

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН БАГАТОШАРОВОГО НЕОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА
ЗА РІВНОМІРНОГО СТИСКУ БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ**

На основі методу безпосереднього інтегрування запропоновано методуку побудови розв'язку плоскої осесиметричної задачі теорії пружності для суцільного кругового циліндра, складеного з концентричних неперервно-неоднорідних за радіальною змінною шарів, за умов ідеального механічного контакту. Досліджено вплив на напружений стан розривності та гладкості функцій, які задають залежність властивостей матеріалів шарів циліндра від радіальної координати, на поверхнях зчеплення шарів.

Вступ. Щоб поліпшити міцнісні характеристики багатошарових елементів конструкцій у формі суцільних та порожнистих циліндрів, необхідно дослідити вплив на їх напружений стан механічних та геометричних властивостей кожного з шарів, умов їхнього контакту, «контрастності» властивостей сусідніх шарів тощо [16]. Основні підходи до оптимального проектування шаруватих циліндричних тіл викладено у працях [18, 23]. Вони засновані на використанні аналітичних та напіваналітичних методів розрахунку напруженого стану кусково-однорідних тіл [3, 5, 9, 11, 14, 15, 20 та ін.].

Додатковим поштовхом до вивчення пружної поведінки шаруватих структур став один із підходів до аналізу неперервно-неоднорідних в одному з просторових напрямків тіл, за яким ці напрямки моделюють тонкими шарами зі сталими властивостями і перпендикулярними до напрямку неоднорідності поверхнями поділу так, щоб у сукупності їх механічні характеристики наближено відтворювали властивості змодельованого тіла [6, 24]. Після такої побудови розв'язку задачі товщину кожного шару зменшують, збільшуючи відповідно їх кількість, і отримують наближений розв'язок для неперервно-неоднорідного матеріалу. Попри переваги, пов'язані зі сталістю характеристик матеріалу у межах кожного шару, розв'язок для багатошарового тіла збігається зі збільшенням кількості шарів та зменшенням їх товщини до шуканого досить повільно, особливо для значних градієнтів у вихідних властивостях матеріалу. Для досягнення прийнятної точності практичних розрахунків доводиться брати доволі велику кількість шарів, що суттєво збільшує обсяг обчислень. Для оптимізації такого підходу запропоновано [13] наближати властивості матеріалу не кусково-сталою функцією, а ламаною (властивості кожного шару подано лінійною функцією, що забезпечує неперервність, проте не завжди – гладкість властивостей матеріалу). Аналогічний підхід описаний у праці [21], де властивості матеріалу у межах кожного шару наближено експоненційними функціями. Так задачу вивчення пружної поведінки неперервно-неоднорідного тіла з довільною залежністю властивостей матеріалу від координати зводять до задачі для шаруватої структури тієї ж форми із заданим у простому для аналізу типу неоднорідності кожного шару. Однак для поліпшення ефективності такого підходу слід розвивати методи, які дають можливість аналізувати напружений стан таких структур за довільного характеру неоднорідності кожного шару. Слід зауважити, що таку неоднорідність можуть спричинити технологічні [12, 19] чи експлуатаційні чинники, зокрема, залежність властивостей матеріалу від температури [10].

Одним із ефективних підходів до розв'язання задач теорії пружності для неоднорідних тіл є спосіб, заснований на використанні методу безпосереднього інтегрування, запропонованого В. М. Вігаком [2], який полягає у зведенні вихідних диференціальних рівнянь задачі до розв'язання інтегрального рівняння Вольтерри другого роду з інтегральними умовами [4, 7].

Такий підхід ефективно поширено для багат шарових неоднорідних покриттів [17] та багат шарових порожнистих термочутливих циліндричних тіл [8].

Нижче метод безпосереднього інтегрування застосовано до побудови розв'язку одновимірної задачі теорії пружності для суцільного шаруватого циліндра, властивості кожного шару якого довільно залежать від радіальної координати. Для розв'язання ключового інтегрального рівняння Вольтерри використано метод резольвентного ядра [1]. На основі отриманого розв'язку в межах єдиного підходу проаналізовано вплив на напружений стан умов узгодження між властивостями матеріалів сусідніх шарів на поверхнях контакту.

Формулювання задачі. Розглянемо плоску задачу теорії пружності, яка полягає у розрахунку напруженого стану багат шарового неоднорідного суцільного циліндра, торці якого зацемлені між двома жорсткими та гладкими площинами, за навантаження бічної поверхні $\rho = k$ радіальним зовнішнім зусиллям $-\rho$ (рис. 1). Тут $\rho = r/l$, $k = R_0/l$, r та l – відповідно розмірні радіальна координата та характерна довжина, R_0 – радіус циліндра. Вважаємо, що шари циліндра є в ідеальному механічному контакті, а пружні властивості матеріалів мають вигляд [3, 14]

$$\nu(\rho) = \sum_{i=1}^M \nu_i(\rho) S_i(\rho), \quad G(\rho) = \sum_{i=1}^M G_i(\rho) S_i(\rho), \quad (1)$$

де $\nu(\rho)$, $G(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву; M – кількість шарів; $\rho = \rho_j$ ($j = \overline{1, M-1}$) – межі спряження шарів; $\rho_0 = 0$ і $\rho_M = k$; $\nu_i(\rho)$, $G_i(\rho)$ – задані для проміжків $\rho \in [\rho_{j-1}, \rho_j)$ значення коефіцієнта Пуассона і модуля зсуву; $S_i(\rho) = H(\rho - \rho_{i-1}) - H(\rho - \rho_i)$; $H(\rho)$ – функція Хевісайда ($H(\rho) = 0$, $\rho < 0$ і $H(\rho) = 1$, $\rho \geq 0$). За умов ідеального механічного контакту напружений стан циліндра описують рівняння [2, 3] рівноваги

$$\frac{d}{d\rho} (\rho^2 \sigma_r) = \rho \sigma, \quad \rho \in [0, k] \quad (2)$$

та суцільності

$$\left(\frac{1 - \nu(\rho)}{G(\rho)} \sigma \right)' = \sigma_r \left(\frac{1}{G(\rho)} \right)', \quad (3)$$

яке отримано з рівняння суцільності в деформаціях із використанням фізичних співвідношень [2] та рівняння рівноваги (2). Рівняння (2), (3) слід розв'язати за виконання крайової умови

$$\sigma_r|_{\rho=k} = -\rho \quad (4)$$

та умови обмеженості напружень при $\rho = 0$. Тут

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\phi \quad (5)$$

– сумарні напруження; σ_r , σ_ϕ – відповідно радіальні та колові напруження, а штрихом та $d/d\rho$ позначено узагальнену та класичну похідні за радіальною координатою.

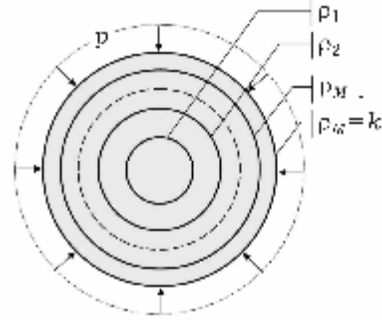


Рис. 1. Багат шаровий неоднорідний циліндр під дією рівномірно розподіленого силового навантаження.

Побудова розв'язку задачі. Із застосуванням методу безпосереднього інтегрування [2, 3, 7] побудову розв'язку задачі (1)–(4) зведемо до розв'язання інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$\sigma(\rho) = A \frac{G(\rho)}{1-\nu(\rho)} + \int_0^\rho \sigma(\eta) \mathbf{K}(\rho, \eta) d\eta, \quad (6)$$

де

$$\mathbf{K}(\rho, \eta) = \frac{G(\rho)}{1-\nu(\rho)} \eta \int_\eta^\rho \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{1}{G(\xi)} \right) d\xi \quad (7)$$

– ядро інтегрального рівняння (6), а сталу інтегрування A знайдемо, використовуючи інтегральну умову [2, 3, 7]

$$\int_0^k \rho \sigma(\rho) d\rho = -k^2 \rho. \quad (8)$$

З урахуванням формул (1) та зв'язку між узагальненою та класичною похідними [14] ядро (7) інтегрального рівняння (6) запишемо у вигляді

$$\mathbf{K}(\rho, \eta) = \sum_{I=1}^M \sum_{J=1}^I \mathbf{K}_{IJ}(\rho, \eta) S_I(\rho) S_J(\eta),$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ}(\rho, \eta) = & \eta \frac{G_I(\rho)}{1-\nu_I(\rho)} \left[\frac{1}{\rho^2 G_I(\rho)} - \frac{1}{\eta^2 G_J(\eta)} + 2 \sum_{i=J}^{I-1} \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \frac{d\xi}{\xi^3 G_i(\xi)} + \right. \\ & \left. + 2 \int_{\rho_{I-1}}^{\rho} \frac{d\xi}{\xi^3 G_I(\xi)} - 2 \int_{\rho_{J-1}}^{\eta} \frac{d\xi}{\xi^3 G_J(\xi)} \right], \quad \rho \in [\rho_{I-1}, \rho_I), \quad \eta \in [\rho_{J-1}, \rho_J), \quad J \leq I. \end{aligned} \quad (9)$$

Розв'язок задачі (6), (8) знайдемо, застосовуючи метод резольвентного ядра [1]:

$$\sigma(\rho) = -\frac{k^2 \rho}{a} \varphi(\rho), \quad (10)$$

де

$$a = \int_0^k \rho \varphi(\rho) d\rho, \quad \varphi(\rho) = \frac{G(\rho)}{1-\nu(\rho)} + \int_0^\rho \frac{G(\eta)}{1-\nu(\eta)} \mathbf{R}(\rho, \eta) d\eta, \quad (11)$$

$$\mathbf{R}(\rho, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{R}_{n+1}(\rho, \eta), \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_1(\rho, \eta) = \mathbf{K}(\rho, \eta), \quad \mathbf{R}_{n+1}(\rho, \eta) = \int_\eta^\rho \mathbf{R}_1(\rho, t) \mathbf{R}_n(t, \eta) dt. \quad (13)$$

Слід зауважити, що вираз (10) тотожно задовольняє інтегральну умову (8) за довільної функції $\mathbf{R}(\rho, \eta)$. Застосовуючи отриману шляхом інтегрування рівняння рівноваги (2) формулу

$$\rho^2 \sigma_r(\rho) = \int_0^\rho \eta \sigma(\eta) d\eta,$$

з якої при $\rho = k$ з урахуванням умови (4) впливає інтегральна умова (8), знайдемо радіальні напруження

$$\sigma_r(\rho) = -\frac{k^2 \rho}{a \rho^2} \int_0^\rho \eta \varphi(\eta) d\eta. \quad (14)$$

З виразів (5), (10), (14) знаходимо колові напруження

$$\sigma_{\varphi}(\rho) = -\frac{k^2 \rho}{a} \left(\varphi(\rho) - \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\rho} \eta \varphi(\eta) d\eta \right). \quad (15)$$

Таким чином, вираз для сумарних напружень (10) тотожно задовольняє рівняння (2) та умову (8), якщо вираз для резольвенти взято у вигляді безмежного ряду (12). Однак для практичних обчислень вживають наближену формулу для резольвенти

$$\mathbf{R}(\rho, \eta) \approx \mathbf{R}^{(N)}(\rho, \eta) = \sum_{n=0}^N \mathbf{R}_{n+1}(\rho, \eta). \quad (16)$$

За використання формули (16) замість точної (12) рівняння (2) задовольняється наближено.

Зауважимо, що коли властивості матеріалу сталі, тобто $G_i = \text{const}$, $\nu_i = \text{const}$ ($i = \overline{1, M}$), то вираз для ядра (9) спрощується до вигляду

$$\mathbf{K}_{IJ}(\rho, \eta) = \eta \frac{G_I}{1 - \nu_I} \left[\frac{1}{\rho_{I-1}^2 G_I} - \frac{1}{\rho_{J-1}^2 G_J} + \sum_{i=J}^{I-1} \frac{\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2}{\rho_{i-1}^2 \rho_i^2 G_i} \right].$$

Числові приклади та обговорення. Розрахуємо напружений стан тришарового ($M = 3$) циліндра ($k = 1$), внутрішній ($\rho_0 \leq \rho < \rho_1$) та зовнішній ($\rho_2 \leq \rho < \rho_3$) шари якого однорідні й виготовлені відповідно з нержавної сталі ($E_1 = 200 \text{ GPa}$, $\nu_1 = 0.29$) та оксиду алюмінію ($E_3 = 380 \text{ GPa}$, $\nu_3 = 0.25$) [22], а проміжний шар ($\rho_1 \leq \rho < \rho_2$) неоднорідний. Здійснюватимемо розрахунки для трьох різних типів залежності властивостей матеріалу проміжного шару від радіальної координати:

A) $G_2 = \frac{1}{2}(G_1 + G_3)$, $\nu_2 = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_3)$ – пружні характеристики шару сталі і дорівнюють середнім арифметичним значенням відповідних характеристик сусідніх з ним шарів;

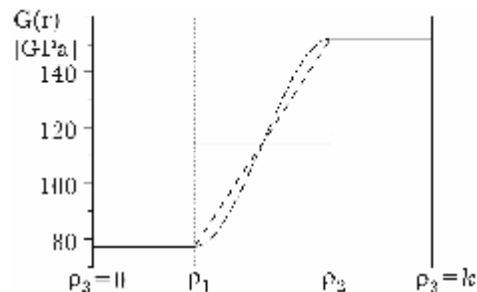
B) $G_2 = \frac{G_3 - G_1}{\rho_2 - \rho_1} \rho + \frac{\rho_2 G_1 - \rho_1 G_3}{\rho_2 - \rho_1}$, $\nu_2 = \frac{\nu_3 - \nu_1}{\rho_2 - \rho_1} \rho + \frac{\rho_2 \nu_1 - \rho_1 \nu_3}{\rho_2 - \rho_1}$ – пружні характеристики шару змінюються лінійно і дорівнюють на його межах відповідним характеристикам сусідніх з ним шарів;

$$B) \quad G_2 = \frac{2(G_1 - G_3)}{(\rho_2 - \rho_1)^3} \left(\rho^3 - \frac{3\rho^2}{2(\rho_1 + \rho_2)} + 3\rho_1 \rho_2 \rho \right) + \frac{\rho_1^2 (3\rho_2 - \rho_1) G_3 - \rho_2^2 (3\rho_1 - \rho_2) G_1}{(\rho_2 - \rho_1)^3},$$

$$\nu_2 = \frac{2(\nu_1 - \nu_3)}{(\rho_2 - \rho_1)^3} \left(\rho^3 - \frac{3\rho^2}{2(\rho_1 + \rho_2)} + 3\rho_1 \rho_2 \rho \right) + \frac{\rho_1^2 (3\rho_2 - \rho_1) \nu_3 - \rho_2^2 (3\rho_1 - \rho_2) \nu_1}{(\rho_2 - \rho_1)^3} -$$

пружні характеристики шару змінюються з його товщиною за кубічним законом і дорівнюють на його межах відповідним характеристикам сусідніх шарів.

Рис. 2. Залежність від радіальної координати модуля зсуву тришарового циліндра для випадків А (суцільна лінія), Б (штрихова) та В (штрихпунктирна).



Отже, у випадку А циліндр складається з трьох однорідних шарів, пружні характеристики якого мають

розриви на поверхнях зчеплення шарів; у випадку *Б* пружні властивості циліндра є неперервними, але не гладкими на поверхнях контакту шарів; у випадку *В* характеристики циліндра є неперервними гладкими функціями радіальної координати (рис. 2).

Радіальні та колові напруження обчислювали за формулами (11), (13)–(15) та наближеною формулою для резольвенти (16). Точності обчислень, заданої в межах 1%, досягнуто при $N = 3$.

На рис. 3 наведено розподіли радіальних та колових напружень за радіальною координатою при $\rho_1 = 0.3$, $\rho_2 = 0.7$. Радіальні напруження (рис. 3а) у зовнішньому шарі $\rho_2 \leq \rho < \rho_3$ практично збігаються для випадків *А*, *Б*, *В* залежностей властивостей матеріалу від радіальної координати. Це пов'язано із близькістю до межі циліндра і потребою задоволення радіальними напруженнями крайової умови (4). Відмінність між цими напруженнями у внутрішньому шарі $\rho_0 \leq \rho < \rho_1$ для розглянутих випадків дещо суттєвіша, ніж у зовнішньому. У проміжному шарі $\rho_1 \leq \rho < \rho_2$ відмінність між напруженнями найбільша. У випадку *А* вони неперервні (проте, не гладкі) на поверхнях поділу шарів і спадають найповільніше з наближенням до $\rho = \rho_2$. У випадках *Б* та *В* радіальні напруження гладкі вздовж радіуса та на поверхнях поділу $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$, а у випадку *В* спадають за абсолютним значенням швидше (у межах 3.5%), ніж для інших двох, із наближенням до осі циліндра.

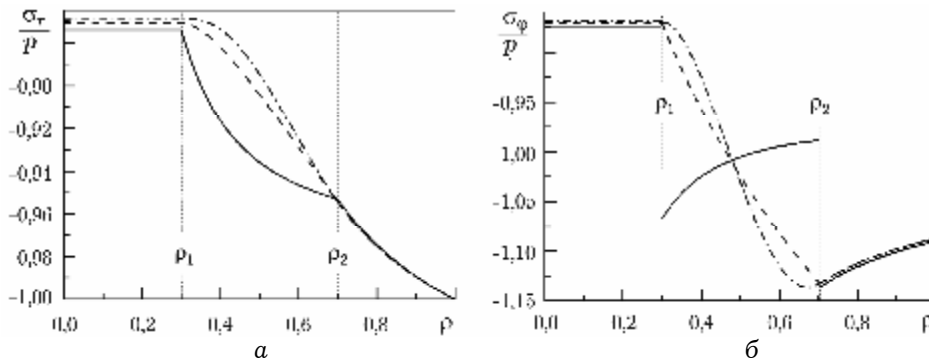


Рис. 3 Розподіл за радіальною координатою безрозмірних радіальних (а) та колових (б) напружень у тришаровому циліндрі для випадків *А* (суцільна лінія), *Б* (штрихова) та *В* (штрихпунктирна) при $\rho_1 = 0.3$, $\rho_2 = 0.7$.

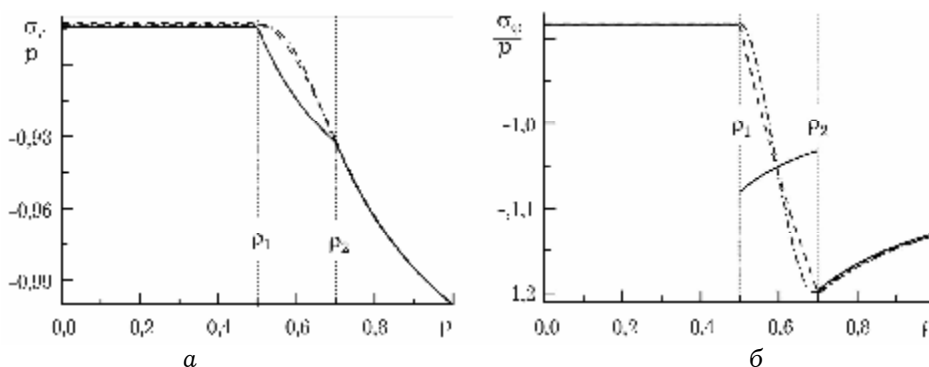


Рис. 4. Розподіл радіальних (а) та колових (б) напружень у тришаровому циліндрі для випадків *А* (суцільна лінія), *Б* (штрихова) та *В* (штрихпунктирна) при $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.7$.

На відміну від радіальних, колові напруження (рис. 3б) за сталих властивостей матеріалу усіх трьох шарів (А) терплять розрив першого роду на поверхнях поділу шарів. У випадку Б вони неперервні, але не гладкі на тих же поверхнях. У випадку В ці напруження є гладкою функцією радіальної координати. У внутрішньому шарі циліндра $\rho_0 \leq \rho < \rho_1$ для всіх розглянутих випадків колові напруження є доволі близькі, суттєво відрізняючись у проміжному шарі.

Вплив на напружений стан тришарового циліндра звуження проміжного неоднорідного шару внаслідок потовщення внутрішнього шару проілюстровано на рис. 4. За збереження якісної картини поведінки напружень спостерігаємо збільшення перепаду колових напружень у тришаровому циліндрі за товщиною.

Висновки. Розвинуто методику розв'язування плоскої осесиметричної задачі теорії пружності для багатошарового неоднорідного циліндра зі защемленими торцями за рівномірно розподіленого на його бічній поверхні нормального навантаження. На основі методу безпосереднього інтегрування задачу зведено до розв'язання інтегрального рівняння із ядром у вигляді кусково-змінної функції, розв'язок якого знайдено з використанням резольвенти. На основі побудованого розв'язку проаналізовано напружений стан тришарового суцільного циліндра, зовнішній та внутрішній шари якого є однорідними, а властивості проміжного шару змінні за його товщиною. Досліджено вплив на напружений стан співвідношення між властивостями матеріалів шарів у зоні зчеплення.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного гранту НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (номер проекту 0112U005002). Автори висловлюють подяку к.ф.-м.н. В. А. Шевчуку за цінні поради та зауваження щодо наведених у статті теоретичних та числових результатів.

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. Вігак В. М. Розв'язування одновимірних задач пружності й термopужності в напруженні для циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 3. – С. 103–107.
3. Вігак В. М. Розв'язки одновимірних задач теорії пружності та термopужності для циліндричних кусково-однорідних тіл // Там же. – 1997. – 40, № 4. – С. 139–148.
4. Вігак В. М., Калиняк Б. М. Зведення одновимірних задач пружності та термopужності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 60–67.
5. Галазюк О. В., Турчин І. М. Квазістатична плоска неосесиметрична задача термopужності радіально-шаруватого циліндричного тіла // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2007. – 11, № 2. – С. 58–65.
6. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
7. Калиняк Б. М. Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термopужності для неоднорідних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 2. – С. 124–131.
8. Калиняк Б., Попович В. Напружений стан багатошарового термочутливого циліндра за умов асимптотичного теплового режиму // Машинознавство. – 2004. – № 2. – С. 22–30.
9. Коляно Ю. М., Процюк Б. В., Синюта В. М. Статическая осесимметрическая задача термоупругости для многослойного цилиндра // Прикл. математика и механика. – 1991. – 55, вып. 6. – С. 1035–1040.
10. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3.: Термopужність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. – Львів: СПОЛОН, 2009. – 412 с.

11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. Новиков В. У., Бурьян О. Ю. Моделирование межфазного слоя в анизотропных композитах // Прикл. физика. – 2000. – № 1. – С. 67–78.
13. Плевако В. П. Вплив зміни параметрів пружності матеріалу на напружений стан неоднорідного циліндра // Тези доп. Міжнар. наук.-техн. конф. «Проблеми математичного моделювання сучасних технологій». – Хмельницький: ТУП, 2002. – С. 111.
14. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 378 с.
15. Рухадзе А. К., Векуа И. Н. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем // Изв. АН СССР. VII сер. – 1933. – № 3. – С. 373–386.
16. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. – Ереван: АН Арм.ССР, 1987. – 338 с.
17. Шевчук В. А., Калиняк Б. М. Напружений стан циліндричних тіл з багат шаровими неоднорідними покриттями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 35–41.
18. Bett K. E., Burns D. J. Design of elastic multi-component compound cylinders // Proc. Inst. Mech. Eng. – 1967. – 182, № 3. – P. 22–29.
19. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – 60, № 5. – P. 195–216.
20. Erdogan F., Gupta G. D. Layered composites with an interface flaw // Int. J. Sol. Struct. – 1971. – 7. – P. 1089–1107.
21. Guo L.-C., Noda N. Modeling method for a crack problem of functionally graded materials with arbitrary properties – piecewise-exponential model // Ibid. – 2007. – 44. – P. 6768–6790.
22. Pettermann H. E., Weissenbek E., Suresh S. Simulation of the elasto-plastic deformations in compositionally graded metal-ceramic structures: mean-field and unit cell approach / Eds.: I. Shiotani, M. Y. Miyamoto // Functionally Graded Materials 1996. – Amsterdam: Elsevier, 1997. – P. 75–80.
23. Wilson W. R. D., Skelton W. J. Design of high pressure cylinders // Proc. Inst. Mech. Eng. – 1967. – 182, № 3. – P. 1–10.
24. Zhang X., Hasebe N. Elasticity solution for a radially nonhomogeneous hollow circular cylinder // J. Appl. Mech. Trans. ASME. – 1999. – 66. – P. 598–606.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ РАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

На основании метода непосредственного интегрирования предложена методика построения решения плоской осесимметричной задачи теории упругости для сплошного кругового цилиндра, состоящего из концентрических непрерывно-неоднородных по радиальной переменной слоев, при условиях идеального механического контакта. Исследовано влияние на напряженное состояние разрывности и гладкости функций, задающих зависимость свойств материала слоев цилиндра от радиальной координаты, на линиях сцепления слоев.

STRESSED STATE OF A MULTILAYER INHOMOGENEOUS CYLINDER SUBJECTED TO UNIFORM COMPRESSION ON ITS LATERAL SURFACE

On the basis of the direct integration method, we propose a technique for solution of the plane axially symmetric problem of elasticity for a circular solid cylinder consisting of a number of perfectly connected concentric layers, whose material properties continuously depend on the radial coordinate. The effect of the discontinuity and smoothness of the functions presenting the dependences of the layer-material properties on the radial coordinate at the interfaces is addressed.