

**ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ
СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОВОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТУНЕЛЬНОЇ
ПОРОЖНИНИ У ДОВГОМУ ЦИЛІНДРІ**

Розглянуто задачі визначення геометричних параметрів циліндричної тунельної порожнини у довгому циліндричному тілі за заданою температурою поверхні в умовах стаціонарного нагріву тіла зосередженими тепловими потоками та конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Із допомогою граничних інтегральних рівнянь побудована двовимірна математична модель теплового зондування тіла, в межах якої сформульовані пряма та обернена задачі ідентифікації параметрів порожнини. Гранично-елементним методом досліджено пряму задачу. На цій основі виявлені та досліджені інформативні параметри ідентифікації. З використанням інформативних параметрів обернену задачу зведено до переозначеної системи неявно заданих нелінійних рівнянь стосовно геометричних параметрів порожнини. Розроблено ітераційний гранично-елементний алгоритм розв'язування цієї системи, який ґрунтується на методі Гауса–Ньютона.

Вступ. Задачі виявлення розривів суцільності у твердих тілах посідають важливе місце у багатьох інженерних і технічних дисциплінах. Відомий метод ідентифікації неоднорідностей у твердих тілах (порожнин, дефектів, чужорідних включень тощо), який базується на збудженні в об'єкті теплового процесу шляхом його нагрівання і вимірюванні температури поверхні із використанням техніки ІЧ-термографії [6]. Неоднорідність внутрішньої структури об'єкта зумовлює збурення температури на поверхні тіла. Визначаючи ці збурення, отримують вхідні дані для ідентифікації дефектів та включень.

Задачі ідентифікації істотно залежать від геометрії об'єкта й неоднорідності, способів збудження зондувального теплового процесу, математичних моделей, які використовують для його опису, та інформативних параметрів, які вживають як вхідні дані.

У відомих підходах [1, 3, 7–10] здебільш розглядають об'єкти, обмежені плоскими поверхнями. Зондувальний тепловий процес збуджують, нагріваючи однорідним тепловим потоком, який падає на таку поверхню. Вважають, що за відсутності в об'єкті неоднорідностей температура поверхні нагрівання є практично однорідна, а поява на її тепловому зображенні контрастних плям свідчить про підповерхневі неоднорідності. Проте розміри контрастної плями залежать не тільки від геометричних параметрів неоднорідності, але й від інших чинників – глибини її залягання, теплофізичних властивостей, інтенсивності збудженого теплового процесу тощо. Об'єкти складної форми та/чи великих розмірів буває важко нагріти однорідно по всій поверхні, що обмежує область застосування цих підходів.

Для моделювання зондувального процесу та формулювання прямих і обернених задач ідентифікації у відомих підходах використовують методи скінченного перетворення Фур'є [3], скінченних різниць [1] та скінченних елементів [8, 9], а для розв'язування — варіаційно-ітераційні методи [8] та нейронні мережі [9].

У статтях [4, 5] розглядали задачі ідентифікації кругової циліндричної порожнини у круговому циліндричному тілі. Тут запропоновано підхід, за яким зондують зосередженими тепловими потоками. На модельній задачі продемонстровано ефективність його застосування до об'єктів з неплоскими поверхнями. До того ж він дає можливість підвищити інформативність методу, позаяк, переміщаючи зону нагрівання поверхнею, кожен раз отримуватимемо нові дані про внутрішню структуру об'єкта. Для моделювання

процесу зондування тут застосовано метод граничних інтегральних рівнянь, а для формулювання та розв'язування задач ідентифікації – метод граничних елементів. Обернену задачу ідентифікації у цьому підході зведено до системи неявно заданих нелінійних рівнянь, яку розв'язували графічно [4] та ітераційно [5], використовуючи метод Ньютона.

У статті підхід, запропонований раніше [9, 10], розвинули для тіла, обмеженого замкнутою циліндричною поверхнею, що містить циліндричну тунельну порожнину. З використанням граничних інтегральних рівнянь побудували двовимірну математичну модель стаціонарного теплового зондування тіла зосередженими тепловими потоками. Вважаючи, що геометрію порожнини визначає скінченна множина параметрів, з допомогою методу граничних елементів сформулювали пряму та обернену задачі ідентифікації геометричних параметрів порожнини. Числово досліджували пряму задачу та інформативні параметри для кругового циліндричного тіла із круговою порожниною, використовуючи метод граничних елементів. Оскільки інформативність запропонованого підходу значно вища проти відомих аналогів, розглядали випадок, коли кількість інформативних параметрів перевищує кількість геометричних параметрів порожнини, які підлягають ідентифікації. Обернену задачу звели до переозначеної системи неявно заданих нелінійних рівнянь. Розробили ітераційний гранично-елементний алгоритм розв'язування цієї задачі, який базується на методі Гауса–Ньютона. Виконали числовий експеримент, результати якого підтвердили істотне підвищення збіжності ітераційного процесу зі збільшенням кількості інформативних параметрів, вжитих у формулюванні оберненої задачі.

1. Математична модель теплового зондування об'єкта. Розглянемо безмежне пружне теплопровідне тіло, обмежене циліндричною поверхнею з поперечним перерізом S_0 , обмеженим контуром Γ_0 . У тілі наявна циліндрична тунельна порожнина з поперечним перерізом S_1 , обмеженим достатньо гладким опуклим контуром Γ_1 . Вісь порожнини колінеарна до осі циліндричного тіла. Вважатимемо, що контур Γ_1 можна визначити заданням двох достатньо гладких функцій $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, які залежать від скінченної кількості параметрів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, що визначають її геометрію. Тут $n \in \mathbf{N}$, x_1, x_2 – декартові координати, а t – дійсна змінна з деякого відрізка $L \subset \mathbf{R}$.

Тіло нагріває зовнішній тепловий потік густини $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2)$, який падає на бічну поверхню тіла і не залежить від координати x_3 у напрямку осі циліндра. Охолоджується тіло внаслідок конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температуру T_m якого вважаємо заданою. Поверхня порожнини теплоізольована.

Стаціонарний тепловий процес у тілі описує крайова задача

$$\Delta T(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0 \setminus S_1, \quad (1)$$

$$-k \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = J_0(\mathbf{x}) - h(T_m - T(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (3)$$

де h – коефіцієнт конвективного теплообміну; k – коефіцієнт теплопровідності матеріалу; \mathbf{n} – зовнішня нормаль; $J_0(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ – функція, яка визначає розподіл густини теплового потоку, що падає на поверхню циліндра; Δ – двовимірний оператор Лапласа. За відсутності порожнини температурне поле в суцільному тілі описує крайова задача (1), (2).

Перейдемо у рівняннях (1)–(3) до безрозмірних змінних. Для цього введемо безрозмірні координати $\xi = \mathbf{x}/R$, $\eta = \mathbf{y}/R$, де R – характерний розмір поперечного перерізу S_0 . Температуру $T(\mathbf{x})$ нормуємо на характерну температуру $T_0 = Rj_0/\kappa$: $\theta(\xi) = T(R\xi)/T_0$, а функцію просторового розподілу зондувального потоку – на параметр j_0 , який визначає його інтенсивність: $J(\xi) = J_0(R\xi)/j_0$.

Задачі (1)–(3) та (1), (2) у безрозмірних змінних зведемо до граничних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\theta(\eta) + \int_{\Gamma_0} (\Phi(\eta, \xi) + \mu\Theta(\eta, \xi))\vartheta(\xi)dl(\xi) + \int_{\Gamma_1} \Phi(\eta, \xi)\vartheta(\xi)dl(\xi) = \\ & = \int_{\Gamma_0} \Theta(\eta, \xi)(J(\xi) + \mu\theta_m)dl(\xi), \quad \eta \in \Gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}\bar{\theta}(\eta) + \int_{\Gamma_0} (\Phi(\eta, \xi) + \mu\Theta(\eta, \xi))\bar{\vartheta}(\xi)dl(\xi) = \int_{\Gamma_0} \Theta(\eta, \xi)(J(\xi) + \mu\theta_m)dl(\xi), \quad \eta \in \Gamma_0. \quad (5)$$

Тут $\Theta(\eta, \xi) = \frac{1}{2\pi}(\ln(1/\rho(\eta, \xi)) - \ln R)$; $\Phi(\eta, \xi) = \Theta(\eta, \xi)/\partial\mathbf{n}(\xi)$; $\rho(\eta, \xi) = |\eta - \xi|$; $\mu = R(h/\kappa)$ – приведений коефіцієнт теплообміну; $l(\xi) = l(R\xi)/R$, $\theta_m \equiv T_m/T_0 = \kappa T_m/(Rj_0)$ – приведена температура середовища; $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Зумовлене порожниною збурення температурного поля поверхні $\tilde{\theta}(\xi) \equiv \theta(\xi) - \bar{\theta}(\xi)$, $\xi \in \Gamma$ задовольняє рівняння, яке випливає із рівнянь (4), (5):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\tilde{\theta}(\eta) + \int_{\Gamma_0} (\Phi(\eta, \xi) + \mu\Theta(\eta, \xi))\tilde{\vartheta}(\xi)dl(\xi) + \int_{\Gamma_1} \Phi(\eta, \xi)\tilde{\vartheta}(\xi)dl(\xi) = \\ & = - \int_{\Gamma_1} \Phi(\eta, \xi)\tilde{\vartheta}(\xi)dl(\xi), \quad \eta \in \Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\hat{\theta}(\eta) = - \int_{\Gamma_0} \Phi(\eta, \xi)\bar{\vartheta}(\xi)dl(\xi) + \int_{\Gamma_0} \Theta(\eta, \xi)(\partial\bar{\theta}(\xi)/\partial\mathbf{n}(\xi))dl(\xi)$, $\eta \in S_0$; $\bar{\theta}(\xi)$ – розв'язок рівняння (5). Рівняння (5), (6) визначають математичну модель теплового зондування тіла.

2. Пряма та обернена задачі ідентифікації параметрів порожнини.

Сформулюємо пряму задачу. Задані контур Γ_0 , який визначає геометрію поперечного перерізу тіла, параметри $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, які визначають геометрію порожнини, коефіцієнт теплопровідності κ матеріалу тіла, функція просторового розподілу зондувального теплового потоку $J_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$, температура T_m зовнішнього середовища та коефіцієнт конвективного теплообміну h . Необхідно знайти розподіл збурення температурного поля на поверхні тіла, зумовленого порожниною; параметри збурення температурного поля на поверхні тіла, які достатньо чутливі до змін геометрії поперечного перерізу порожнини, та дослідити залежності інформативних параметрів F_1, F_2, \dots, F_m від параметрів порожнини $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Пряму задачу зводимо до послідовного розв'язування граничних інтегральних рівнянь (5) та (6) і визначення на цій основі незалежних параметрів F_1, F_2, \dots, F_m збурення температурного поля $\tilde{T}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\theta}(\mathbf{x}/R)$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ на

зовнішній поверхні тіла, які можна використати як інформативні параметри для формулювання обернених задач ідентифікації порожнини.

Сформулюємо обернену задачу. Задано геометрію зовнішньої поверхні тіла, коефіцієнти теплопровідності κ та конвективного теплообміну h , функцію просторового розподілу зондувального теплового потоку $J_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma_0$ та емпіричні значення $F_1^e, F_2^e, \dots, F_m^e$ інформативних параметрів F_1, F_2, \dots, F_m . Треба знайти геометричні параметри порожнини $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, за яких значення $F_1^c, F_2^c, \dots, F_m^c$ інформативних параметрів F_1, F_2, \dots, F_m , розраховані за математичною моделлю (5), (6), є близькі за квадратичною нормою l_2 до значень $F_1^e, F_2^e, \dots, F_m^e$, тобто

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (F_i^c - F_i^e)^2} \leq \varepsilon, \quad (7)$$

де $\varepsilon > 0$ – достатньо мале.

3. Гранично-елементна модель теплового зондування. Для розв'язування рівнянь (5), (6) застосували метод граничних елементів [1].

Контури Γ_0 та Γ_1 дискретизували вузловими точками ξ_i , які утворюють множину лінійних елементів E_i , $i \in [1, N_\Gamma]$, $N_\Gamma \in \mathbb{N}$, у результаті інтегральні рівняння (5), (6) звели до матричних

$$\mathbf{M}_{(11)} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} = \bar{\mathbf{B}}_{(1)}, \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_{(11)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} + \mathbf{M}_{(12)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)} = \mathbf{B}_{(2)}, \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{(21)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)} + \mathbf{M}_{(22)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)} = \mathbf{B}_{(3)}.$$

Тут $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$ – вектор вузлових значень безрозмірної температури на зовнішній поверхні тіла без включення; $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$ та $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{(2)}$ – вектори вузлових значень збурення безрозмірних температур на зовнішній поверхні тіла і на поверхні порожнини відповідно; $\mathbf{M}_{(11)}$, $\mathbf{M}_{(12)}$, $\mathbf{M}_{(21)}$ та $\mathbf{M}_{(22)}$ – матриці розмірності $N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_0}$, $N_{\Gamma_0} \times N_{\Gamma_1}$, $N_{\Gamma_1} \times N_{\Gamma_0}$, та $N_{\Gamma_1} \times N_{\Gamma_1}$, $\bar{\mathbf{B}}_{(1)}$, $\mathbf{B}_{(2)}$, та $\mathbf{B}_{(3)}$ – вектори розмірності $1 \times N_{\Gamma_0}$, $1 \times N_{\Gamma_0}$ та $1 \times N_{\Gamma_1}$ відповідно, де $N_{\Gamma_0} \in \mathbb{N}$ – кількість елементів на межі Γ_0 , а $N_{\Gamma_1} \in \mathbb{N}$ – на межі Γ_1 .

Елементи m_{ij} матриць $\mathbf{M}_{(11)}$, $\mathbf{M}_{(12)}$, $\mathbf{M}_{(21)}$ та $\mathbf{M}_{(22)}$ визначають інтеграли виду $\int_{-1}^1 \varphi_\alpha(t) (\Phi(\eta_i, \xi_j(t)) + \mu \Theta(\eta_i, \xi_j(t))) dt$, $\int_{-1}^1 \varphi_\alpha(t) \Phi(\eta_i, \xi_j(t)) dt$, $\alpha = 1, 2$, де $\varphi_1(t) = (1-t)/2$, $\varphi_2(t) = (1+t)/2$ – кусково-лінійні базисні функції, η_i , ξ_i , $i = 1, \dots, N_\Gamma$ – координати вузлів на межі Γ .

Елементи вектора $\bar{\mathbf{B}}_{(1)}$ визначаємо через вузлові значення зондувального теплового потоку $J(\eta_i)$ та приведені коефіцієнт теплообміну μ і температуру середовища θ_m , а елементи векторів $\mathbf{B}_{(2)}$ та $\mathbf{B}_{(3)}$ – через $J(\eta_i)$, μ , θ_m та вузлові значення температурного поля $\bar{\theta}(\eta_i)$ на поверхні тіла без порожнини.

4. Дослідження інформативних параметрів ідентифікації. Розв'язуємо прямі задачі ідентифікації і досліджуємо інформативні параметри для випадку, коли тіло має форму кругового циліндра радіуса R з циліндрич-

ною тунельної порожниною. Тут геометрію порожнини визначають полярні координати її центра ρ_0, φ_0 та радіус r_0 (рис. 1).

Нехай зондувальний тепловий потік \mathbf{J} падає на область бічної поверхні тіла, якій відповідає дуга $\Gamma_\omega \subset \Gamma_0$. Зовнішня нормаль \mathbf{n}_ω середини дуги Γ_ω поверхні нагрівання орієнтована під полярним кутом ω . Змінюючи умови зондування, зокрема просторовий розподіл зондувального теплового потоку $J(\xi), \xi \in \Gamma_\omega$ на поверхні нагрівання і ширину області нагрівання $a \equiv |\Gamma_\omega|$, та скануючи потоком по поверхні об'єкта (змінюючи кут ω), матимемо щораз різні розподіли температури в тілі і різні збурення температурного поля $\tilde{\theta}(\xi), \xi \in \Gamma_0$ на його зовнішній поверхні. Параметри цього збурення можна вимірювати методами ІЧ-термографії, отримуючи апостеріорну інформацію про параметри порожнини. При цьому об'єм цієї інформації зростає зі збільшенням кількості незалежних зондувань.

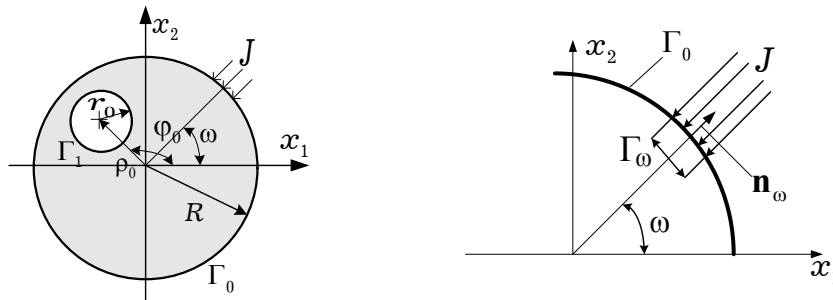


Рис. 1 Схема зондування об'єкта.

На основі розробленої гранично-елементної моделі досліджували інформативні параметри зондування об'єкта зосередженим тепловим потоком, розподіл інтенсивності якого визначає формула

$$J(\varphi, \omega) \equiv \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_\omega = \exp(-\sin^2(\varphi - \omega)/\lambda^2), \tag{10}$$

де $\lambda = a/R$ – відносна ширина області нагрівання.

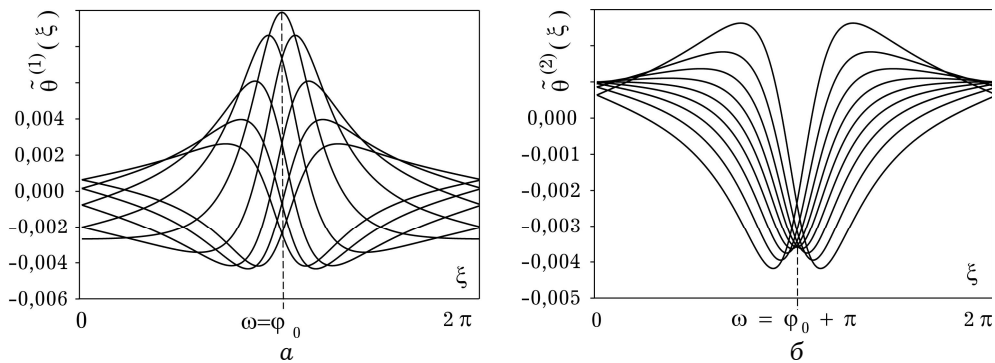


Рис. 2. Збурення температурного поля поверхні тіла для різних напрямків зондування $\omega_k : a - \omega_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} k, k = 0, 1, \dots, 8, b - \omega_k = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8} k, k = 0, 1, \dots, 8$.

Результати досліджень впливу напрямку зондувального потоку на збурення температури на поверхні Γ_0 ілюструє рис. 2. Розподіли збурення температури $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\xi, \omega_k), \xi \in [0, 2\pi]$ отримали, розв'язуючи рівняння (5), (6)

для декількох значень азимута ω_k зондувального потоку та фіксованих значень параметрів $R = 0,1$, $\rho_0 = 0,05$, $\bar{\rho}_0 = \rho_0/R = 0,5$, $\varphi_0 = \pi$, $r_0 = 0,01$, $\bar{r}_0 = r_0/R = 0,1$, $a = \pi/70$, $\kappa = 1,15$, $h = 5$, $T_m = 300$, $j_0 = 2000$.

Як видно з графіків, збурення температурного поля $\tilde{\theta}$ змінюється зі зміною азимута зондування ω , тобто $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(\xi, \omega)$. Значення мінімумів та максимумів кривих залежать від азимута кута зондування: $\tilde{\theta}_{\max}^{(\alpha)} = \tilde{\theta}_{\max}^{(\alpha)}(\omega - \varphi_0)$, $\tilde{\theta}_{\min}^{(\alpha)} = \tilde{\theta}_{\min}^{(\alpha)}(\omega - \varphi_0)$, ($\alpha = 1, 2$). У діапазоні $\omega \in (\varphi_0 - \pi/2, \varphi_0 + \pi/2)$ для кожного фіксованого $\omega \neq \varphi_0$ полярний кут ξ_{\max} , що визначає положення максимуму кривої збурення температури $\tilde{\theta}^{(1)}(\xi, \omega)$, не збігається з азимутом ω зондувального потоку: $\xi_{\max} \neq \omega$.

За азимуту $\omega = \varphi_0$ значення $\tilde{\theta}_{\max}^{(1)}$ і $\tilde{\theta}_{\min}^{(1)}$ максимальні: $\tilde{\theta}_{\max}^{(1)}(0) \rightarrow \max_{\omega} \left(\tilde{\theta}_{\max}^{(1)}(\omega - \varphi_0) \right)$, $\tilde{\theta}_{\min}^{(1)}(0) \rightarrow \max_{\omega} \left(\tilde{\theta}_{\min}^{(1)}(\omega - \varphi_0) \right)$. Отже, азимут $\omega_0 \equiv \arg \left\{ \max_{\omega} \left(\max_{\xi} \left(\tilde{\theta}^{(1)}(\xi, \omega) \right) \right) \right\}$ (рис. 3а), який можна визначити за результатами вимірювання температурного поля на зовнішній поверхні під час зондування об'єкта в діапазоні азимутів $\omega \in (\varphi_0 - \pi/2, \varphi_0 + \pi/2)$, збігається з полярним кутом φ_0 . Тобто азимут зондувального потоку ω , за якого максимум $\tilde{\theta}_{\max}^{(1)}$ температурного поля поверхні максимальний і його положення збігається з потоком, можна вибрати за інформативний параметр для координати φ_0 .

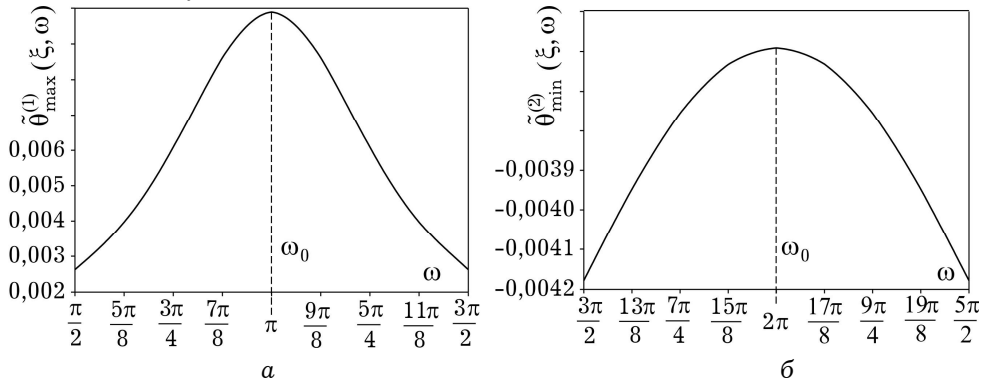


Рис. 3. Максимуми кривої $\tilde{\theta}^{(1)}(\xi, \omega)$ для $\omega_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k$, $k = 0, 1, \dots, 8$ (а) та

мінімуми кривої $\tilde{\theta}^{(1)}(\xi, \omega)$ для $\omega_k = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k$, $k = 0, 1, \dots, 8$ (б).

У діапазоні азимутів зондування $\omega \in (\varphi_0 + \pi/2, \varphi_0 + 3\pi/2)$ для кожного фіксованого $\omega \neq \varphi_0 + \pi$ полярний кут ξ_{\min} , який визначає положення мінімуму кривої збурення температури $\tilde{\theta}^{(2)}(\xi, \omega)$, не збігається з азимутом ω зондувального потоку: $\xi_{\min} \neq \omega$. За азимута $\omega = \varphi_0 + \pi$ значення $\tilde{\theta}_{\min}^{(2)}$ максимальне: $\tilde{\theta}_{\max}^{(2)}(0) \rightarrow \min_{\omega} \left(\tilde{\theta}_{\max}^{(2)}(\omega - \varphi_0 - \pi) \right)$, а $\tilde{\theta}_{\max}^{(2)}$ - мінімальне: $\tilde{\theta}_{\min}^{(2)}(0) \rightarrow \max_{\omega} \left(\tilde{\theta}_{\min}^{(2)}(\omega - \varphi_0 - \pi) \right)$. Отже, азимут $\omega_0 \equiv \arg \left\{ \max_{\omega} \left(\min_{\xi} \left(\tilde{\theta}^{(2)}(\xi, \omega) \right) \right) \right\}$ (рис.

Зб), який можна визначити за результатами вимірювання температурного поля на зовнішній поверхні під час зондування об'єкта в діапазоні азимутів $\omega \in (\varphi_0 + \pi/2, \varphi_0 + 3\pi/2)$, збігається з полярним кутом $\varphi_0 + \pi$. Тобто азимут зондувального потоку ω , за якого мінімум $\tilde{\theta}_{\min}^{(2)}$ температурного поля поверхні максимальний і його положення збігається із потоком ω , можна вибрати за інформативний параметр для координати φ_0 .

Оскільки параметр φ_0 можна ідентифікувати незалежно, то для ідентифікації параметрів $\bar{\rho}_0$, \bar{r}_0 слід брати не менше двох незалежних інформативних ознак збурення температурного поля $\tilde{\theta}(\xi, \varphi_0)$. За такі ознаки можна вибирати певні функціонали поля $\tilde{\theta}(\xi, \varphi_0)$, зокрема, його значення в точках екстремумів: $F_1 = \tilde{\theta}_{\max}^{(1)}$, $F_2 = \tilde{\theta}_{\min}^{(1)}$, $F_3 = \tilde{\theta}_{\max}^{(2)}$, $F_4 = \tilde{\theta}_{\min}^{(2)}$.

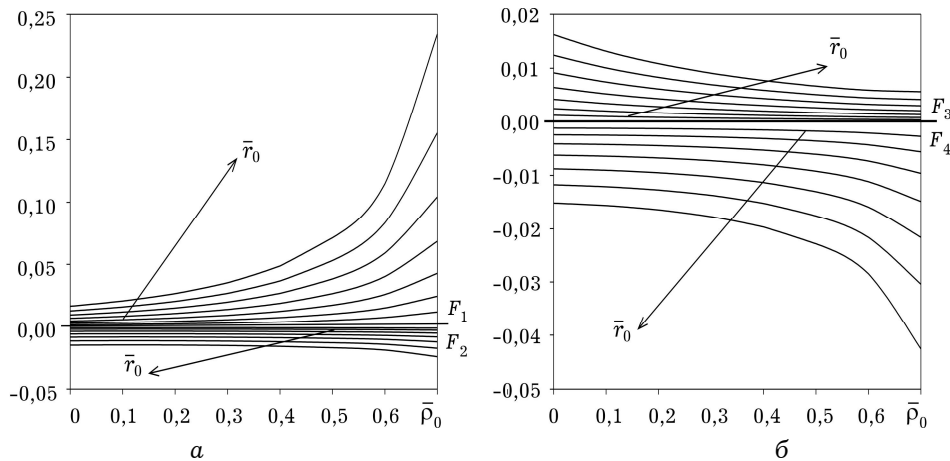


Рис. 4. Залежність функціоналів F_1, F_2 (а) і F_3, F_4 (б) від параметрів порожнини $\bar{\rho}_0$ для різних значень \bar{r}_0 .

Дослідимо залежності інформативних ознак від параметрів $\bar{\rho}_0$ та \bar{r}_0 . Для цього розв'язуємо пряму задачу (5), (6) для дискретної множини значень параметрів $\bar{\rho}_0$ та \bar{r}_0 для фіксованих азимутів кута зондування $\omega = \varphi_0$ та $\omega = \varphi_0 + \pi$, а відтак визначаємо значення функціоналів $\tilde{\theta}^{(1)}$ і $\tilde{\theta}^{(2)}$. Результати цих розрахунків наведені на рис. 4. Тут побудовано залежності параметрів F_1 , F_2 , F_3 та F_4 від відносного полярного радіуса центра порожнини $\bar{\rho}_0$ за фіксованих значень її відносного радіуса $\bar{r}_0 = (0,07; 0,1; 0,13; 0,16; 0,19; 0,22; 0,25)$. Як бачимо, максимум F_1 , F_3 та мінімум F_2 , F_4 збурення температурного поля, визначені за нагрівання об'єкта тепловим потоком, що втікає через область бічної поверхні, якій відповідає дуга a зі зовнішньою нормаллю, орієнтованою під кутом $\omega = \varphi_0$ і $\omega = \varphi_0 + \pi$, істотно залежать від параметрів $\bar{\rho}_0$, \bar{r}_0 , які підлягають ідентифікації. Тому використовуємо їх для формулювання оберненої задачі.

5. Ітераційний метод розв'язування оберненої задачі. Нехай F_1^e , F_2^e , F_3^e та F_4^e – емпіричні значення інформативних параметрів F_1 , F_2 , F_3 та F_4 , визначені шляхом зондування об'єкта відомим тепловим потоком з азимутами $\omega = \varphi_0$ та $\omega = \varphi_0 + \pi$. Позначимо як $F_1^e(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)$, $F_2^e(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)$, $F_3^e(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)$

та $F_4^c(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)$ значення цих параметрів для заданих відносних значень параметрів порожнини $\bar{\rho}_0, \bar{r}_0$. Тоді обернена задачу зводимо до розв'язування переозначеної системи неявно заданих нелінійних рівнянь (11) стосовно параметрів порожнини $(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)$:

$$\begin{cases} F_1^c(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0) = F_1^e, \\ F_2^c(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0) = F_2^e, \\ F_3^c(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0) = F_3^e, \\ F_4^c(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0) = F_4^e. \end{cases} \quad (11)$$

Аналітична структура функцій лівих частин цієї системи невідома. Проте їх значення можна розрахувати для будь-яких заданих значень $\bar{\rho}_0, \bar{r}_0$, використовуючи розроблений алгоритм розв'язування прямої задачі. На цій основі побудуємо ітераційний алгоритм розв'язування переозначеної системи (11), який базується на методі Гауса-Ньютона [7].

Введемо позначення $\mathbf{X} = (\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$, $f_i = f_i(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0) \equiv F_i^c(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0) - F_i^e$, $i = 1, \dots, 4$. Тоді згідно з методом Гауса-Ньютона [7] $(k+1)$ -ше наближення $\mathbf{X}^{(k+1)}$ розв'язку системи (11) визначає через k наближення $\mathbf{X}^{(k)}$ за формулою

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \left(\mathbf{G}^T(\mathbf{X}^{(k)}) \mathbf{G}'(\mathbf{X}^{(k)}) \right)^{-1} \mathbf{G}^T(\mathbf{X}^{(k)}) \mathbf{f}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (12)$$

де \mathbf{G} – матриця Якобі для функцій f_1, f_2, f_3, f_4 , $k = 0, 1, \dots$

Для обчислення матриці Якобі на кожній ітерації необхідно визначити похідні $\partial f_i(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0) / \partial \bar{\rho}_0$, $\partial f_i(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0) / \partial \bar{r}_0$, $i = 1, \dots, 4$. Оскільки, аналітична структура функцій $F_i^c(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)$ невідома, то замінімо ці похідні їх різницевиими аналогами:

$$\frac{\partial f_i(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)}{\partial \bar{\rho}_0} \approx \frac{f_i(\bar{\rho}_0 + \square_\rho, \bar{r}_0) - f_i(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)}{\square_\rho}, \quad \frac{\partial f_i(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)}{\partial \bar{r}_0} \approx \frac{f_i(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0 + \square_r) - f_i(\bar{\rho}_0, \bar{r}_0)}{\square_r}, \quad (13)$$

де \square_ρ, \square_r – достатньо малі сталі.

Алгоритм розв'язування оберненої задачі полягає ось у чому: задаємося початковим наближенням $\mathbf{X}^{(0)}$; на кожній $k+1$ ітерації розв'язуємо пряму задачу (5), (6) для значень параметрів $(\bar{\rho}_0^{(k)}, \bar{r}_0^{(k)})$, $(\bar{\rho}_0^{(k)} + \square_\rho, \bar{r}_0^{(k)})$, $(\bar{\rho}_0^{(k)}, \bar{r}_0^{(k)} + \square_r)$. На основі отриманих розв'язків визначаємо значення параметрів $F_i^c(\bar{\rho}_0^{(k)}, \bar{r}_0^{(k)})$, $F_i^c(\bar{\rho}_0^{(k)} + \square_\rho, \bar{r}_0^{(k)})$, $F_i^c(\bar{\rho}_0^{(k)}, \bar{r}_0^{(k)} + \square_r)$, $i = 1, \dots, 4$. За формулами (13) обчислюємо елементи матриці Якобі, а відтак за формулою (12) – $(k+1)$ наближення. Обчислення припиняємо за досягнення умови $\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$.

Для оцінки ефективності запропонованого методу виконали числовий експеримент. Вхідні дані для оберненої задачі (значення функціоналів F_1^e, \dots, F_4^e) визначали із розв'язку прямої задачі, задавшись певними значеннями радіуса порожнини \bar{r}_0^e та відстані $\bar{\rho}_0^e$ її осі від осі циліндра. Для оцінки збіжності на кожній ітерації за формулами $\square_\rho \bar{\rho}_0^{(k)} = \left| \bar{\rho}_0^e - \bar{\rho}_0^{(k)} \right|$,

$\square \bar{r}_0^{(k)} = \left| \bar{r}_0^e - \bar{r}_0^{(k)} \right|$ та $\square \varepsilon^{(k)} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (F_i^c - F_i^e)^2}$ обчислювали абсолютні апостеріорні похибки розв'язку та похибку оберненої задачі. В табл. 1 наведені два набори вхідних даних, які використовували в експериментах. В табл. 2 подані результати розв'язування оберненої задачі для шести у випадку 1 та восьми ітерацій у випадку 2.

Таблиця 1.

Вип.	Параметри порожнини		Інформативні параметри			
	$\bar{\rho}_0^e$	$\bar{\tau}_0^e$	F_1^e	F_2^e	F_3^e	F_4^e
1	0,5	0,2	0,0428	-0,0109	0,0042	-0,0145
2	0,7	0,1	0,0242	-0,0032	0,0007	-0,0056

Таблиця 2.

Вип.	Початкове наближення		1 ітерація			N-1 ітерація			N ітерація		
	$\bar{\rho}_0^{(0)}$	$\bar{\tau}_0^{(0)}$	$\square \bar{\rho}_0^{(1)}$	$\square \bar{\tau}_0^{(1)}$	$\square \varepsilon^{(1)}$	$\square \bar{\rho}_0^{(N-1)}$	$\square \bar{\tau}_0^{(N-1)}$	$\square \varepsilon^{(N-1)}$	$\square \bar{\rho}_0^{(N)}$	$\square \bar{\tau}_0^{(N)}$	$\square \varepsilon^{(N)}$
1	0,1	0,5	0,03	0,013	0,03	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	10^{-12}	$9 \cdot 10^{-13}$	$4 \cdot 10^{-9}$
2	0	0,5	0,063	0,022	0,04	$4 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	10^{-12}	$3 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-9}$

Як впливає із наведених у табл. 1, 2 даних вибрані інформативні параметри забезпечують досить добру збіжність ітераційного процесу.

Висновки. Розроблені теоретичні засади та математичний апарат для неруйнівного безконтактного методу визначення параметрів тунельної порожнини в довгому циліндричному тілі за результатами його зондування зосередженими стаціонарними тепловими потоками в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Визначення параметрів порожнини зведено до розв'язування оберненої задачі, вхідними даними для якої є параметри збурення температурного поля зовнішньої поверхні тіла. Ці дані можна отримати з використанням техніки ІЧ-термографії. На основі кількісного аналізу збурення температурного поля поверхні об'єкта, виконаного з допомогою методу граничних елементів, визначені інформативні параметри теплового зондування. Маючи ці параметри обернену задачу звели до розв'язування переозначеної системи неявно заданих нелінійних рівнянь стосовно параметрів порожнини, які підлягають ідентифікації. Із застосуванням методу граничних елементів розроблено ітераційний метод розв'язування цієї задачі, який ґрунтується на методі Гауса-Ньютона. Ефективність розробленого методу підтверджена числовими експериментами.

1. Ищук И. Н., Фесенко А. И., Громов Ю. Ю. Идентификация свойств скрытых подповерхностных объектов в инфракрасном диапазоне волн. – М.: Машиностроение, 2008. – 184 с.
2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 560 с.
3. Чекурін В. До ідентифікації параметрів багатошарових тіл із використанням теплового зондування // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 9–20.
4. Чекурін В., Сінькевич О. Двовимірні стаціонарні задачі ідентифікації порожнин у циліндричних тілах на основі даних ІЧ-термографії // Там само. – 2012. – Вип. 15. – С. 105–115.
5. Чекурін В., Сінькевич О. Гранично-елементний метод для задач ідентифікації порожнин у циліндричному тілі з використанням локального нагріву та даних ІЧ-термографії // Електроніка та інформ. технології. – 2013. – Вип. 3. – С. 122–132.

6. Becker A. A. The boundary element method in engineering. UK. – 1992.
7. Brett J. I. Selecting a Nondestructive Testing Method. Part VI: Infrared Inspection Techniques – Thermography // AMMTIAC Quarterly. 2008. – 3 (2). – P. 9–12.
8. Hamid Fazeli, Masoud Mirzaei. Shape identification problems on detecting of defects in a solid body using inverse heat conduction approach // J. of Mech. Sci. and Tech. – 2012. – 26 (11). – P. 1681–1690.
9. Mohammad Javad Kazemzadeh-Parsi, Mohammad Amin Ahmadfard, Alireza Tahavvor. Location and size identification of circular cavities via boundary temperature measurements using artificial neural network // 19th Annual Conference on Mechanical Engineering-ESME2011, 10–12 May, 2011. – Birjand, Iran: The University of Birjand, 2011.
10. Souza M. P. V., Rebello J. M. A., Soares S.D., Freitas G. A. C. Defect detection in fiberglass reinforced epoxy composite pipes reproducing field inspection conditions // 9th International Conference on Quantitative Infra-Red Thermography: Poland, July 2–5, 2008, Krakow. – P. 477–483.

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОВОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТУННЕЛЬНОЙ ПОЛОСТИ В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассмотрены задачи определения геометрических параметров цилиндрической туннельной полости в длинном цилиндрическом теле при заданной температуре поверхности в условиях стационарного нагрева тела сосредоточенными потоками и конвективного теплообмена с внешней средой. С использованием граничных интегральных уравнений построена двумерная математическая модель теплового зондирования тела, в рамках которой сформулированы прямая и обратная задачи идентификации параметров полости. Гранично-элементным методом численно исследована прямая задача. На этой основе определены и изучены информативные параметры температурного поля поверхности тела. С помощью информативных параметров обратную задачу сведено к переопределенной системе неявно заданных нелинейных уравнений относительно геометрических параметров полости. Разработан итерационный гранично-элементный алгоритм решения этой системы, основанный на методе Гаусса–Ньютона.

A BOUNDARY-ELEMENT METHOD FOR SOLVING OF 2-D STEADY-STATE PROBLEMS FOR THERMAL IDENTIFICATION OF TUNEL CAVITY IN A LONG CYLINDER

The problems for determination of geometrical parameters of a cylindrical cavity in the long cylindrical body are considered in the paper. Temperature field of body's external surface, caused by its heating by concentrated stationary heat fluxes under condition of convective heat exchange of the body with environment is used as input data for identification problem. A 2-d mathematical model for thermal sounding of the object has been built with the use of the boundary integral equations. The direct and inverse problems for identification of parameters of cavity have been formulated within the model. The direct problem was numerically studied with use of boundary-element method. On this basis informative parameters of the surface temperature field have been identified and quantitatively studied. Using the informative parameters the inverse problem was reduced to a redefined system of nonlinear implicit equations. An iterative boundary-element algorithm based on Gauss–Newton method has been developed for solving this system.