\varphi\in D_*$, маємо:

$$\frac{d}{ds}\left[(\otimes^n T_s)(\otimes^n\varphi)\right]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[T_s\varphi\otimes_s\dots\otimes_s T_s\varphi\right]\Big|_{s=0} =$$
$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{T_s\varphi\otimes_s\dots\otimes_s T_s\varphi\otimes_s \frac{d}{ds}T_s\varphi}_{j}\otimes_s\underbrace{T_s\varphi\otimes_s\dots\otimes_s T_s\varphi}_{n-j}\Bigg|_{s=0} =$$
$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{\varphi\otimes_s\dots\otimes_s\varphi\otimes_s D(\varphi)}_{j}\otimes_s\underbrace{\varphi\otimes_s\dots\otimes_s\varphi}_{n-j} = \sum_{j=1}^n \partial_n^j[\otimes^n\varphi],$$

де оператор ∂_n^j визначений рівністю (5). Вище показали, що операція диференціювання D є лінійною і неперервною у просторі D_*. Тому оператор $\otimes^{j-1} I_{D_*} \otimes \mathrm{D} \otimes^{n-j} I_{D_*}$, де I_{D_*} – тотожний оператор в $\mathrm{L}(D_*)$, належить простору $\mathrm{L}\left(\otimes^n_{s,p} D_*\right)$. Для завершення доведення пункту (i) залишилось використати те, що кожен елемент простору $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_*$ можна апроксимувати лінійною комбінацією елементів (3).

Використовуючи теорію двоїстості і дуальність $\left\langle \bigtimes_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D'_*, \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}_+} \otimes^n_{s,p} D_* \right\rangle$, легко провести аналогічні міркування для доведення пункту (ii).

◊

1. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.
2. *Шарин С. В.* Поліноміальні повільно зростаючі узагальнені функції // Карпатські мат. публікації. – 2010. – 2, № 2. – С. 123–132.
3. *Borchers H.* Algebras of unbounded operators in quantum fields theory. // Physica. – 1988. – 124A. – P. 1–127.
4. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results in Math. – 1990. – 17. – P. 206–237.
5. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. – New York, Springer-Verlag: Monographs in Mathematics, 1999. – 543 p.
6. *Grasela K.* Generalized derivations and Fourier transform of polynomial ultradistributions // Mat. Stud. – 2003. – 20, № 2. – P. 167–178.
7. *Komatsu H.* An Introduction to the Theory of Generalized Functions. – Tokyo: Tokyo University Publ., 2000. – 185 p.
8. *Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for ultradifferentable fuctions of Beurling type // Ark. Mat. – 1988. – 26. – P. 265–287.
9. *Lopushansky O.* Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation // Banach Center Publ. IM PAN. – 2010. – 88. – P. 195–209.
10. *Lopushansky O., Sharyn S.* Polynomial ultradistributions on $¡^d_+$ // Topology. – 2009. – 48. – P. 80–90.

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ω-УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА БЕРЛИНГА И ТИПА РУМЬЕ

Построен полиномиальный аналог ω-ультрараспределений типа Берлинга и типа Румье. Рассмотрена обобщенная операция дифференцирования и группа сдвигов в пространстве полиномиальных ω-ультрараспределений.

POLYNOMIAL ω-ULTRADISTRIBUTIONS OF BEURLING AND ROUMIEU TYPE

In the article a polynomial analogue of ω-ultradistributions of Beurling and Roumieu type is constructed. Generalized operation of differentiation as well as a group of shifts in the space of polynomial ω-ultradistributions are considered.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

[2] Прикарпатський нац. ун-т
імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
23.09.13