

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА ПІД ЧАС ОСТИГАННЯ ЗА РІЗНИХ ПОЧАТКОВИХ ТЕМПЕРАТУР СКЛАДОВИХ

З використанням підходу, який базується на узагальнених функціях та функціях Гріна для трискладового простору, знайдено аналітичний розв'язок квазістатичної задачі термопружності для нерівномірно нагрітого безмежного трискладового тіла. Отримано спрощені співвідношення для визначення температурних полів та встановлено межі їх застосовності. Наведено результати числових досліджень температури, напружень та переміщень.

Задачі теплопровідності для однорідного безмежного тіла за різних початкових температур його частин розглядали раніше [8]. У працях [4, 5, 7] наведено розв'язки задачі теплопровідності для ідеально контактуючих півпросторів, які відрізняються теплофізичними характеристиками і початковими значеннями температур. Задачі теплопровідності для багатошарових пластин з різними початковими температурами шарів розглядали у працях [10, 11, 13 та ін.], зокрема, у праці [10] тришаровою пластиною змодельовано систему пресування матриця–екран–пуансон, яку застосовують під час виготовлення екранів кінескопів. Автори цих досліджень отримали розв'язки, що містять ряди за коренями трансцендентних рівнянь. Така форма розв'язку незручна за малих часів, що зумовлено повільною збіжністю відповідних рядів (що менший час, то більше членів необхідно враховувати, підраховуючи їх суму). Математичні моделі нестационарного теплопереносу у шаруватих середовищах з окремими тонкими шарами за різних початкових температур складових побудовані у працях [3, 9]. Визначення температурного поля у трискладовому тілі з тонким проміжковим шаром зведено [9] до розв'язання задачі теплопровідності для двоскладового тіла за спеціальних умов контакту. Температурне поле в тонких шарах, припустивши, що температура по їх товщині у довільний момент часу змінюється за лінійним законом, описували [3] системою двох диференціальних рівнянь, кожне з яких має нижчу вимірність, ніж класичні рівняння теплопровідності.

У цій статті досліджено температурне поле та зумовлений ним термопружний стан у нерівномірно нагрітому безмежному трискладовому тілі з теплоізолюваною гладко закріпленою циліндричною поверхнею. Для розв'язання задачі теплопровідності використано матриці Гріна для трискладового простору, елементи якої виражено через функціональні ряди. Отриманий розв'язок зручний для числової реалізації, зокрема, за малих часів.

Постановка задачі термопружності. Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат r, φ, z необмежене трискладове циліндричне тіло з плоско-паралельними поверхнями поділу $z = 0$ і $z = h$ та теплоізолюваною гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження) поверхнею $r = R$. Визначимо нестационарне температурне поле і зумовлений ним напруження та переміщення в такому тілі за припущення, що фізико-механічні характеристики складових, між якими виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, є сталі; початкова температура у проміжковому шарі однакова по товщині, а для кожного з півбезмежних тіл змінюється експоненціально.

Побудова розв'язку задачі теплопровідності. Для визначення температурного поля маємо рівняння теплопровідності з узагальненими по координаті z похідними

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right] = c_v(z) \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (-\infty \leq z \leq \infty), \quad (1)$$

граничні та початкові умови

$$t(z, \tau)|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (2)$$

$$t(z, \tau)|_{\tau=0} = t_{01}(z) + \sum_{k=1}^2 [t_{0,k+1}(z) - t_{0,k}(z)] S(z - z_k), \quad (3)$$

$$t_{01}(z) = T_{01} e^{k_1 z}, \quad t_{02}(z) = T_{02}, \quad t_{03}(z) = T_{03} e^{-k_3(z-h)}, \quad (4)$$

де $\lambda_i(z)$ та $c_V(z)$ мають вигляд

$$\rho(z) = \rho^{(1)} + \sum_{k=1}^2 (\rho^{(k+1)} - \rho^{(k)}) S(z - z_k), \quad (5)$$

$S(z)$ – функція Хевісайда; $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, $z_1 = 0$, $z_2 = h$, індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першій складовій $-\infty \leq z \leq 0$, $i = 2$ – другій (проміжковому шару) $0 \leq z \leq h$, $i = 3$ – третій $h \leq z \leq +\infty$.

За допомогою функцій Гріна температурне поле шукатимемо у вигляді

$$t(z, \tau) = t_i(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 (t_{k+1}(z, \tau) - t_k(z, \tau)) S(z - z_k),$$

де температуру i -ої складової $t_i(z, \tau)$ визначаємо зі співвідношень

$$t_i(z, \tau) = \int_{-\infty}^0 c_{V1} G_{i1}(z, \zeta, \tau) T_{01} e^{k_1 \zeta} d\zeta + \int_0^h c_{V2} G_{i2}(z, \zeta, \tau) T_{02} d\zeta + \int_h^{\infty} c_{V3} G_{i3}(z, \zeta, \tau) T_{03} e^{-k_3(\zeta-h)} d\zeta, \quad (6)$$

де $G_{ij}(z, \zeta, \tau)$ – елементи матриці Гріна.

Підставивши у (6) вирази для елементів матриці Гріна [11] та виконавши інтегрування у правій частині, функції $t_i(z, \tau)$, подані у безрозмірних змінних, запишемо так [2]:

$$\begin{aligned} t_1(\bar{z}, Fo) &= \frac{T_{01}}{2} \left[\varphi_1(\bar{z}, Fo) + \nu_1 \varphi_1(-\bar{z}, Fo) + \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(2a_{12}^* n \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \right. \\ &\quad \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(2a_{12}^* \bar{h}(n+1) - \bar{z}, Fo) \right] + \chi_2 T_{02} [\psi_1(\bar{z}, Fo) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \psi_1(a_{12}^* \bar{h}(2n+1) - \bar{z}, Fo) - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \psi_1(2a_{12}^* \bar{h}(1+n) - \bar{z}, Fo)] + \\ &\quad + 2\chi_2 \chi_3 T_{03} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_3(-a_{31}^* \bar{z} + a_{32}^* \bar{h}(2n+1), Fo), \\ t_2(\bar{z}, Fo) &= \chi_1 T_{01} \left[\varphi_1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) - \right. \\ &\quad \left. - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \varphi_1(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) \right] + \frac{T_{02}}{2} [\psi_2(\bar{z}, Fo) - \nu_1 \psi_2(\bar{h} + \bar{z}, Fo) - \\ &\quad - \nu_2 \psi_2(2\bar{h} - \bar{z}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \psi_2(\bar{h}(1+2n) + \bar{z}, Fo) - \\ &\quad - \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \psi_2(2\bar{h}(1+n) - \bar{z}, Fo) + \nu_1 \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n (\psi_2(2\bar{h}(1+n) + \bar{z}, Fo) + \\ &\quad + \psi_2(\bar{h}(3+2n) - \bar{z}, Fo))] + \chi_3 T_{03} [\varphi_3(a_{32}^* (\bar{h} - \bar{z}), Fo) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_3 (a_{32}^* (\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_3 (a_{32}^* (\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) \Big], \\
t_3 (\bar{z}, Fo) &= 2\chi_1 \chi_4 T_{01} \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_1 (a_{12}^* (\bar{h} + 2n\bar{h}) + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}), Fo) + \chi_4 T_{02} \times \\
& \times \left[\psi_3 (\bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \psi_3 (\bar{z} + 2a_{32}^* n\bar{h}, Fo) - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \right. \\
& \times \psi_3 (\bar{z} + a_{32}^* (\bar{h} + 2n\bar{h}), Fo) \Big] + \frac{T_{03}}{2} [\varphi_3 (\bar{h} - \bar{z}, Fo) + v_2 \varphi_3 (\bar{z} - \bar{h}, Fo) + v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \\
& \times \varphi_3 (\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* n\bar{h}, Fo) - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_3 (\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* \bar{h} (1 + 2n), Fo) \Big], \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\varphi_i (x, Fo) = \exp [k_i (x + a_{is} k_i Fo)] \operatorname{erfc} \left(\frac{x + 2a_{is} k_i Fo}{2\sqrt{a_{is} Fo}} \right), \quad (i = 1, 3),$$

$$\psi_i^* (x, Fo) = \gamma_i \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x + \gamma_i a_{i2}^* \bar{h}}{2\sqrt{a_{is} Fo}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_{is} Fo}} \right) \right],$$

$$\psi_i (x, Fo) = \psi_i^* (x, Fo), \quad \gamma_1 = \gamma_2 = -1; \quad \psi_3 (x, Fo) = \psi_3^* (x - \bar{h}, Fo), \quad \gamma_3 = 1;$$

$$\text{де } a_{ij}^* = \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}; \quad \delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i}}; \quad v_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}; \quad v_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}; \quad \bar{z} = \frac{z}{l_0}; \quad Fo = \frac{a_s \tau}{l_0^2};$$

$$\bar{h} = \frac{h}{l_0}; \quad \bar{k}_i = k_i l_0; \quad a_{is} = \frac{a_i}{a_s}; \quad \chi_1 = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)} a_{12}^*}; \quad \chi_2 = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(1)} a_{21}^* + \lambda_t^{(2)}};$$

$$\chi_3 = \frac{\lambda_t^{(3)}}{\lambda_t^{(2)} a_{32}^* + \lambda_t^{(3)}}; \quad \chi_4 = \frac{\lambda_t^{(2)}}{\lambda_t^{(2)} + \lambda_t^{(3)} a_{23}^*}.$$

У співвідношеннях (7) члени функціональних рядів задовольняють нерівності

$$|(v_1 v_2)^n f_{i,n} (\bar{z}, Fo)| \leq C_n,$$

де $C_n = |v_1 v_2|^n$ – члени числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$, сума якого дорівнює сумі

геометричної прогресії $\frac{1}{1 - v_1 v_2}$; $f_{i,n} (\bar{z}, Fo)$ – одна з функцій

$\varphi_i (\bar{z}, Fo) \Big|_{\bar{z}=l_{ij}^0(z)+2a_{j2}^* n\bar{h}}$ або $\psi_i (\bar{z}, Fo) \Big|_{\bar{z}=l_{ij}^0(z)+2a_{j2}^* n\bar{h}}$. Тому згідно з ознакою Вейерштрасса [12] ряди у формулах (7) збігатимуться рівномірно. Для підрахунку їх суми можна обмежитись $n = N_0 \leq N$, де N вибираємо з умови

$$\sum_{n=0}^N (v_1 v_2)^n \approx \frac{1}{1 - v_1 v_2} \quad \left(\sum_{n=1}^N (v_1 v_2)^n \approx \frac{1}{1 - v_1 v_2} - 1 \right). \quad (8)$$

Встановимо один із діапазонів зміни товщини проміжкового шару і часу, коли співвідношення (7) спрощуються і, відповідно, скорочується час обчислень.

Подамо ряди в (7) у вигляді

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty} (v_1 v_2)^n f_{i,n} (\bar{z}, Fo) &= f_{i,n_0} (\bar{z}, Fo) \left[(v_1 v_2)^{n_0} + (v_1 v_2)^{n_0+1} \frac{f_{i,n_0+1} (\bar{z}, Fo)}{f_{i,n_0} (\bar{z}, Fo)} + \right. \\
& \left. + \mathbf{K} + (v_1 v_2)^{N_0} \frac{f_{i,N_0} (\bar{z}, Fo)}{f_{i,n_0} (\bar{z}, Fo)} + \mathbf{K} \right], \quad (9)
\end{aligned}$$

де n_0 дорівнює 1 або 0. Для функцій $\varphi_i(\bar{z}, Fo)$ дробу у (9) при $n = N$ запишемо так:

$$\frac{\varphi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* N \bar{h}, Fo)}{\varphi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo)} = \frac{e^{2N\bar{k}_i a_{i2}^* \bar{h}} \operatorname{erfc}\left(\frac{Na_{i2}^* \bar{h}}{\sqrt{a_{is} Fo}} + I_{ij}^\varphi(z) + \bar{k}_i \sqrt{a_{is} Fo}\right)}{e^{2\bar{k}_i a_{i2}^* \bar{h}} \operatorname{erfc}\left(\frac{n_0 a_{i2}^* \bar{h}}{\sqrt{a_{is} Fo}} + I_{ij}^\varphi(z) + \bar{k}_i \sqrt{a_{is} Fo}\right)}. \quad (10)$$

Звідси, за одночасного виконання нерівностей $2N\bar{k}_i a_{i2}^* \bar{h} \leq \alpha$, $\frac{Na_{i2}^* \bar{h}}{\sqrt{a_{is} Fo}} = \bar{k}_i \sqrt{a_{is} Fo}$ або рівнозначних їм

$$\bar{h} \leq \frac{\alpha}{2N\bar{k}_i a_{i2}^*}, \quad \left(h \leq \frac{\alpha}{2Nk_i a_{i2}^*} \right), \quad (11)$$

$$Fo \geq \frac{\alpha}{2\bar{k}_i^2 a_{is}}, \quad \left(\tau \geq \frac{\alpha}{2k_i^2 a_i} \right), \quad (12)$$

де α таке, що $e^\alpha \approx 1$, з (10) отримаємо $\frac{\varphi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* N \bar{h}, Fo)}{\varphi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo)} \approx 1$. Замінив-

ши у (9) дробу при $f_i(\bar{z}, Fo) = \varphi_i(\bar{z}, Fo)$ одиницею та врахувавши (8), матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n \bar{h}, Fo) &\approx \varphi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo) \times \\ &\times \sum_{n=n_0}^N (v_1 v_2)^n \approx \frac{\varphi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo)}{1 - v_1 v_2} - n_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Розглянемо ряди, що містять функції $\psi_i(\bar{z}, Fo)$ співвідношень (7). Використавши формулу [1]

$$\operatorname{erf}(x_0 + pg) = \operatorname{erf}x_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2} pg \left[1 - pgx_0 + \frac{1}{3} p^2 g^2 (2x_0^2 - 1) \right] + \varepsilon,$$

в якій, зокрема, при $g = 10^{-2}$ і $|p| \leq 1/2$ значення $|\varepsilon| < 1.2 \cdot 10^{-10}$, для функцій $\psi_i^*(\bar{z}, Fo)$ дістанемо:

$$\psi_i^*(x, Fo) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a_{is} Fo}} \frac{a_{i2}^* h}{4a_{is} Fo} \left[1 - \gamma_i \frac{a_{i2}^* h}{4a_{is} Fo} x + \frac{1}{3} \frac{(a_{i2}^* h)^2}{4a_{is} Fo} \left(\frac{2x^2}{4a_{is} Fo} - 1 \right) \right]. \quad (14)$$

З урахуванням (14) легко переконатися, що при

$$\frac{a_{i2}^* N \bar{h}}{\sqrt{a_{is} Fo}} = 1 \quad \left(h = \frac{\sqrt{a_{is} \tau}}{N} \right) \quad (15)$$

для функцій $\psi_i(\bar{z}, Fo)$ дробу у (9) $\frac{\psi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* N \bar{h}, Fo)}{\psi_i(I_{ij}^\varphi(z) + 2a_{i2}^* n_0 \bar{h}, Fo)} \approx 1$. Тому ряди,

що містять функції ψ_i , можна підсумувати аналогічно, як у виразі (13).

З урахуванням цих підсумувань співвідношення (7) істотно спростяться і набудуть вигляду

$$\varphi_1(\bar{z}, Fo) \approx \frac{T_{01}}{2} \left[\varphi_1(\bar{z}, Fo) + v_1 \varphi_1(-\bar{z}, Fo) - \frac{v_2 - v_1^2 v_2}{1 - v_1 v_2} \varphi_1(2a_{i2}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& +\chi_2 T_{02} \left[\Psi_1(\bar{z}, Fo) + \frac{v_1 v_2}{1-v_1 v_2} \Psi_1(3a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \frac{v_2}{1-v_1 v_2} \Psi_1(2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, Fo) \right] + \\
& \quad + \frac{2\chi_2 \chi_3 T_{03}}{1-v_1 v_2} \Phi_3(-a_{31}^* \bar{z} + a_{32}^* \bar{h}, Fo), \\
\mathcal{W}_2(\bar{z}, Fo) & \approx \chi_1 T_{01} \left[\Phi_1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \frac{v_2}{1-v_1 v_2} (v_1 \Phi_1(a_{12}^* (\bar{z} + 2\bar{h}), Fo) - \right. \\
& - \Phi_1(a_{12}^* (2\bar{h} - \bar{z}), Fo)) \left. \right] + \frac{T_{02}}{2} [\Psi_2(\bar{z}, Fo) - v_1 \Psi_2(\bar{h} + \bar{z}, Fo) - v_2 \Psi_2(2\bar{h} - \bar{z}, Fo) + \\
& + \frac{v_1 v_2}{1-v_1 v_2} (-v_1 \Psi_2(3\bar{h} + \bar{z}, Fo) - v_2 \Psi_2(4\bar{h} - \bar{z}, Fo) + \Psi_2(2\bar{h} + \bar{z}, Fo) + \\
& + \Psi_2(3\bar{h} - \bar{z}, Fo))] + \chi_3 T_{03} \left[\Phi_3(a_{32}^* (\bar{h} - \bar{z}), Fo) + \frac{v_1}{1-v_1 v_2} \times \right. \\
& \quad \left. \times (v_2 \Phi_3(a_{32}^* (3\bar{h} - \bar{z}), Fo) - \Phi_3(a_{32}^* (\bar{h} + \bar{z}), Fo)) \right], \\
\mathcal{W}_3(\bar{z}, Fo) & \approx \frac{2\chi_1 \chi_4 T_{01}}{1-v_1 v_2} \Phi_1(a_{12}^* \bar{h} + a_{13}^* \bar{z} - a_{13}^* \bar{h}, Fo) + \chi_4 T_{02} [\Psi_3(\bar{z}, Fo) + \\
& + \frac{v_1 v_2}{1-v_1 v_2} \Psi_3(\bar{z} + 2a_{32}^* \bar{h}, Fo) - \frac{v_1}{1-v_1 v_2} \Psi_3(\bar{z} + a_{32}^* \bar{h}, Fo)] + \frac{T_{03}}{2} \times \\
& \times \left[\Phi_3(-\bar{z} + \bar{h}, Fo) + v_2 \Phi_3(\bar{z} - \bar{h}, Fo) - \frac{v_1 - v_1 v_2^2}{1-v_1 v_2} \Phi_3(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* \bar{h}, Fo) \right]. \quad (16)
\end{aligned}$$

Якщо $T_{01} = T_{03} = 0$, то для використання співвідношень (16) достатньо виконання умови (15).

Часткові випадки. Поклавши у (7) $a_2 = a_3$, $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(3)}$, отримаємо розв'язок задачі теплопровідності для двох півбезмежних тіл, в яких початкова температура першого тіла $T_{01} e^{k_1 z}$, а другого $T_{03} e^{-k_3(z-h)}$, за винятком смуги товщиною h , яка нагріта до температури T_{02} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1(\bar{z}, Fo) & = \frac{T_{01}}{2} [\Phi_1(\bar{z}, Fo) + v_1 \Phi_1(-\bar{z}, Fo)] + \chi_2 T_{02} \Psi_1(\bar{z}, Fo) + \\
& \quad + \chi_3 T_{03} \Phi_3(-a_{31}^* \bar{z} + \bar{h}, Fo), \\
\mathcal{W}_2(\bar{z}, Fo) & = \chi_1 T_{01} \Phi_1(a_{13}^* \bar{z}, Fo) + \frac{T_{02}}{2} [\Psi_2(\bar{z}, Fo) - v_1 \Psi_2(\bar{z} + \bar{h})] + \\
& \quad + \frac{T_{03}}{2} [\Phi_3(-\bar{z} + \bar{h}, Fo) - v_1 \Phi_3(\bar{z} + \bar{h}, Fo)]. \quad (17)
\end{aligned}$$

Поклавши у (17) $h = 0$, $T_{02} = T_{03}$ і перепозначивши $k_2 = k_3$, отримаємо розв'язок задачі для двох півбезмежних тіл, початкові температури яких задають відповідно $T_{01} e^{k_1 z}$ та $T_{02} e^{-k_2 z}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1(\bar{z}, Fo) & = \frac{T_{01}}{2} [\Phi_1(\bar{z}, Fo) + v_1 \Phi_1(-\bar{z}, Fo)] + \chi_2 T_{02} \Phi_2(-a_{21}^* \bar{z}, Fo), \\
\mathcal{W}_2(\bar{z}, Fo) & = \chi_1 T_{01} \Phi_1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \frac{T_{02}}{2} [\Phi_2(-\bar{z}, Fo) - v_1 \Phi_2(\bar{z}, Fo)].
\end{aligned}$$

Спрямовуючи у (7) $\lambda_t^{(3)} \rightarrow \infty$ або $\lambda_t^{(3)} \rightarrow 0$ при $T_{03} = 0$, дістанемо вирази для визначення температурного поля у кусково-однорідному півпросторі:

$$\mathcal{W}_1(\bar{z}, Fo) = \frac{T_{01}}{2} \left[\Phi_1(\bar{z}, Fo) + v_1 \Phi_1(-\bar{z}, Fo) + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 \beta)^n \Phi_1(2a_{12}^* n \bar{h} - \bar{z}, Fo) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \varphi_1 (2a_{12}^* n \bar{h} + 2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, F_0) \Big] + \chi_2 T_{02} [\psi_1(\bar{z}, F_0) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \psi_1 (2a_{12}^* n \bar{h} + a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, F_0) - \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \psi_1 (2a_{12}^* n \bar{h} + 2a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, F_0) \Big], \\
 & \varphi_2(\bar{z}, F_0) = \chi_1 T_{01} \left[\varphi_1 (a_{12}^* \bar{z}, F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \varphi_1 (a_{12}^* \bar{z} + 2a_{12}^* n \bar{h}, F_0) - \right. \\
 & \left. - \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \varphi_1 (2a_{12}^* \bar{h} - a_{12}^* \bar{z} + 2a_{12}^* n \bar{h}, F_0) \right] + \frac{T_{02}}{2} [\psi_2(\bar{z}, F_0) - \nu_1 \psi_2(\bar{h} + \bar{z}, F_0) - \\
 & - \beta \psi_2(2\bar{h} - \bar{z}, F_0) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \psi_2(\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, F_0) - \\
 & - \beta \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n \psi_2(2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, F_0) + \nu_1 \beta \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \beta)^n (\psi_2(2\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, F_0) + \\
 & + \psi_2(3\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, F_0))] \Big],
 \end{aligned}$$

де $\beta = 1$, якщо поверхня $z = h$ підтримується за нульової температури, а $\beta = -1$, якщо вона теплоізолювана.

Отримано також низку інших часткових випадків, які збігаються з відомими в літературі [4, 5, 7, 8], для одно- та двоскладових нерівномірно нагрітих безмежних тіл.

Розв'язок задачі термопружності. Оскільки температурне поле у тілі змінюється по товщині, то в ньому виникатимуть лише радіальні та колові напруження [6]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(\bar{z}, F_0) = -\frac{E(\bar{z})}{1-\nu(\bar{z})} \alpha_t(\bar{z}) t(\bar{z}, F_0).$$

При цьому радіальні переміщення відсутні, а осьові (без урахування переміщень тіла як твердого цілого) визначають із співвідношення

$$w(\bar{z}, F_0) = \int_{h/2}^{\bar{z}} \frac{1+\nu(z)}{1-\nu(z)} \alpha_t(z) t(z, F_0) dz. \quad (18)$$

Тут коефіцієнт Пуассона $\nu(\bar{z})$, модуль пружності $E(\bar{z})$ та коефіцієнт лінійного розширення $\alpha_t(\bar{z})$ мають вигляд (5).

Підставивши співвідношення (7) у (18) та знайшовши відповідні інтеграли, отримаємо такі вирази для визначення переміщень:

$$\begin{aligned}
 w(\bar{z}, F_0) &= \varphi_1 \left(\bar{z}, \frac{\bar{h}}{2}, F_0 \right) + \sum_{k=1}^2 [\varphi_{k+1}(\bar{z}, z_k, F_0) - \varphi_k(\bar{z}, z_k, F_0)] S(\bar{z} - z_k) - \\
 & - \left(\varphi_2 \left(\frac{\bar{h}}{2}, 0, F_0 \right) - \varphi_1 \left(\frac{\bar{h}}{2}, 0, F_0 \right) \right), \\
 \frac{w_1(\bar{z}, F_0)}{\eta_1} &= \frac{T_{01}}{2K_1} \left[\gamma_1^1(\bar{z}, F_0) - \nu_1 \gamma_1^1(-\bar{z}, F_0) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \gamma_1^1(2a_{12}^* n \bar{h} - \bar{z}, F_0) - \right. \\
 & - \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \gamma_1^1(2a_{12}^* \bar{h} (1+n) - \bar{z}, F_0) \Big] + \chi_2 T_{02} \left[\gamma_2^1(\bar{z}, F_0) - \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\
 & \times \gamma_2^1(a_{12}^* \bar{h} (1+2n) - \bar{z}, F_0) + \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \gamma_2^1(2a_{12}^* \bar{h} (1+n) - \bar{z}, F_0) \Big] - \\
 & - 2\chi_2 \chi_3 \frac{T_{03}}{K_3 a_{31}^*} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \gamma_1^3(-a_{31}^* \bar{z} + a_{32}^* \bar{h} (1+2n), F_0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{w_2(\bar{z}, Fo)}{\eta_2} &= \chi_1 \frac{T_{01}}{k_1 a_{12}^*} \left[\mathcal{W}_1^1(a_{12}^* \bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \mathcal{W}_1^1(a_{12}^* (\bar{z} + 2n\bar{h}), Fo) + v_2 \times \right. \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \mathcal{W}_1^1(2a_{12}^* \bar{h}(n+1) - a_{12}^* \bar{z}, Fo) \left. \right] + \frac{T_{02}}{2} \left[\mathcal{W}_2^1(\bar{z}, Fo) - v_1 \mathcal{W}_2^1(\bar{h} + \bar{z}, Fo) + \right. \\ &+ v_2 \mathcal{W}_2^1(2\bar{h} - \bar{z}, Fo) - v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \mathcal{W}_2^1(\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) - v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \\ &\times \mathcal{W}_2^1(2\bar{h}(n+1) - \bar{z}, Fo) + v_1 v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n (\mathcal{W}_2^1(2\bar{h}(n+1) + \bar{z}, Fo) - \\ &- \mathcal{W}_2^1(\bar{h}(3+2n) - \bar{z}, Fo)) \left. \right] + \chi_3 \frac{T_{03}}{k_3 a_{32}^*} \left[\mathcal{W}_3^1(a_{32}^* (\bar{h} - \bar{z}), Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \right. \\ &\times \mathcal{W}_3^1(a_{32}^* \bar{h}(2n+1) - a_{32}^* \bar{z}, Fo) - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \mathcal{W}_3^1(a_{32}^* \bar{h}(2n+1) + a_{32}^* \bar{z}, Fo) \left. \right], \\ \frac{w_3(\bar{z}, Fo)}{\eta_3} &= 2\chi_1 \chi_4 \frac{T_{01}}{k_1 a_{13}^*} \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \mathcal{W}_1^1(a_{12}^* \bar{h}(1+2n) + a_{13}^* (\bar{z} - \bar{h}), Fo) + \chi_4 T_{02} \times \\ &\times \left[\mathcal{W}_3^1(\bar{z}, Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \mathcal{W}_3^1(\bar{z} + 2a_{32}^* n\bar{h}, Fo) - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \right. \\ &\times \mathcal{W}_3^1(\bar{z} + a_{32}^* \bar{h}(1+2n), Fo) \left. \right] + \frac{T_{03}}{2k_3} \left[-\mathcal{W}_3^1(-\bar{z} + \bar{h}, Fo) + v_2 \mathcal{W}_3^1(\bar{z} - \bar{h}, Fo) + v_2 \times \right. \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \mathcal{W}_3^1(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* n\bar{h}, Fo) - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \mathcal{W}_3^1(\bar{z} - \bar{h} + 2a_{32}^* \bar{h}(1+n), Fo) \left. \right], \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_i^j(x, y, Fo) = w_i(x, Fo) - w_i(y, Fo),$$

$$\gamma_1^i(x, Fo) = \exp[k_i(x + \bar{k}_i a_{is} Fo)] \operatorname{erfc}\left(\frac{x + 2\bar{k}_i a_{is} Fo}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right),$$

$$\begin{aligned} \gamma_2^i(x, Fo) &= 2\sqrt{a_{is} Fo} \left(\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{is} Fo}} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a_{is} Fo}\right] - \right. \\ &\left. - \left(\frac{x - a_{i2}^*}{2\sqrt{a_{is} Fo}} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{x - a_{i2}^*}{2\sqrt{a_{is} Fo}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x - a_{i2}^*)^2}{4a_{is} Fo}\right] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(x, Fo) &= 2\sqrt{a_{3s} Fo} \left(\left(\frac{x - \bar{h} + a_{32}^* \bar{h}}{2\sqrt{a_{3s} Fo}} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{x - \bar{h} + a_{32}^* \bar{h}}{2\sqrt{a_{3s} Fo}}\right) + \right. \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{h} + a_{32}^* \bar{h})^2}{4a_{3s} Fo}\right] - \left(\frac{x - \bar{h}}{2\sqrt{a_{3s} Fo}} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{x - \bar{h}}{2\sqrt{a_{3s} Fo}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{h})^2}{4a_{3s} Fo}\right] \left. \right), \end{aligned}$$

$$\text{де } \eta_i = \frac{1 + v_i}{1 - v_i} \alpha_t^i.$$

Числові результати. Дослідимо поведінку полів температури (за точними та наближеними формулами), переміщень і напружень у трискладовому тілі для випадку, коли матеріалами півпросторів є срібло ($\lambda_t = 410 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{С})$, $a = 0.1685 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $v = 0.37$, $E = 82.7 \cdot 10^9 \text{ Н}/\text{м}^2$, $\alpha_t = 19.5 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$), а проміжкового шару – двоокис цирконію ($\lambda_t = 1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{С})$, $a = 0.53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $v = 0.31$, $E = 172 \cdot 10^9 \text{ Н}/\text{м}^2$,

$\alpha_t = 10.6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) при $k_1 = k_3 = 1 \text{ м}^{-1}$, $l_0 = 1 \text{ м}$, $a_s = 1 \text{ м}^2 / \text{с}$, $T_{01} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{02} = 200 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{03} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

На рис. 1 зображені залежності температури від координати в проміжковому шарі та в приповерхневих областях півпросторів для фіксованих товщин та різних моментів часу. Криві 1–9 на рис. 1а відповідають $\tau = 10^{-3}$; 10^{-2} ; 10^{-1} ; $2 \cdot 10^{-1}$; $5 \cdot 10^{-1}$; 1 , 10^2 ; 10^3 та 10^4 с ; на рис. 1б – $\tau = 10^{-5}$; 10^{-4} ; 10^{-3} ; $2 \cdot 10^{-3}$; $5 \cdot 10^{-3}$; 10^{-2} ; 10 ; 10^2 та 10^3 с ; на рис. 1в – $\tau = 10^{-7}$; 10^{-6} ; 10^{-5} ; $2 \cdot 10^{-5}$; $5 \cdot 10^{-5}$; 10^{-4} ; 10^{-2} ; 10^{-1} та 10 с .

З аналізу графіків випливає, що для кожного проміжкового шару існує характерний час τ^* , починаючи з якого температура має чітко виражений лінійний розподіл по товщині. Причому, що більше h , то більше τ^* . Розподіли температур для кожного h за різних часів τ з інтервалу $(0, \tau^*)$ по товщині проміжкового шару можуть істотно відрізнятись. Для дуже малих часів температура, як і слід було очікувати, близька до початкової.

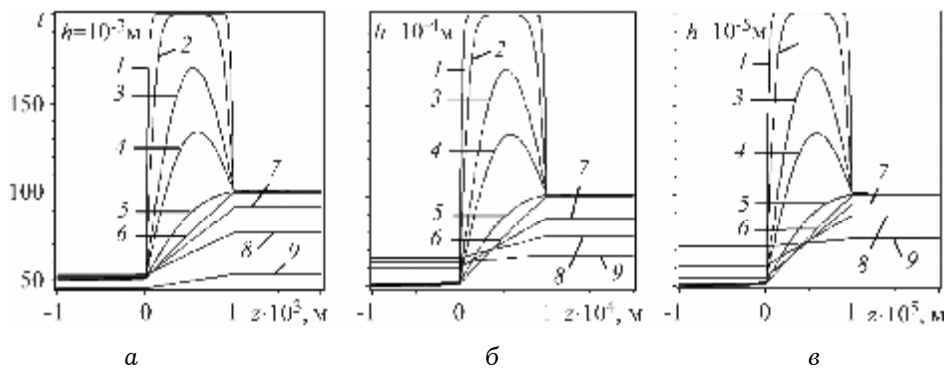


Рис. 1.

Для порівняльного аналізу розподілів температури, підрахованих за точними і спрощеними співвідношеннями, встановимо межі застосовності останніх для обраних характеристик. Оскільки $\nu_1 \nu_2 \approx 0.95$, то з умови (8), обмежившись точністю до трьох знаків після коми, знаходимо $N = 180$. Приймаючи $\alpha = 10^{-3}$, з нерівностей (11), (12) і (15) отримаємо, що співвідношення (16) можна використовувати, якщо

$$\tau > 30 \text{ с}, \quad h \leq 10^{-6} \text{ м}. \quad (19)$$

На рис. 2 і 3 зображено розподіли температури, обчислені за формулами (7) (суцільна лінія) та (16) (штрихова). На рис. 2а криві відповідають $\tau = 30 \text{ с}$ та різним h : 1 – $0.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ і 2 – 10^{-6} м . Для більш розширеної області на рис. 2б проілюстровані розподіли температури за різних часів (1 – $\tau = 10^{-1} \text{ с}$; 2 – 5; 3 – 30 с) за фіксованого $h = 10^{-6} \text{ м}$. За цієї ж товщини проміжкового шару на рис. 3 зображено залежності температури від часу на поверхнях поділу $z = 0$ і $z = h$. Бачимо, що чим ближчі значення часів і товщин проміжкового шару до правих частин відповідних умов (19), то менша похибка між температурами, обчисленими за виразами (7) і за (16). При $\tau > 30 \text{ с}$ і $h = 10^{-6} \text{ м}$ відносна похибка не перевищує 0.3%.

Зауважимо, що на основі виконаних аналогічних досліджень для інших матеріалів складових встановлено, що чим менше $|\nu_1 \nu_2|$, то більші товщини проміжкового шару h і менші часи τ , за яких можна використовувати співвідношення (8).

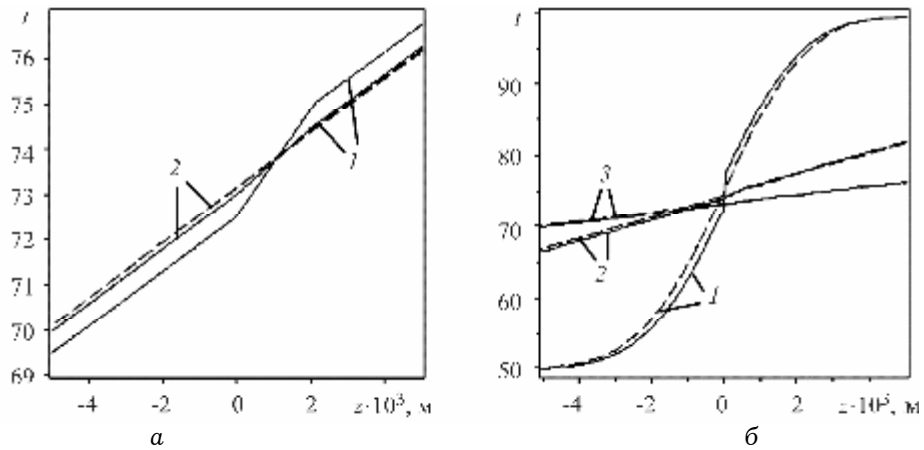


Рис. 2.

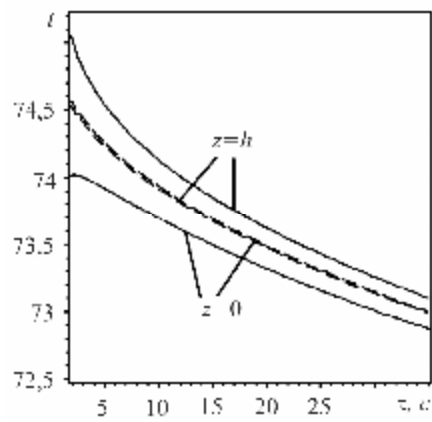


Рис. 3.

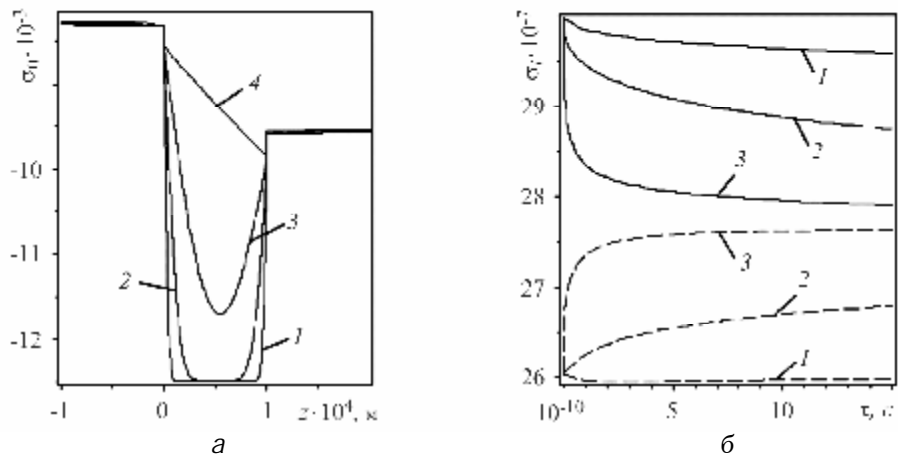


Рис. 4.

На рис. 4а зображено розподіл напружень в області проміжкового шару та приповерхневих областях півбезмежних складових за різних τ (1 – 10^{-5} с; 2 – 10^{-4} ; 3 – 10^{-3} ; 4 – 10^{-2} с) за фіксованого $h = 10^{-4}$ м. Характер поведінки напружень у кожній з областей аналогічний, як і температури,

але за переходу на проміжковий шар спостерігається їх стрибок. На рис.4б наведено залежності стрибків напружень $\sigma_j(\tau) = |\sigma_j(z_j, \tau) - \sigma_{j+1}(z_j, \tau)|$ від часу за різних товщин h на поверхнях $z=0$ (штрихова лінія) та $z=h$ (суцільна). Криві 1–3 відповідають – $h = 10^{-3}$; 10^{-4} і 10^{-5} . Бачимо, що зі збільшенням величини h стрибок на поверхні $z=0$ зменшується, а на поверхні $z=h$ збільшується. З часом, оскільки температура на поверхнях поділу вирівнюватиметься, то стрибки ставатимуть однаковими для кожного із проміжкових шарів.

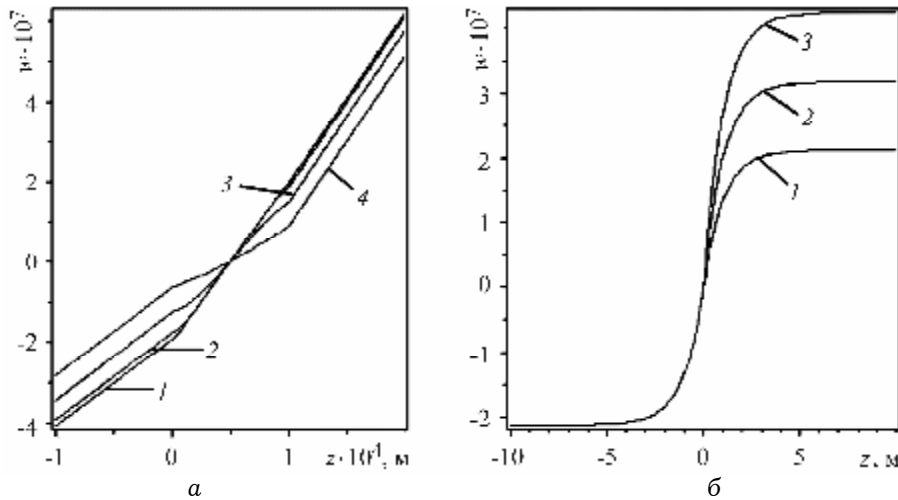


Рис. 5.

Залежності переміщень від координати при $h = 10^{-4}$ м для різних часів τ (1 – $\tau = 10^{-5}$ с; 2 – 10^{-4} ; 3 – 10^{-3} і 4 – 10^{-2} с) зображені на рис.5а, а за фіксованого $\tau = 10^{-5}$ с за різних T_{03} (1 – $T_{03} = 50^\circ\text{C}$; 2 – 75 і 3 – 100°C) – на рис. 5б. Переміщення мають лінійний розподіл по товщині проміжкового шару, що спостерігалось і для інших часів. За однакових початкових температур півбезмежних складових розподіл переміщень, як і слід було очікувати, є асиметричним відносно середини проміжкового шару. Зі збільшенням значення T_{03} переміщення в першій складовій практично не змінюються, а у третій зростають.

Висновки. Розв'язано квазістатичну задачу термопружності для нерівномірно нагрітого кусково-однорідного тіла, складеного із двох ідеально контактуючих півбезмежних тіл, з'єднаних проміжковим шаром, на товщину якого обмеження не накладали. При цьому використано підхід, який базується на застосуванні узагальнених функцій та функцій Гріна нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору у вигляді функціональних рядів.

На основі знайденого розв'язку задачі теплопровідності отримано наближені співвідношення, які є простішими для програмної реалізації та потребують значно менше часу для обчислень. Встановлено межі їх застосовності. З отриманого аналітичного розв'язку одержано низку часткових випадків для одно- та двоскладових тіл.

Досліджено вплив фізико-механічних характеристик, товщини проміжкового шару та часу на розподіл температури і викликаних ним полів напружень та переміщень. Зокрема, встановлено, що припущення про лінійний розподіл по товщині проміжкового шару для переміщень, на відміну від температури та напружень, справедливе незалежно від часу.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і Російського фонду фундаментальних досліджень (№ держреєстрації 0112U005002).

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Горун О. П.* Одновимірне температурне поле двох півпросторів, з'єднаних проміжковим шаром за різних початкових температур // Тези доп. конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я. С. Підстригача. – Львів: ІППММ, 2011. – С. 65–66.
3. *Дяконюк Л., Савула Я.* Гетерогенний підхід до моделювання процесу теплоперенесення в багатошарових конструкціях із врахуванням малих товщин окремих шарів // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2005. – Вип. 1. – С. 61–70.
4. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488с.
5. *Коваленко А. Д.* Избранные труды. – К.: Наукдумка, 1976. – 762 с.
6. *Кушинір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – № 6. – С. 31–38.
7. *Львов А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
8. *Пехович А. И., Жидких В. М.* Расчеты теплового режима твердых тел. – Л.: Энергия, 1976. – 352 с.
9. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инж.-физ. журн. – 1963. – 6. № 10. – С. 59–64.
10. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электро-вакуумных приборов. – К.: Наук. думка, 1981. – 342 с.
11. *Процюк Б. В., Верба І. І.* Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу // Вісник Львів. ун.-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 200–205.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. – М.: Наука, 1968. – Т.2. – 464 с.
13. *F. de Monte.* Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 2000. – 43. – P. 3607–3619.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА ПРИ ОСТЫВАНИИ ЗА РАЗНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУР СОСТАВЛЯЮЩИХ

С использованием подхода, основанного на применении обобщенных функций и функций Грина для трехсоставного пространства, найдено аналитическое решение квазистатической задачи термоупругости для неравномерно нагретого безграничного трехсоставного тела. Получены упрощенные соотношения для определения температурных полей и установлены границы их применимости. Приведены результаты численных исследований температуры, напряжений и перемещений.

THE THERMOELASTIC STATE OF A PIECEWISE HOMOGENEOUS BODY DURING THE COOLING DOWN BY DIFFERENT INITIAL TEMPERATURES OF COMPONENTS

With using of an approach, which is based on the applying of generalized functions and Green's functions for a three-component body, an analytical solution for the quasi-static thermoelastic problem for a non uniformly heated infinite threelayer body is obtained. Simplified equations for determining the temperature fields are produced and the limits of their applicability are founded. The results of numerical researches of temperature, stresses and displacements are presented.