УДК 512.64+512.55

Н. С. Джалюк, В. М. Петричкович

АБСОЛЮТНА РОЗКЛАДНІСТЬ НА МНОЖНИКИ У КІЛЬЦЯХ КЛІТКОВО-ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

Введено поняття абсолютної розкладності матриць на множники у кільцях клітково-трикутних матриць над комутативними областями головних ідеалів. Вказано умови абсолютної розкладності клітково-трикутних матриць і виділено класи матриць з такою властивістю. Наведено формулу для обчислення максимальної кількості класів неасоційованих розкладів на множники у таких кільцях матриць та кількості неасоційованих розкладів для певних клітково-трикутних матриць.

Нехай R – комутативна область головних ідеалів, $M(n,R)$ та $M(m,n,R)$ – відповідно кільце $n\times n$ та множина $m\times n$ матриць над R.

Нехай визначник $\Delta=\det A$ неособливої матриці $A\in M(n,R)$ розкладений на множники вигляду $\Delta=\varphi\psi$. Нагадаємо, що розклад $A=BC$ матриці A на множники такий, що $\det B=\varphi$, $\det C=\psi$, називають паралельним до розкладу $\Delta=\varphi\psi$ її визначника або Δ-паралельним розкладом матриці A.

Поняття абсолютно розкладних матриць вперше вжито для матриць над поліноміальними кільцями $R=P[\lambda]$, де P – поле [4–6]. Для таких матриць важливо виділити регулярні, зокрема унітальні, дільники, з огляду на їх різноманітні прикладні застосування. Тому абсолютно розкладними називають такі поліноміальні матриці, для кожного розкладу $\Delta(\lambda)=\varphi_1(\lambda)\ldots\varphi_k(\lambda)$ характеристичних поліномів $\Delta(\lambda)=\det A(\lambda)$ яких існують їх Δ-паралельні розклади $A(\lambda)=B_1(\lambda)\ldots B_k(\lambda)$, де $\det B_i(\lambda)=\varphi_i(\lambda)$ та $B_i(\lambda)$ – регулярні матриці, $i=1,\ldots,k$. Умови абсолютної виділеності лінійних унітальних дільників поліноміальних матриць встановлені у праці [4]. Згодом знайдено умови абсолютної розкладності поліноміальних матриць і встановлені нижня та верхня межі для кількості лінійних унітальних дільників регулярних поліноміальних матриць із характеристичними коренями кратності один [7, 11] і не більше два [8], а також межі для кількості їх Δ-паралельних розкладів [6, 9]. Встановлена також кліткова структура поліноміальних матриць залежно від кількості їх розкладів, тобто їх звідність чи незвідність перетвореннями подібності до клітково-трикутних і діагональних виглядів [7, 8].

Для матриць над комутативними областями головних ідеалів, що мають фіксований ненульовий визначник, обчислена [10] кількість класів їх нормальних форм Ерміта та Сміта.

У цій праці введено поняття абсолютно розкладних клітково-трикутних матриць у добуток відповідних клітково-трикутних множників. Вказано умови абсолютної розкладності та виділено класи клітково-трикутних матриць, які володіють властивістю абсолютної розкладності, а також встановлено кількість клітково-трикутних розкладів з точністю до асоційованості для певних класів матриць.

Над кільцем R кожна неособлива матриця є абсолютно розкладною. Дійсно, у кільці R для кожного розкладу $\Delta=\varphi\psi$ визначника $\Delta=\det A$ матриці $A\in M(n,R)$ існуватиме паралельний йому розклад матриці A на множники $A=BC$, тобто такий, що $\det B=\varphi$, $\det C=\psi$. У кільці клітково-трикутних матриць це не так.

Позначимо через $BT(n_1,\ldots,n_k,R)$ кільце верхніх клітково-трикутних (блочно-трикутних) матриць над R:

$$T = \begin{Vmatrix} T_1 & T_{12} & \mathbf{K} & T_{1k} \\ 0 & T_2 & \mathbf{K} & T_{2k} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & T_k \end{Vmatrix},$$

де $T_i \in M(n_i, R)$, $i = 1, \mathbf{K}, k$; $T_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $i, j = 1, \mathbf{K}, k$, $i < j$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Надалі такі матриці записуватимемо в скороченому вигляді: $T = \operatorname{triang}(T_1, \mathbf{K}, T_k)$.

Нехай матриця T розкладена у добуток кліткова-трикутних множників:

$$T = BC = \begin{Vmatrix} B_1 & B_{12} & \mathbf{K} & B_{1k} \\ 0 & B_2 & \mathbf{K} & B_{2k} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & B_k \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_1 & C_{12} & \mathbf{K} & C_{1k} \\ 0 & C_2 & \mathbf{K} & C_{2k} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & C_k \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

де $B_i, C_i \in M(n_i, R)$, $i = 1, \mathbf{K}, k$, $B_{ij}, C_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $i, j = 1, \mathbf{K}, k$, $i < j$. Тоді розкладні на множники її діагональні клітки

$$T_i = B_i C_i, \quad i = 1, \mathbf{K}, k,$$

та їх визначники $\Delta_i = \det T_i$:

$$\Delta_i = \varphi_i \psi_i, \quad i = 1, \mathbf{K}, k, \qquad (2)$$

де $\varphi_i = \det B_i$, $\psi_i = \det C_i$, $i = 1, \mathbf{K}, k$.

Нагадаємо, що в праці [3] кліткова-трикутний розклад вигляду (1) матриці T на множники такий, що $\det B_i = \varphi_i$, $\det C_i = \psi_i$, $i = 1, \mathbf{K}, k$, названо паралельним до факторизації (2) визначників її діагональних кліток T_i, $i = 1, \mathbf{K}, k$, або коротко – Δ_i*-паралельною кліткова-трикутною факторизацією* матриці T. Надалі називатимемо такий розклад матриці T на множники Δ_i*-паралельним кліткова-трикутним розкладом* на кліткова-трикутні множники.

Не для кожного розкладу вигляду (2) визначників Δ_i діагональних кліток T_i матриці T існуватиме Δ_i-паралельний кліткова-трикутний розклад матриці T на кліткова-трикутні множники (див. приклад 2 в [3]). Умови існування таких розкладів наведені у праці [2].

Означення. *Якщо для кожного розкладу* (2) *визначників* $\Delta_i = \det T_i$ *діагональних кліток* T_i *матриці* $T = \operatorname{triang}(T_1, \mathbf{K}, T_k)$ *існує* Δ_i*-паралельний кліткова-трикутний розклад*

$$T = BC, \quad B = \operatorname{triang}(B_1, \mathbf{K}, B_k), \quad C = \operatorname{triang}(C_1, \mathbf{K}, C_k),$$

цієї матриці, тобто такий, що $\det B_i = \varphi_i$, $\det C_i = \psi_i$, $i = 1, \mathbf{K}, k$, *то матрицю* T *називаємо абсолютно розкладною у кільці* $BT(n_1, \mathbf{K}, n_k, R)$ *кліткова-трикутних матриць.*

Теорема 1. *Нехай* $T = \operatorname{triang}(T_1, \mathbf{K}, T_k)$ *– неособлива матриця і визначники* $\Delta_i = \det T_i$ *її діагональних кліток* T_i *розкладені на множники вигляду* (2). *Якщо для кожного із розкладів* (2) *визначників* Δ_i *діагональних кліток* T_i, $i = 1, \mathbf{K}, k$, *матриці* T *виконується умова*

$$(\varphi_s, \psi_{s+t}) = 1 \text{ для всіх } s = 1, \mathbf{K}, k-1, \quad t = 1, \mathbf{K}, k-s,$$

то матриця T *є абсолютно розкладною у кільці* $BT(n_1, \mathbf{K}, n_k, R)$.

Доведення. Для кожного розкладу (2) визначників $\Delta_i = \det T_i$ діагональних кліток T_i матриці T існують розклади кліток $T_i = B_i C_i$, в яких

$\det B_i = \varphi_i$, $\det C_i = \psi_i$, $i = 1, \mathbf{K}, k$. Позначивши $\prod_{i=1}^{k} \varphi_i = \varphi$, $\prod_{i=1}^{k} \psi_i = \psi$, отримаємо, що $\Delta = \varphi\psi$, а тому матриця T має розклад на множники $T = BC$, в якому $\det B = \varphi$, $\det C = \psi$. Отже, враховуючи пояснення, викладені у праці [1], для того, щоб існував клітково-трикутний розклад матриці T на множники, треба, щоб існував розв'язок системи матричних рівнянь

$$B_i X_{ij} + Y_{ij} C_j + \sum_{l=i+1}^{j-1} Y_{il} X_{lj} = T_{ij}, \quad 1 \le i < j \le k,$$

розв'язування якої зводиться до послідовного розв'язування лінійних матричних рівнянь вигляду

$$B_i X_{ij} + Y_{ij} C_j = T_{ij}, \quad 1 \le i < j \le k.$$

Враховуючи умову теореми та лему 2 із [1], отримуємо, що клітково-трикутний розклад матриці T, Δ_i-паралельний до відповідних розкладів (2) визначників її діагональних кліток T_i, $i = 1, \mathbf{K}, k$, існує.

Отже, матриця, для якої виконуються умови теореми, є абсолютно розкладною у кільці $BT(n_1, \mathbf{K}, n_k, R)$.

Теорему доведено.◊

Наслідок 1. *Неособлива матриця* $T = \operatorname{triang}(T_1, \mathbf{K}, T_k)$, *визначники діагональних кліток* T_i *якої попарно взаємно прості, є абсолютно розкладною у кільці клітково-трикутних матриць* $BT(n_1, \mathbf{K}, n_k, R)$.

Зауважимо, що усі клітково-трикутні розклади цієї матриці розбиваємо на класи Δ_i-паралельних до фіксованих розкладів (2) визначників $\Delta_i = \det T_i$ її діагональних кліток T_i. Розклади матриць на множники розглядаємо з точністю до асоційовності. Нагадаємо, що розклади $A = B_1 C_1$ і $A = B_2 C_2$, $B_i, C_i \in M(n, R)$, $i = 1, 2$, матриці $A \in M(n, R)$ називають асоційованими, якщо існує така матриця $V \in GL(n, R)$, що $B_2 = B_1 V$, $C_2 = V^{-1} C_1$, тобто множники у цих розкладах описуємо з точністю до оборотних матриць. Тому вважаємо, що кожен клас Δ_i-паралельних розкладів на множники матриці T складається із неасоційованих між собою розкладів. Клас може складатися з одного розкладу, скінченної або нескінченної кількості неасоційованих між собою Δ_i-паралельних клітково-трикутних розкладів. Наприклад, якщо $R = \mathbf{Z}$ – кільце цілих чисел, то клас може складатися з одного або скінченної кількості неасоційованих розкладів на множники. Якщо $R = £[\lambda]$, де £ – поле комплексних чисел, клас складається з одного або нескінченної кількості розкладів.

Теорема 2. *Нехай* $T = \operatorname{triang}(T_1, \mathbf{K}, T_k)$ – *неособлива клітково-трикутна матриця і нехай* $\Delta_i = p_{i1}^{s_{i1}} \cdot \mathbf{K} \cdot p_{it_i}^{s_{it_i}}$ – *канонічні розклади визначників* $\Delta_i = \det T_i$ *її діагональних кліток* T_i *на прості елементи в кільці* R, *тобто* $p_{ij} \ne 1$, $p_{ig} \ne p_{ih}$, *якщо* $g \ne h$, $j = 1, \mathbf{K}, t_i$, $i = 1, \mathbf{K}, k$. *Якщо матриця* T *абсолютно розкладна у кільці клітково-трикутних матриць* $BT(n_1, \mathbf{K}, n_k, R)$, *то кількість усіх класів її* Δ_i*-паралельних клітково-трикутних розкладів вигляду* (1) *обчислюємо за формулою*

$$m = \prod_{i=1}^{k} m_i - 2, \tag{3}$$

де $m_i = \prod_{j=1}^{t_i} (s_{ij} + 1)$, $i = 1, \mathbf{K}, k$.

Доведення. Зрозуміло, що якщо неособлива матриця T є абсолютно розкладною у кільці $BT(n_1, \mathbf{K}, n_k, R)$, то кількість усіх класів її Δ_i-паралельних клітково-трикутних розкладів дорівнює кількості всеможливих різних розкладів на множники набору визначників Δ_i її діагональних кліток T_i, $i = 1, \mathbf{K}, k$.

Кожен із визначників Δ_i діагональної клітки T_i матриці T розкладаємо на два множники: $\Delta_i = \varphi_i \psi_i$. Причому таких різних розкладів одержимо $m_i = \prod_{j=1}^{t_i} (s_{ij} + 1)$. Тоді зрозуміло, що кількість різних (із урахуванням переставляння множників) розкладів визначників $\Delta_1, \mathbf{K}, \Delta_k$ на два множники кожний, тобто кількість наборів пар $\{\{\varphi_1, \psi_1\}; \mathbf{K}; \{\varphi_k, \psi_k\}\}$, де $\Delta_i = \varphi_i \psi_i$, $i = 1, \mathbf{K}, k$, дорівнюватиме $\prod_{i=1}^{k} m_i$.

Зауважимо, що у цій формулі не враховуємо тривіальні розклади визначників Δ_i діагональних кліток T_i матриці T:

$$\{\{1, \psi_1\}; \mathbf{K}; \{1, \psi_k\}\} \text{ та } \{\{\varphi_1, 1\}; \mathbf{K}; \{\varphi_k, 1\}\},$$

Δ_i-паралельні до яких розклади матриці T будуть тривіальними. Таким чином, отримуємо формулу (3).

Теорему доведено.◊

Із доведеної теореми та теореми 3 із праці [3] випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай неособлива матриця* $T = \mathrm{triang}(T_1, \mathbf{K}, T_k)$ *– абсолютно розкладна у кільці* $BT(n_1, \mathbf{K}, n_k, R)$ *і для кожного із розкладів* (2) *визначників* $\Delta_i = \det T_i$ *її діагональних кліток* T_i, $i = 1, \mathbf{K}, k$, *виконується умова*

$$((\varphi_i, \psi_i),\ d_{n_i - 1}^{T_i}) = 1, \quad i = 1, \mathbf{K}, k,$$

де $d_{n_i - 1}^{T_i}$ *– найбільший спільний дільник мінорів* $(n_i - 1)$*-го порядку матриці* T_i.

Тоді кількість усіх з точністю до асоційованості Δ_i*-паралельних клітково-трикутних розкладів на множники вигляду* (1) *матриці* T *є скінченною і обчислюється за формулою* (3).

Враховуючи наслідки 1 і 2, отримаємо такий.

Наслідок 3. *Нехай визначники діагональних кліток* T_i *неособливої матриці* $T \in BT(n_1, \mathbf{K}, n_k, R)$ *– попарно взаємно прості та кожна із її діагональних кліток* T_i *має лише по одному відмінному від одиниці інваріантному множнику. Тоді кількість усіх з точністю до асоційованості* Δ_i*-паралельних клітково-трикутних розкладів на множники вигляду* (1) *матриці* T *є скінченною і обчислюється за формулою* (3).

1. *Джалюк Н. С.* Однозначність клітково-трикутних факторизацій матриць над кільцями головних ідеалів // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 7–12.

2. *Джалюк Н., Петричкович В.* Факторизація кліткоко-діагональних та кліткоко-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. вісник НТШ. – 2007. – 4. – С. 79–89.
3. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Паралельні факторизації матриць над кільцями та їх зв'язки // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 7–17.
4. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 29–40.
5. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
6. *Петричкович В. М.* Абсолютная разложимость матричных многочленов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 9. – С. 37–41.
7. *Петричкович В. М.* О линейных делителях и приводимости многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1984. – 36, № 2. – С. 195–200.
8. *Петричкович В. М.* Про розв'язки матричних многочленних рівнянь та їх число // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 52–56.
9. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Spectral analysis of matrix polynomials – I. Canonical forms and divisors // Linear Algebra Appl. – 1978. – 20. – P. 1–44.
10. *Newmam M.* Integral matrices. – New York: Academic Press, 1972. – 224 c.
11. *Pereira E.* On solvents of matrix polynomials // Appl. Numer. Math. – 2003. – 47, № 2. – P. 197–208.

АБСОЛЮТНАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ НА МНОЖИТЕЛИ В КОЛЬЦАХ КЛЕТОЧНО-ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Введено понятие абсолютной разложимости матриц на множители в кольцах клеточно-треугольных матриц над коммутативными областями главных идеалов. Установлены условия абсолютной разложимости клеточно-треугольных матриц и выделены классы матриц с таким свойством. Приведена формула для вычисления максимального числа классов неасоциированых разложений на множители в таких кольцах матриц и числа неасоциированых разложений для некоторых клеточно-треугольных матриц.

THE ABSOLUTE FACTORIZATION OF MATRICES IN THE RINGS OF BLOCK-TRIANGULAR MATRICES

The conception of the absolute factorization of matrices in the rings of block-triangular matrices over commutative principal ideal domains are introduced. The conditions of the absolute factorization of block-triangular matrices are established and classes of matrices with such property are indicated. The formula for calculating the maximal number of classes of nonassociate factorizations in such rings of matrices and the number of nonassociate factorizations for some block-triangular matrices are determined.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.09.13