УДК 512.552.13

Б. М. Кузніцька

РЕГУЛЯРНА МАТРИЦЯ В СЕНСІ НЕЙМАНА НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ БЕЗУ Є ОДИНИЧНО РЕГУЛЯРНОЮ

Показано, що регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 над комутативною областю Безу є одинично регулярною.

Відомо, що комутативне регулярне кільце в сенсі Неймана є одинично регулярним [3]. Для некомутативних кілець це не так [4]. Тим не менше, нижче показано, що над комутативною областю Безу довільна регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 є одинично регулярною.

Введемо всі необхідні означення і факти. Під кільцем завжди розумітимемо комутативну область з одиницею.

Означення 1. Скажемо, що кільце R має *стабільний ранг 2*, якщо з умови $aR + bR + cR = R$ для довільних елементів $a, b, c \in R$ слідує існування таких елементів $x, y \in R$, що $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ [5].

Означення 2. Під *кільцем Безу* розуміємо комутативне кільце, в якому довільний скінченно породжений ідеал є головним.

Згідно з працею [5] маємо такий результат.

Теорема 1. Стабільний ранг комутативної області Безу рівний 2.

Кільце матриць порядку 2 над кільцем R позначимо через R_2.

Означення 3. Матриця $A \in R_2$ є *повною*, якщо $R_2 A R_2 = R_2$.

Відмітимо такий результат [1].

Лема 1. Нехай R – комутативна область Безу. Тоді всі власні ідемпотенти кільця R_2 спряжені, тобто мають вигляд

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P,$$

де P – деяка оборотна матриця порядку 2 над кільцем R_2 **.**

Означення 4. Скажемо, що матриця $A \in R_2$ *діагоналізується*, якщо існують такі оборотні матриці $P, Q \in R_2$, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_2 R \subset \varepsilon_1 R$ для деяких елементів $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R$.

Відмітимо, що якщо за комутативної області Безу довільна повна матриця $A \in R_2$ діагоналізується над R, то

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

для деяких оборотних матриць $P, Q \in R_2$ і елемента $\varepsilon \in R$.

Зауважимо теж, що внаслідок леми 1 довільна ідемпотентна матриця кільця R_2 діагоналізується.

Теорема 2. Нехай R - комутативна область Безу і A, B - такі повні матриці кільця R_2, що $AR_2 + BR_2 = R_2$, причому матриця B діагоналізується. Тоді існує така повна матриця T кільця R_2, що $A + BT$ - оборотна матриця.

Д о в е д е н н я. Оскільки матриця B діагоналізується, то через обмеження, накладені на комутативну область Безу R, отримаємо такі оборотні матриці P, K, Q кільця R_2, що

$$PAK = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},\ PBQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Оскільки $AR_2 + BR_2 = R_2$, тоді існують такі матриці $C, D \in R_2$, що $AC + BD = E$, а звідси $PAK(K^{-1}C) + PBQ(Q^{-1}D) = P$, тобто матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ взаємно прості зліва. Тобто існують матриці U, V кільця R_2, що $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} V = E$, де E – одинична матриця.

Так як визначник матриці $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} V$ рівний одиниці, отримаємо $bR + cR + yR = R$.

На підставі теореми 1 стабільний ранг комутативної області Безу рівний 2. Отже, існують такі елементи α, β, що $(b + y\alpha)R + (c + y\beta)R = R$, а відтак такі елементи $n, m \in R$, що $(b + y\alpha)n + (c + y\beta)m = 1$. Керуючись результатом праці [4], елементи α, β можна вибрати так, що $\alpha R + \beta R = R$. Тоді $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -n \\ b + y\alpha & c + y\beta \end{pmatrix}$ – оборотна матриця кільця R_2. Більше того, оскільки $\alpha R + \beta R = R$, то матриця $\begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ є повною. Отже, для матриць PAK і PBQ існує така повна матриця $T = \begin{pmatrix} m - a & -n \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, що $PAK + PBQT = U$, де U – деяка оборотна матриця кільця R_2. Звідси $A + BQTK^{-1} = P^{-1}UK^{-1}$ – оборотна матриця кільця R_2. Так як матриці Q і K^{-1} оборотні, то очевидно, що матриця QTK^{-1} – повна, що і доводить теорему 2.

Відмітимо зв'язок праці [2] з теоремою 2. Для подальшого розгляду нам потрібний такий результат.

Лема 2. Нехай R – комутативна область Безу. Довільний лівий або правий дільник повної матриці кільця R_2 є теж повною матрицею.

Д о в е д е н н я. Нехай $A = (a_{ks})$ – повна матриця кільця R_2 і $A = BC$ для матриць $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ кільця R. Оскільки A – повна, то $\sum_{k=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} a_{ks}R = R$. Так як для довільних $i \in \overline{1,2}$, $j \in \overline{1,2}$ $a_{ij} \in \sum_{k=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} b_{ks}R$, то очевидно, що $B = (b_{ij})$ – повна матриця. Аналогічно доводимо, що матриця C повна. Лема доведена.

Як наслідок леми 2 отримаємо такий результат.

Лема 3. Нехай R – комутативна область Безу. Довільна ідемпотентна матриця кільця R_2 є повною діагоналізованою.

Нагадаємо, що матриця A кільця R_2 є регулярною в сенсі Неймана, якщо можна знайти таку матрицю X кільця R_2, що $AXA = A$. Якщо ж, окрім того, $X \in R_2$ є оборотною матрицею кільця R_2, то матрицю A називають одинично регулярною. Очевидно, що ідемпотентна матриця є одинично регулярною.

Основним результатом дослідження є така теорема.

Теорема 3. Над комутативною областю Безу довільна регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 є одинично регулярною.

Д о в е д е н н я. Нехай R – комутативна область Безу і A – регулярна матриця кільця R_2, тобто для матриці $A \in R_2$ існує така матриця $X \in R_2$, що $AXA = A$.

Відмітимо, що матриця XA ідемпотентна. Згідно з лемою 3, XA – повна матриця кільця R_2, яка діагоналізується. Відмітимо, що матриця $E - XA$ є також повною матрицею, яка діагоналізується, оскільки вона ідемпотентна. Оскільки $XA + (E - XA) = E$, то $XR_2 + (E - XA)R_2 = R_2$. На підставі теореми 2 існує така повна матриця T кільця R_2, що $X + (E - XA)T = U$ – оборотна матриця кільця R_2. Тоді
$AUA = A(X + (E - XA)T)A = AXA + ATA - AXATA = A$, тобто матриця A є одинично регулярною. Теорема доведена.

Як наслідок цієї теореми отримаємо такий очевидний результат.

Наслідок. Довільна регулярна матриця в сенсі Неймана порядку 2 над комутативною областю Безу має вигляд FU, де F – ідемпотентна матриця кільця R, а U – оборотна матриця кільця R_2.

Д о в е д е н н я. Для регулярної матриці другого порядку A згідно з теоремою 3 існує така оборотна матриця U другого порядку, що $AU = F$ є ідемпотентом кільця матриць другого порядку. А звідси $A = FU^{-1}$.

За симетрією означення регулярної матриці в сенсі Неймана видно, що довільна регулярна матриця другого порядку над комутативною областю Безу має вигляд UW, де U – оборотна матриця, а W – ідемпотентна.

1. *Дубровин Н. И.* Проективный предел колец с элементарными делителями // Матем. сборник – 1982. – 119, № 1. – С. 88 – 95.
2. *Романів А. М., Щедрик В. П.* Про стабільний ранг одного класу матриць // Тези конф. "Сучасні проблеми механіки і математики". – 2013. – 3. – С. 201 – 202.
3. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – 82. – P. 362–365.
4. *Goodearl K. R.* Von Neumann regular rings. – Pitman, London; San Francisco; Melbourne, 1979.
5. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable range // Вісник Львів. ун-ту – 2003. – 61. – С. 206–211.

РЕГУЛЯРНАЯ МАТРИЦА В СМЫСЛЕ НЕЙМАНА НАД КОММУТАТИВНОЙ ОБЛАСТЬЮ БЕЗУ ЯВЛЯЕТСЯ ЕДИНИЧНО РЕГУЛЯРНОЙ

Показано, что регулярная матрица в смысле Неймана над коммутативной областью Безу является единично регулярной.

VON NEUMANN REGULAR MATRICES OVER A COMMUTATIVE BEZOUT DOMAIN IS UNIT REGULAR MATRICES

It is proved that over a commutative Bezout domain von Neumann regular matrices are uni-regular matrices.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів
Одержано
20.09.13