УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

НАПІВСКАЛЯРНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ І ТРИКУТНА ПОДІБНІСТЬ ЧИСЛОВИХ МАТРИЦЬ

Встановлено канонічну форму відносно трикутної подібності для комплексних матриць і вказано умови напівскалярної еквівалентності одного класу поліноміальних матриць.

Вступ. Поліноміальні матриці, які можна звести одну до одної множенням з однієї сторони на неособливу матрицю над полем, а з іншої – на оборотну над кільцем поліномів, названі у праці [3] напівскалярно еквівалентними, а в праці [8] – PS-еквівалентними. Різниця між цими типами еквівалентностей полягає лише в тому, що за напівскалярно еквівалентних перетворень матриці скалярний множник стоїть зліва від неї, а за PS-еквівалентних – справа. Такими перетвореннями досягають трикутної форми (нижньої за напівскалярної еквівалентності і верхньої за PS-еквівалентності) з інваріантними множниками на головній діагоналі для матриць повного рангу у випадку нескінченного поля та деяких скінченних полів [3, 7, 8]. З введенням поняття напівскалярної еквівалентності постала задача класифікації матриць відносно такої еквівалентності. Окрім питань пошуку інваріантів та побудови нормальної форми матриці стосовно напівскалярно еквівалентних перетворень, важливо також знайти умови, за яких дві матриці перебувають у відношенні напівскалярної еквівалентності. Кожне з цих питань складне і їх розв'язання, як стверджують фахівці, можливе лише в окремих випадках. Наприклад, у праці [6] встановлена канонічна форма для поліноміальних матриць з усіма простими характеристичними коренями, а в праці [5] – для матриць з єдиним елементарним дільником.

Нижче розглянуто поліноміальні матриці, еквівалентні справа регулярному, зокрема унітальному, матричному поліному з певними спектральними властивостями одного з його коефіцієнтів. Матриці, правоеквівалентні до регулярних, називають [4] регуляризовними справа. Там же наведено умови регуляризовності (див. теорему 3, §2, розділ III [4]) та метод побудови для довільної матриці правоеквівалентного унітального матричного полінома, якщо такий існує (теорема 2, §3, розділ III).

Нехай матриця $N(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$, $\deg\det N(x) = 2n$, регуляризується справа, тобто існує така матриця $R(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$, що добуток $M(x) = N(x)R(x)$ є регулярним матричним поліномом другого степеня. Можемо вважати його унітальним, тобто $M(x) = E_n x^2 + M_1 x + M_2$, де E_n – одинична матриця. Припускаємо, що один із коефіцієнтів тричлена $M(x)$, наприклад M_1, має лише один елементарний дільник, тобто матриця M_1 подібна до клітки Жордана. Тоді від $M(x)$ перетворенням подібності можемо перейти до матричного тричлена

$$K(x) = P^{-1}M(x)P = E_n x^2 + \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{Vmatrix} x + A\,, \tag{1}$$

який визначають, очевидно, з точністю до подібності

$$A \to S^{-1}AS\,, \tag{2}$$

де матриця перетворення S має вигляд

$$S = \begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & s_1 \\ 0 & & & s_0 \end{Vmatrix}, \quad s_0 \neq 0, \tag{3}$$

(див. [1] § 2, глава 8). Можемо вважати $s_0 = 1$.

Часткові випадки.

Твердження 1. *Матричний тричлен* (1) *для тричлена* $M(x)$ *з переставними коефіцієнтами* M_1, M_2 *визначається однозначно.*

Д о в е д е н н я. Якщо матриці M_1, M_2 переставні, то матриця A має верхню трикутну теплицеву форму, аналогічну до (3). А це означає, що $A = S^{-1}AS$ для кожної матриці S вигляду (3). Твердження доведено. □

Таким чином, тричлен (1) для тричлена $M(x)$ з переставними коефіцієнтами M_1, M_2 можна вважати канонічним у класі $\{CN(x)Q(x)\}$ напівскалярно еквівалентних з матрицею $N(x)$.

Твердження 2. *Якщо в матриці* A *тричлена* (1) *деякий елемент в позиції* (i, j), $1 \le i, j \le n$, *ненульовий, а перші* $j-1$ *стовпці разом з останніми* $n-i$ *рядками нульові, то цю матрицю можна вибрати так, що виконується одна з таких умов*:

1) *перші* $i-1$ *елементи* j*-го стовпця дорівнюють нулеві*, *якщо* (i, j)*-елемент знаходиться не вище побічної діагоналі*;

2) *перші* $i-1$ *елементи* j*-го стовпця та останні* $n-j-i+1$ *елементи* i*-го рядка дорівнюють нулеві*, *якщо* (i, j)*-елемент знаходиться вище побічної діагоналі.*

Тричлен (1) *з таким вільним членом* A *у класі* $\{CN(x)Q(x)$ *напівскалярно еквівалентних визначається однозначно.*

Д о в е д е н н я. *Існування.* Якщо $i > 1$, то на першому кроці, застосовуючи до матриці A перетворення подібності (2) матрицею вигляду

$$\begin{Vmatrix} 1 & s_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & s_1 \\ 0 & & & 1 \end{Vmatrix},$$

робимо нульовим елемент у позиції $(i-1, j)$. Якщо $i > 2$, то на другому кроці перетворенням подібності матрицею

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & s_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & s_2 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{Vmatrix}$$

в отриманій матриці робимо нульовим елемент у позиції $(i-2, j)$. Далі цілком аналогічно можна дістати нуль у позиції $(i-3, j)$, якщо $i > 3$, і т.д. Продовжуємо до тих пір, поки всі перші $i-1$ елементи j-го стовпця не дорівнюватимуть нулеві. Якщо ненульовий елемент у позиції (i, j), про який йдеться в умові твердження, знаходиться вище побічної діагоналі, то на i-му кроці матрицею перетворення S вигляду (3), в якій $s_k = 0$, $k \neq i$, робимо нуль у позиції $(i, j+i)$. Далі, якщо $j + i < n$, то послідовно робимо нулі в позиціях $(i, j+i+1), \ldots, (i, n)$. При цьому нульові елементи в позиціях $(1, j), \ldots, (i-1, j)$, певна річ, збережуться.

Єдиність. Якщо матриця A, яка задовольняє умови твердження, перетворенням подібності матрицею S форми (3) зведена до деякої іншої матриці A', то з очевидної рівності $AS = SA'$ випливає, що A' теж задовольняє умови твердження. Більше того, в матриці A' той самий, що і в A, елемент у позиції (i, j) відмінний від нуля, а перші $j-1$ стовпці та останні $n-i$ рядки є нульовими. Якщо, крім того, в матрицях A, A' виконується одна з умов, наприклад умова 1) (відповідно, умова 2)), то порівнянням в обох частинах останньої рівності елементів у позиціях $(i-1, j), \ldots, (1, j)$ (відповідно, в позиціях $(i-1, j), \ldots, (1, j)$, $(i, j+i), \ldots, (i, n)$) дістанемо, що у матриці S елементи $s_1, \ldots, s_{i-1}$ (відповідно, елементи $s_1, \ldots, s_{n-j}$) є нульові. Це на основі згаданої вже рівності $AS = SA'$ означає, що насправді $A = A'$. Твердження доведено. □

Наслідок. *Якщо в матриці* $A = \left\| a_{ij} \right\|_1^n$ *тричлена* (1) *маємо* $a_{n1} \neq 0$, *то можна вважати, що* $a_{11} = \ldots = a_{n-1,\,1} = 0$. *Такий тричлен єдиний у класі напівскалярно еквівалентних.*

Інваріанти пари. Розглянемо далі детальніше ситуацію, коли коефіцієнти тричлена (1), можливо, не задовольняють умови твердження 1 або 2.

Твердження 3. *Елементи в позиціях* (i, j) *матриці* A *є інваріантами відносно подібності* (2) *з матрицею перетворення* S *вигляду* (3), *якщо у цій матриці в позиціях* (p, q), *відмінних від* (i, j) *і таких, що* $p \geq i$, $q \leq j$, *знаходяться нульові елементи.*

Д о в е д е н н я. З рівності

$$\left\| \begin{array}{cccc} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & s_1 \\ 0 & & & s_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc|c} \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline 0 & \ldots & 0 & a_{ij} & \times \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \times \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \times \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccc|c} \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline a'_{i1} & \ldots & a'_{i,\,j-1} & a'_{ij} & \times \\ a'_{i+1,\,1} & \ldots & a'_{i+1,\,j-1} & a'_{i+1,\,j} & \times \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & \ldots & a'_{n,\,j-1} & a'_{nj} & \times \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & s_1 \\ 0 & & & s_0 \end{array} \right\|,$$

де $a_{ij} \neq 0$, $s_0 \neq 0$, випливає, що

$$a'_{i1} = \ldots = a'_{i,\,j-1} = a'_{i+1,\,1} = \ldots = a'_{i+1,\,j} = \ldots = a'_{n1} = \ldots = a'_{nj} = 0, \; a_{ij} = a'_{ij}.$$

Твердження доведено. □

Означення 1. Нехай задано довільну матрицю $G = \left\| g_{ij} \right\|_1^{m,\,n}$. *Діагоналлю матриці* G назвемо сукупність її елементів g_{pq}, для яких різниця індексів $p - q$ стала.

Очевидно, для головної діагоналі ця різниця дорівнює нулеві. Звернемо увагу, що в літературі, крім наведеного, використовують дещо інше поняття діагоналі матриці (див., наприклад, п. 2, частину 1, у праці [2]). Занумеруємо всі діагоналі матриці G, починаючи з найнижчої, тобто діагональ, що складається з одного елемента g_{m1}, вважаємо першою. Другою буде діагональ з елементами $g_{m-1,\,1}, g_{m2}$ і т.д. Зазвичай елементи головної діагоналі нумерують зверху вниз. Так само вважатимемо занумерованими елементи кожної діагоналі:

Твердження 4. *Інваріантами матриці* A *відносно подібності* (2) *з матрицею перетворення* S *вигляду* (3) *є такі об'єкти*:

(i) *останній* (*перший*) *ненульовий елемент першого* (*останнього*) *ненульового стовпця* (*рядка*);

(ii) *перша ненульова діагональ*;

(iii) *перші послідовні діагоналі з рівними елементами та наступна за ними діагональ з нерівними елементами верхньотрикутної з рівними елементами на головній діагоналі матриці.*

Д о в е д е н н я. Інваріанти (i) та (ii) є наслідком твердження 3. Інваріант (iii) нескладно дістати з рівності $AS = SA'$, де матриця S має вигляд (3). Твердження доведено. □

Основний результат. Позначимо через l номер першої ненульової діагоналі вільного члена A тричлена (1). За твердженням 4 ця діагональ незмінна за всіх перетворень (2) під дією матриці (3). Далі кожному елементу a_{ij} в позиції (i, j) матриці A поставимо у відповідність рядок довжини $n-1$ вигляду

$$\left\| a_{i,\,j-1} - a_{i+1,\,j} \quad a_{i,\,j-2} - a_{i+2,\,j} \quad \ldots \quad a_{i,\,j-n+1} - a_{i+n-1,\,j} \right\| ,$$

де $a_{iq} = 0$, якщо $q < 1$, і $a_{pj} = 0$, якщо $p > n$. Назвемо такий рядок (i, j)-*рядком матриці* A. Якщо позиція (i, j) знаходиться не вище l-ої діагоналі, то відповідний (i, j)-рядок є нульовим. З (p, q)-рядків, що відповідають елементам у позиціях (p, q), розміщеним вище l-ої діагоналі, побудуємо матрицю. При цьому розташовуємо (r, s)-рядок вище (p, q)-рядка, якщо виконується одна з таких умов:

– діагональ матриці A з елементом a_{rs} знаходиться нижче діагоналі з елементом a_{pq};

– елементи a_{rs} і a_{pq} належать одній діагоналі, але $r < p$.

Побудовану таким чином матрицю назвемо A-матрицею і позначимо $H(A)$.

Означення 2. Матрицю A називають *канонічною* в класі подібних $S^{-1}AS$, де перетворювальна S має вигляд (3), якщо її елементи, яким відповідає максимальна система перших лінійно незалежних рядків A-матриці $H(A)$, є нульовими.

Теорема 1. *У класі подібних матриць* $S^{-1}AS$, *де перетворювальна* S *має вигляд* (3), *існує, причому єдина, канонічна матриця в сенсі означення* 2.

Д о в е д е н н я. *Існування.* Нехай у першій ненульовій діагоналі матриці A (номер якої вище позначено через l) першим ненульовим є елемент a_{1j} у позиції $(1, j)$. Якщо не всі елементи цієї діагоналі рівні між собою і $(a_{pq}, a_{p+1,\,q+1})$ – перша пара сусідніх нерівних елементів цієї діагоналі, то в матриці $H(A)$ першим ненульовим є $(p, q+1)$-рядок. Тоді в матриці A елемент у позиції $(p, q+1)$ можна зробити нульовим, застосовуючи перетворення подібності матрицею вигляду (3), якщо в ній належно вибрати елемент s_1 і покласти $s_0 = 1$, $s_i = 0$ для $i > 1$. За рівності всіх елементів l-ої діагоналі першу пару сусідніх нерівних елементів шукаємо в наступній $(l+1)$-ій діагоналі і т.д. У кожному разі елемент матриці A, якому відповідає перший відмінний від нуля рядок матриці $H(A)$, можемо вважати нульовим.

Якщо в l-ій діагоналі матриці A першим ненульовим є елемент a_{ij} у позиції (i, j), причому $i > 1$, то в матриці $H(A)$ першим ненульовим рядком є рядок, що відповідає елементу $a_{i-1,\, j}$. Легко бачити, що спеціально підібраною матрицею перетворення подібності вигляду (3), де $s_0 = 1$ і всі решта елементи, крім s_1, дорівнюють нулеві, елемент в позиції $(i-1, j)$ матриці A можна зробити нульовим. Якщо $i > 2$, то наступним лінійно незалежним з $(i-1, j)$-рядком у матриці $H(A)$ є $(i-2, j)$-рядок. Перетвореннями типу (2) з матрицею перетворення S вигляду (3), в якій $s_0 = 1$, $s_i = 0$, $i \neq 2$, можемо зробити нульовим елемент $a_{i-2,\, j}$ матриці A, не порушивши при цьому нульовий її елемент у позиції $(i-1, j)$, і т.д.

Припускаємо за індукцією, що елементи матриці A, яким відповідають k, $k < rank H(A)$, перших лінійно незалежних рядків $d_{t_1}, \ldots, d_{t_k}$ матриці $H(A)$ є нульовими. Нехай $d_{t_{k+1}}$ – наступний лінійно незалежний з $d_{t_1}, \ldots, d_{t_k}$ рядок матриці $H(A)$, який відповідає елементу $a_{pq} \neq 0$ матриці A. Розглянемо рівняння

$$\left\| \begin{matrix} d_{t_1} \\ \ldots \\ d_{t_k} \\ d_{t_{k+1}} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_{pq} \end{matrix} \right\| \tag{4}$$

з невідомими x_m, $m = 1, \ldots, n-1$. Останнє, очевидно, розв'язне. З розв'язків $x_m = s_m$ побудуємо матрицю вигляду (3) і за її допомогою трансформуємо подібністю матрицю A: $S^{-1}AS = A'$. Отримана матриця A' матиме нулі в усіх позиціях елементів, яким відповідають перші $k+1$ лінійно незалежні рядки матриці $H(A')$. Дійсно, з рівності

$$AS = SA' \tag{5}$$

для довільних елементів a_{ij} і a'_{ij} матриць A і A' відповідно маємо:

$$a'_{ij} - a_{ij} = \left\| a_{i,\, j-1} - a'_{i+1,\, j} \quad a_{i,\, j-2} - a'_{i+2,\, j} \quad \ldots \quad a_{i,\, j-n+1} - a'_{i+n-1,\, j} \right\| \left\| \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{matrix} \right\|, \tag{6}$$

де $a_{is} = 0$, якщо $s < 1$, і $a'_{rj} = 0$, якщо $r > n$. Оскільки діагоналі матриці A, розміщені нижче елемента a_{pq}, збігаються з відповідними діагоналями матриці A', то рівність (6) для елементів a_{pq} і a'_{pq} можна записати у вигляді

$$a'_{pq} - a_{pq} = d_{t_{k+1}} \left\| \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{matrix} \right\|.$$

З останнього, враховуючи те, що стовпець $\left\| \begin{matrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{matrix} \right\|$ задовольняє рівняння (4), дістаємо $a'_{pq} = 0$.

Єдиність. Нехай матриці A, A' подібні, причому перетворювальна матриця S має вигляд (3). Згідно з твердженням 4 у матрицях A і A' збігаються l-ті діагоналі, які є першими ненульовими в кожній з них. Це значить, що у відповідних матрицях $H(A)$ і $H(A')$ збігаються рядки, які відповідають елементам $(l+1)$-их діагоналей матриць A і A'. Тоді, як легко бачити, в матрицях A, A' збігаються $(l+1)$-ті діагоналі, а це у свою чергу призводить до збігання в матрицях $H(A)$, $H(A')$ рядків, що відповідають елементам $(l+2)$-их діагоналей матриць A, A' і т.д. Припустимо за індукцією збігання $(l+k)$-их діагоналей матриць A, A' $(k \geq 1)$, а також рядків матриць $H(A)$, $H(A')$, що відповідають елементам $(l+k+1)$-их діагоналей матриць A, A'. Нехай a_{ij}, a'_{ij} – перші елементи $(l+k+1)$-их діагоналей матриць A, A' відповідно. З рівності (5) для цих елементів можна записати рівність (6), в якій рядок

$$\left\| a_{i,\,j-1} - a'_{i+1,\,j} \quad a_{i,\,j-2} - a'_{i+2,\,j} \quad \ldots \quad a_{i,\,j-n+1} - a'_{i+n-1,\,j} \right\|$$

дорівнює $(i,\,j)$-рядку матриці $H(A)$ (чи $H(A')$). Згідно з припущенням індукції для кожного рядка d матриці $H(A)$, що передує $(i,\,j)$-рядку, виконується рівність

$$d \begin{Vmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{Vmatrix} = 0 .$$

Тому, якщо $(i,\,j)$-рядок є лінійною комбінацією попередніх рядків, то права частина в рівності (6) дорівнює нулеві. В іншому випадку a_{ij}, a'_{ij} є нульовими елементами згідно з означенням 2. У кожному разі $a_{ij} = a'_{ij}$. Аналогічні міркування, застосовані до наступної пари елементів $(l+k+1)$-их діагоналей матриць A, A', призводять до рівності цих елементів. Отже, в матрицях A, A' збігаються $(l+k+1)$-ші діагоналі. Теорема доведена. □

З теореми 1 випливає, що елементи матриці A тричлена (1), яким відповідають перші послідовні нульові рядки матриці $H(A)$, є інваріантами відносно подібності (2) з матрицею перетворення S вигляду (3). Більше того, якщо у верхньотрикутній матриці A кожна з діагоналей має рівні елементи, за винятком передостанньої, то ця матриця є канонічною за рівності нулю елемента в позиції $(1,\,n)$. У цьому випадку $rank H(A) = 1$.

Теорема 2. Нехай класи $\{CN(x)Q(x)\}$, $\{C'N'(x)Q'(x)\}$ напівскалярно еквівалентних матриць містять унітальні матричні тричлени $K(x)$, $K'(x)$ вигляду (1). Для збігання цих класів, тобто для напівскалярної еквівалентності матриць $N(x)$, $N'(x)$, необхідно і достатньо збігання канонічних форм у сенсі означення 2 вільних членів матричних поліномів $K(x)$, $K'(x)$.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
3. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
4. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.

5. *Шаваровский Б. З.* Каноническая форма многочленной матрицы с одним элементарным делителем относительно полускалярно эквивалентных преобразований // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 10. – С. 32–35.
6. *Шаваровский Б. З.* Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Матем. заметки. – 1998. – 65, № 5. – С. 769–782.
7. *Baratchart L.* Un theoreme de factorisation et son application a la representation des systemes cuclique causaux // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1. Math. – 1982 – 295, № 3. – P. 223–226.
8. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra and its Applications. – 1999. – 291. – P. 167–184.

ПОЛУСКАЛЯРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ И ТРЕУГОЛЬНОЕ ПОДОБИЕ ЧИСЛОВЫХ МАТРИЦ

Установлена каноническая форма относительно треугольного подобия для комплексных матриц и указаны условия полускалярной эквивалентности одного класса полиномиальных матриц.

SEMISCALAR EQUIVALENCE OF POLYNOMIAL MATRICES AND TRIANGULAR SIMILARITY OF NUMERICAL MATRICES

We give canonical form for complex matrices up to triangular similarity and establish the conditions for semiscalar equivalence of the one class of polynomial matrices.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.10.13