

ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИВОМ

На основі отриманого аналітичного розв'язку одновимірної задачі термопружності для півпростору з багат шаровим покривом за конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем досліджено термонапружений стан системи.

Вступ. Задачі про визначення напруженого стану півпростору з покривом за дії різних типів механічного навантаження розглядали в працях [1, 14, 21, 26, 28].

За врахування впливу нестационарних температурних полів на формування температурних напружень у системі тіло-покрив необхідно розв'язувати задачі теплопровідності для неоднорідного тіла. Аналітичні розв'язки відповідних крайових задач для півпростору з одношаровим покривом отримані для задач з граничними умовами першого [10, 34], другого [16, 30, 35] і третього [2, 3] роду. Шаруватість покривів ускладнює задачі, тому в таких випадках найчастіше використовують числові методи [4, 12], сингулярні інтегральні перетворення [22] та наближені аналітичні підходи [5, 7, 17, 24]. Задачі термопружності для півпростору з одношаровим однорідним покривом розглядали раніше [8, 15, 18, 23, 27, 29, 33].

Нижче на основі отриманого в праці [19] розв'язку задачі теплопровідності для півпростору з багат шаровим покривом знайдено розв'язок відповідної задачі термопружності та досліджено термонапружений стан системи тіло-багат шаровий покрив за конвективного нагрівання зовнішнім середовищем.

Формулювання задачі теплопровідності. Розглянемо одновимірну задачу теплопровідності для півпростору з n -шаровим покривом товщиною

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i \text{ за конвективного теплообміну.}$$

Рівняння теплопровідності і початкові умови мають вигляд

$$\frac{\partial t_k}{\partial \tau} = a_k \frac{\partial^2 t_k}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$t_k|_{\tau=0} = t_0 = \text{const}, \quad k \in \{T\} \cup \{1, \dots, n\}. \quad (2)$$

Приймаємо, що на межі покрив-середовище відбувається теплообмін згідно з законом Ньютона:

$$\lambda_n \frac{\partial t_n}{\partial z} = \mu (t_n - t_C) \quad \text{при} \quad z = z_n = -\delta, \quad (3)$$

а на поверхнях поділу шарів покриву і покриву з тілом виконуються умови ідеального теплового контакту

$$t_i = t_{i-1}, \quad \lambda_i \frac{\partial t_i}{\partial z} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}}{\partial z}, \quad \text{якщо} \quad z = z_{i-1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \delta_j, \quad i \in \{2, \dots, n\}, \quad (4)$$

$$t_1 = t_T, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = \lambda_T \frac{\partial t_T}{\partial z}, \quad \text{якщо} \quad z = z_0 = 0,$$

а на безмежності – умова

$$t_T = t_0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Тут t_i , t_T , t_C – температура i -го шару покриву, тіла і середовища від-

повідно; δ_i – товщина i -го шару; $a_k = \lambda_k / \omega_k$, λ_k і ω_k – коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності і теплоємності; μ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриву.

Розв’язок задачі теплопровідності. Для розв’язування задачі використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриву на теплоперенос у системі узагальненими граничними умовами [15, 20]. Тоді температуру в тілі визначають з розв’язку рівняння (1) для півпростору за початкової умови (2), умови на безмежності (5) та узагальненої граничної умови, яка тут матиме вигляд [31, 32]

$$\lambda_T \left(1 + \frac{\mu}{H} \right) \frac{\partial t_T}{\partial z} + \mu (t_C - t_T) = \Omega \frac{\partial t_T}{\partial \tau} \quad \text{при } z = 0, \quad (6)$$

де $\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \delta_i$, $H^{-1} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$ – зведені теплоємність та термоопір покриву. Температуру в покриві визначатимуть формули відновлення [31, 32].

Аналітичний розв’язок цієї задачі такий [19]:

для $\Omega \neq 0$, якщо $1 + \xi \text{Bi} - 2\sqrt{\eta \text{Bi}} > 0$:

$$\theta_T(\rho, \text{Fo}) = \text{erfc } \varphi - \frac{1}{2\Delta} [(1 + \Delta)F_1(\rho, \text{Fo}) - (1 - \Delta)F_2(\rho, \text{Fo})], \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad (7)$$

$$\theta_i(\rho, \text{Fo}) = 1 - \frac{1}{2\Delta} \sum_{m=1}^2 ((-1)^{m+1} + \Delta)(1 + r_i(\rho)q_m)F_m(0, \text{Fo}),$$

$$\rho_i \leq \rho \leq \rho_{i-1}, \quad i \in \{1, \dots, n\};$$

для $\Omega \neq 0$, якщо $1 + \xi \text{Bi} - 2\sqrt{\eta \text{Bi}} < 0$:

$$\theta_T(\rho, \text{Fo}) = \text{erfc } \varphi - \frac{\exp(\kappa\rho + (1 - \Delta^2)\beta_0^2)}{\Delta} [(\text{erfc } \beta - I_1(\rho, \text{Fo}))g_1(\chi) + I_2(\rho, \text{Fo})g_2(\chi)], \quad (8)$$

$$\theta_i(\rho, \text{Fo}) = 1 - \frac{r_i(\rho)}{\sqrt{\pi \text{Fo}}} - \left\{ \left[(1 + \kappa r_i(\rho)) \text{erfc } \beta_0 - I_{10} - r_i(\rho) \left(\frac{\exp(-\beta_0^2)}{\sqrt{\pi \text{Fo}}} + \frac{I_{40}}{\sqrt{\text{Fo}}} - \Delta \kappa I_{20} \right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times g_1(\chi_0) + \left[I_{20} - r_i(\rho) \left(\Delta \kappa (\text{erfc } \beta_0 - I_{10}) + \frac{I_{30}}{\sqrt{\text{Fo}}} \right) \right] g_2(\chi_0) \right\} \frac{\exp((1 - \Delta^2)\beta_0^2)}{\Delta};$$

для $\Omega \neq 0$, якщо $1 + \xi \text{Bi} - 2\sqrt{\eta \text{Bi}} = 0$:

$$\theta_T(\rho, \text{Fo}) = \text{erfc } \varphi - \frac{2\beta_0}{\sqrt{\pi}} \exp(-\varphi^2) + (\kappa\rho + 2\beta_0^2 - 1)F_3(\rho, \text{Fo}), \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad (9)$$

$$\theta_i(\rho, \text{Fo}) = 1 - 2(1 + \kappa r_i(\rho)) \frac{\beta_0}{\sqrt{\pi}} - (1 - 2\beta_0^2(1 + \kappa r_i(\rho)))F_3(0, \text{Fo}),$$

$\rho_i \leq \rho \leq \rho_{i-1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$;

для $\Omega = 0$: $\theta_T(\rho, \text{Fo}) = \text{erfc } \varphi - F_4(\rho, \text{Fo})$, $0 \leq \rho < \infty$, (10)

$$\theta_i(\rho, \text{Fo}) = 1 - \left(1 + \frac{\text{Bi}}{1 + \xi \text{Bi}} r_i(\rho) \right) F_4(0, \text{Fo}), \quad \rho_i \leq \rho \leq \rho_{i-1}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Тут $\theta_k = \frac{t_k - t_0}{t_C - t_0}$, $k \in \{T\} \cup \{1, \dots, n\}$ – безрозмірна температура; $\rho = \frac{z}{z_*}$ –

безрозмірна координата; $\text{Fo} = \frac{a_T \tau}{z_*^2}$ – число Фур’є; $\text{Bi} = \frac{\mu z_*}{\lambda_T}$ – критерій Біо;

$\xi = \frac{H^{-1}}{z_* / \lambda_T}$ – відносний ефективний термоопір покритву, $\eta = \frac{\Omega}{\omega_T z_*}$ – відносна ефективна теплоємність покритву; z_* – вибрана одиниця масштабу;

$$r_i(\rho) = \lambda_T \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\delta_j}{z_* \lambda_j} + \frac{\rho - \rho_{i-1}}{\lambda_i} \right), \quad i \in \{1, \dots, n\}; \quad \rho_j = \frac{z_j}{z_*}, \quad j \in \{0, \dots, n\};$$

$$F_m(\rho, Fo) = \exp(q_m \rho + q_m^2 Fo) \operatorname{erfc}(\varphi + q_m \sqrt{Fo}), \quad m \in \{1, 2, 3, 4\};$$

$$q_1 = (1 - \Delta)\kappa, \quad q_2 = (1 + \Delta)\kappa, \quad q_3 = \kappa,$$

$$q_4 = \frac{\operatorname{Bi}}{1 + \xi \operatorname{Bi}}, \quad \Delta = \sqrt{\left| 1 - \frac{4\eta \operatorname{Bi}}{(1 + \xi \operatorname{Bi})^2} \right|}, \quad \kappa = \frac{1 + \xi \operatorname{Bi}}{2\eta}, \quad \varphi = \frac{\rho}{2\sqrt{Fo}},$$

$$\{I_1(\rho, Fo), I_2(\rho, Fo)\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta^2(\rho, Fo)) \int_0^{\Delta\beta_0} \exp(y^2) \{\sin(2\beta(\rho, Fo)y), \cos(2\beta(\rho, Fo)y)\} dy,$$

$$g_1(y) = \Delta \cos y - \sin y, \quad g_2(y) = \Delta \sin y + \cos y, \quad \beta(\rho, Fo) = \frac{\rho}{2\sqrt{Fo}} + \kappa\sqrt{Fo},$$

$$\beta_0 = \beta(0, Fo) = \kappa\sqrt{Fo}, \quad \chi(\rho, Fo) = \Delta(\kappa\rho + 2\kappa^2 Fo),$$

$$\chi_0 = \chi(0, Fo) = 2\Delta\kappa^2 Fo, \quad I_{m0} = I_m(0, Fo), \quad m \in \{1, 2\};$$

$$\{I_{30}, I_{40}\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\beta_0^2) \int_0^{\Delta\beta_0} \exp(y^2) \{y \sin(2\beta_0 y), y \cos(2\beta_0 y)\} dy.$$

Розв’язок задачі термопружності. Для вільної від зовнішнього навантаження поверхні покритву зі зміною температури за формулами (7)–(10) напруження в системі будуть [13, 9]:

$$\sigma_{xx}^k = \sigma_{yy}^k = \sigma^k(\rho, Fo) = \frac{E_k}{1 - \nu_k} [A_1(Fo) + A_2(Fo)\rho - (t_C - t_0)\alpha_k(\rho)\theta_k(\rho, Fo)], \quad (11)$$

$$\sigma_{zz}^k = \sigma_{xz}^k = \sigma_{yz}^k = \sigma_{xy}^k = 0, \quad k \in \{T\} \cup \{1, \dots, n\},$$

де $A_1(Fo)$, $A_2(Fo)$ – невідомі функції; α – коефіцієнт лінійного температурного розширення; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; $\rho \in [-\frac{\delta}{z_*}, \infty)$.

Задовольняючи умову відсутності напружень на нескінченності

$$\sigma^T(\rho, Fo) = 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (12)$$

остаточно отримуємо вирази для ненульових напружень:

$$\sigma^k(\rho, Fo) = -\frac{E_k}{1 - \nu_k} (t_C - t_0)\alpha_k(\rho)\theta_k(\rho, Fo). \quad (13)$$

Ці формули для півпростору з одношаровим покритвом збігаються з наведеними раніше [29, 23, 8].

Числові результати та їх аналіз. Таким чином, формули (7)–(10), (13) дають розв’язок нестационарної задачі теплопровідності та термопружності для півпростору з багатошаровим покритвом. На основі цього розв’язку дослідимо термонапружений стан у системі тіло–багатошаровий покритв за конвективного нагрівання.

Рис. 1 ілюструє зміну в часі безрозмірного напруження

$$\tilde{\sigma}^T = \sigma^T(0, Fo) \Big/ \frac{E_T \alpha_T (t_C - t_0)}{1 - \nu_T} \quad \text{у півпросторі на поверхні поділу з покритвом}$$

залежно від ефективного термоопору ξ та ефективної теплоємності покритву η , а рис. 2 – від параметра Bi . Ці рисунки описують вплив теплофізичних характеристик покритву та умов теплообміну з середовищем на зміну напружень у підкладці. Розрахунки для рис. 1 виконано при $Bi = 1$, для рис. 2 – при $\zeta = 0.1, \eta = 0.1$.

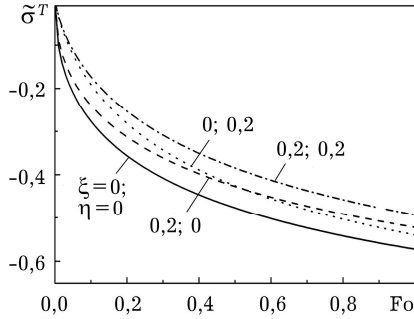


Рис. 1.

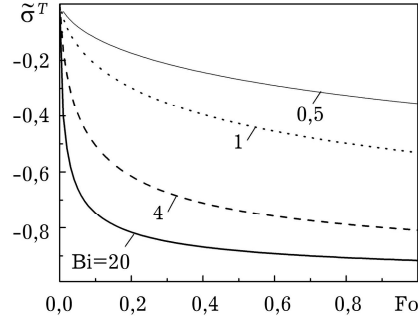


Рис. 2.

За цими графіками можна оцінити максимально можливі напруження в півпросторі під час нагріву (або охолодження) зовнішнім середовищем. Через покритв їх абсолютні значення на граничній поверхні тіла зменшуються (крива $\xi = 0, \eta = 0$ на рис. 1; покритв відсутній). Зі збільшенням коефіцієнта тепловіддачі з поверхні покритву теплоперенос інтенсифікується, і, відповідно, збільшуються абсолютні значення напружень на поверхні тіла (рис. 2).

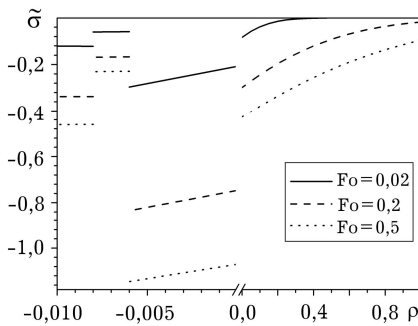


Рис. 3.

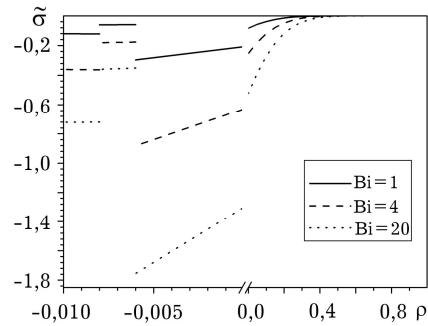


Рис. 4.

Показано розподіл напружень за просторовою координатою у системі півпростір–тришаровий покритв для деяких моментів часу при $Bi = 1$ (рис. 3) та для різних значень Bi при $Fo = 0.02$ (рис. 4) за таких співвідношень геометричних і термомеханічних параметрів шарів покритву:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1, \quad \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 3 : 10 : 2, \quad \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 6 : 1, \\ \frac{E_1 \alpha_1}{1 - \nu_1} : \frac{E_2 \alpha_2}{1 - \nu_2} : \frac{E_3 \alpha_3}{1 - \nu_3} = 5 : 1 : 2 \quad \text{при} \quad \lambda_T / \lambda_1 = 10, \quad \omega_T / \omega_1 = 1, \quad \frac{E_T \alpha_T}{1 - \nu_T} / \frac{E_1 \alpha_1}{1 - \nu_1} = 0.5, \quad \delta / z_* = 0.01.$$

Бачимо, що напруження в покритві розривні і зростають з часом. Згідно з формулою (13) їх стрибок на поверхнях поділу шарів покритву визначає

$$\text{відношення} \quad \frac{E_i \alpha_i}{1 - \nu_i} / \frac{E_{i-1} \alpha_{i-1}}{1 - \nu_{i-1}} \quad (i \in \{2, \dots, n\}), \text{ а на поверхні поділу покритву з}$$

$$\text{тілом} - \frac{E_1 \alpha_1}{1 - \nu_1} / \frac{E_T \alpha_T}{1 - \nu_T} \quad [29].$$

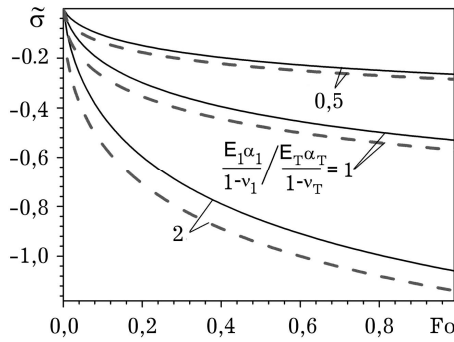


Рис. 5.

На рис. 5 показано зміну з часом безрозмірного напруження $\tilde{\sigma} = \sigma^i(\rho, Fo) / \frac{E_T \alpha_T (t_C - t_0)}{1 - \nu_T}$ у покритві на поверхні поділу з тілом при $\rho = 0$ (суцільні криві) та на зовнішній поверхні покритву при $\rho = -0.01$ (штрихові криві) для різних значень відношення $\frac{E_i \alpha_i}{1 - \nu_i} / \frac{E_T \alpha_T}{1 - \nu_T}$. Рівень напружень у покритві у будь-який момент часу пропорційний величині $\frac{E_i \alpha_i}{1 - \nu_i}$.

Зауважимо, що з розрахунку температурного поля за моделлю із узагальненою граничною умовою (6) можна отримати відмінний від рівномірного розподіл напружень за товщиною у шарах покритву (рис. 3 і 4), що не вдається за моделлю із узагальненою граничною умовою [3], побудованою на концепції „зосередженої смності” [6]. Причому за більших значень Vi це відхилення від рівномірного за товщиною у шарах покритву зростає (рис. 4).

Слід відзначити, що під час нагрівання півпростору з покритвом у системі розвиваються стискальні напруження, які можуть призводити до відшарування покриттів внаслідок втрати стійкості [11], а під час охолодження – розтягальні, які можуть спричиняти розтріскування покриттів [25].

Висновки. На основі аналітичного розв’язку нестационарної задачі термопружності для півпростору з тонким багатошаровим покритвом, отриманого із застосуванням узагальнених граничних умов теплообміну, проаналізовано вплив геометричних і термомеханічних характеристик покритву та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на термопружний стан системи тіло–багатошаровий покритв. Виявлено, що напружений стан півпростору визначають ефективні теплофізичні характеристики покритву – зведені термоопір і теплоємність та інтенсивність тепловіддачі з поверхні покритву, а також термомеханічні параметри – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона і коефіцієнт лінійного температурного розширення тіла. Отримані формули враховують перепад температури за товщиною покритву, що дає можливість точніше розраховувати термонапружений стан у його шарах.

1. Айзикович С. М., Крєнев Л. И., Трубочик И. С. Деформирование полупространства с градиентным упругим покрытием при действии произвольной осесимметричной нагрузки // Прикл. математика и механика. – 2008. – 72, № 4. – С. 644–651.
(Aizikovich S. M., Krenev L. I., Trubchik I. S. The deformation of a half-space with a gradient elastic coating under arbitrary axisymmetric loading// J. Appl. Math. Mech. – 2008. – 72, № 4. – P. 461–467).
2. Аттетков А. В., Власов П. А., Волков И. К. Формирование температурных полей в полупространстве с теплозащитным покрытием // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. – 2000. – № 3. – С. 43–54.

3. *Аттетков А. В., Власова Л. Н., Волков И. К., Загоруйко Е. А.* Формирование температурных полей в области, содержащей тонкостенное покрытие // Там же. – 1999. – № 2. – С. 3–10.
4. *Веселовский В. Б.* Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях. – Днепропетровск: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2002. – 436 с.
5. *Веселовский В. Б.* Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных теплозащитных покрытий // Прикл. вопросы аэрогазодинамики. – К.: Наук. думка, 1987. – С. 95–100.
6. *Ержанов Р. Ж., Мацевитый Ю. М., Султангазин У.М., Шерышев В.П.* Сосредоточенная емкость в задачах теплофизики и микроэлектроники. – К.: Наук. думка, 1992. – 296 с.
7. *Зарубин В. С.* Расчет и оптимизация термоизоляции. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
8. *Князева А. Г.* О распределении температуры, напряжений и деформации в системе «материал–покрытие» при условии неидеальности теплового контакта между веществами // Физ. мезомеханика. – 2000. – 3, № 1. – С. 39–51.
9. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багат шаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 38, № 6. – С. 31–38.
(*Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // Mater. Sci. – 2002. – 38, № 6. – P. 798–808).
10. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
11. *Люкшин П. А., Люкшин Б. А., Матолыгина Н. Ю., Панин С. В.* Моделирование отслоения термобарьерных покрытий под действием температурных напряжений // Изв. вузов. Физика. – 2011. – 54, № 10–2. – С. 122–130.
12. *Люкшин П. А., Люкшин Б. А., Матолыгина Н. Ю., Панин С. В.* Расчет температуры и температурных напряжений в многослойном покрытии // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2010. – 16, № 4. – С. 563–574.
13. *Мартыненко А. А.* К исследованию остаточных напряжений в многослойных покрытиях // Проблемы прочности. – 1980. – № 11. – С. 109–110.
(*Martynenko A.A.* Residual stresses in multilayer coatings // Strength of Mater. – 1980. – 12, № 11. – P. 1448–1450).
14. *Плевако В.* Напружений стан неоднорідних покриттів // Машинознавство. – 2001. – № 3(45). – С. 24–28.
15. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* О влиянии поверхностных слоев на процесс диффузии и на обусловленное им напряженное состояние в твердых телах // Физ.-хим. механика материалов. – 1967. – 3, № 5. – С. 575–583.
(*Podstrigach Ya. S., Shevchuk P. R.* Effect of surface layers on diffusion processes and the resulting stress state in solids // Mater. Sci. – 1967. – 3, № 5. – P. 420–426).
16. *Рыкалин Н. Е., Углов А. А., Кокора А. Н.* Лазерная обработка материалов. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.
17. *Третьяченко Г. Н., Барило В. Г.* Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий // Проблемы прочности. – 1993. – № 1. – С. 41–49.
(*Tret'yachenko G. N., Barilo V. G.* Thermal and stressed states of multilayered coatings // Strength of Materials. – 1993. – 25, № 1. – P. 34–41).
18. *Турчин О., Турчин І.* Квазістатичні напруження в півпросторі з покриттям при локальному остиганні // Сучасні проблеми механіки і математики: в 3-х т. / Під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника. – Львів; Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1. – С. 206–208.
19. *Шевчук В. А.* Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием // Инж.-физ. журн. – 2013. – 86, № 2. – С. 423–431.
(*Shevchuk V. A.* Analytical solution of nonstationary heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2013. – 86, № 2. – P. 450–459).

20. Шевчук В. А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
21. Beevers C. E. Some static problems for elastic bodies with a crust // *Meccanica*. – 1985. – **20**, № 1. – P. 38–42.
22. Belyakov N. S. Singular integral transforms for heat transfer problems in semi-infinite solids with coatings // *Heat Mass Transfer*. – 2010. – **46**, № 3. – P. 355–364.
23. Ciawarella M, Decuzzi P., Tagarielli V. L., Demelio G. P. Simple formulas for thermoelastic stresses in TBC coatings // *J. Thermal Stresses*. – 2003. – **26**, Iss. 5. – P. 409–422.
24. Elperin T., Rudin G. Temperature field in multilayer assembly affected by a local laser heating // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1995. – **38**, № 17. – P. 3143–3147.
25. Kokini K., Choules B. D. Surface thermal fracture of functionally graded ceramic coatings: effect of architecture and materials // *Comp. Eng.* – 1995. – **5**, № 7. – P. 865–877.
26. Kulchytsky-Zhyhailo R., Bajkowski A. Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space // *Int. J. Mech. Sci.* – 2012. – **54**, № 1. – P. 105–112.
27. Mioduchowski A., Plochocki Z. Thermal stresses in a coating layer. I. General theoretical scheme // *Acta Mech.* – 2010. – **215**. – P. 319–333.
28. Rahman M., Newaz G. Elastostatic surface displacements of a half-space reinforced by a thin film due to an axial ring load // *Int. J. Engn. Sci.* – 1997. – **35**, № 6. – P. 603–611.
29. Rizk A. A., Erdogan F. Cracking of coated materials under transient thermal stresses // *J. Thermal Stresses*. – 1989. – **12**, № 2. – P. 125–168.
30. Rozniakowska M., Evtushenko A. A. The effect of the time structure of laser pulse on the temperature distribution in homogeneous body with coating // *Heat Mass Transfer*. – 2007. – **43**, № 5. – P. 439–447.
31. Shevchuk V. A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // *Lecture Notes in Computer Sciences*. – 2002. – **2330**. – P. 500–509.
32. Shevchuk V. A. Modeling and computation of heat transfer in a system “body-multilayer coating” // *Heat Transfer Research*. – 2006. – **37**, Iss. 5. – P. 412–423.
33. Yoon J., Ru C. Q., Mioduchowski A. Effect of a thin surface coating layer on thermal stresses within an elastic half-plane // *Acta Mech.* – 2006. – **185**, Iss. 3–4. – P. 227–243.
34. Zhang S., Liu Z. An analytical model for transient temperature distributions in coated carbide cutting tools // *Int. Commun. Heat Mass Transfer*. – 2008. – **35**, № 10. – P. 1311–1315.
35. Zhang S., Liu Z. Analytical and numerical solutions of transient heat conduction in monolayer coated-tools // *J. Mater. Proc. Technol.* – 2009. – **209**, № 5. – P. 2369–2376.

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С МНОГОСЛОЙНЫМ ПОКРЫТИЕМ

На основе полученного аналитического решения одномерной задачи термоупругости для полупространства с многослойным покрытием при конвективном теплообмене с внешней средой исследовано термоупругое состояние системы.

THERMOELASTIC PROBLEM FOR HALF-SPACE WITH MULTILAYER COATING

Based on the obtained analytical solution of a one-dimensional thermoelastic problem for a half-space with a multilayer coating under convective heat exchange with environment, analysis of thermelastical state of the system has been performed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.06.13