

**ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ТА РЕЖИМІВ КЕРУВАННЯ
ЧОТИРИЛАНКОВОГО ЗАМКНУТОГО МАНІПУЛЯТОРА**

Досліджено задачу оптимізації конструктивних параметрів (лінійних розмірів ланок) та режимів керування чотириланкового маніпулятора замкнутої кінематичної структури. Маніпулятор під дією активних керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортні операції у горизонтальній площині. За критерій мінімізації взято квадратичний (за керуючими моментами сил) функціонал. Алгоритм розв'язання задачі ґрунтується на параметризації узагальнених координат маніпулятора сім'єю заданих функцій та використанні методик обернених задач динаміки і числових процедур математичного програмування.

Для підвищення рівня автоматизації сучасного виробництва необхідно вдосконалити існуючі та створити нові зразки робототехнічних систем з високими функціональними показниками. На етапі розробки й проектування роботів важливо мати оптимальні (у певному сенсі) керування та параметри елементів конструкцій. Одним із результативних підходів, що дає можливість ефективно й обґрунтовано одержати ці характеристики, є використання засобів математичного моделювання і теорії оптимізації. Тому розробка та дослідження математичних моделей маніпуляційних роботів, створення на їх основі розрахункових алгоритмів оптимізації конструкцій і режимів керування є актуальними задачами робототехніки. Зазначимо також, що задачі оптимізації маніпуляційних систем завжди вирізнялися актуальністю, що зумовлено їх широким розповсюдженням у різних галузях промисловості.

Серед маніпуляційних роботів важливе місце займають маніпулятори замкнутої кінематичної структури, яка часто дає можливість розмістити керуючі приводи на нерухомій основі робота, облегшивши так його рухомі ланки [15]. Також замкнуті ланки зміцнюють конструкцію маніпулятора, що загалом підвищує точність позиціонування його робочого органу.

Задачі оптимізації замкнутих маніпуляційних систем у різних формулюваннях досліджували, зокрема, у працях [5, 13, 16, 17]. Розглянуто [5] чотириланковий замкнутий маніпулятор, що виконує циклічну транспортну операцію: переносить вантаж із початкового положення у задане і повертається назад без вантажу. Рухається система під дією активних керувань (моментів сил) та сил, що генеруються пружинно-демпферними пристроями (пасивними приводами). Побудовано математичну модель маніпулятора, у межах якої розроблено алгоритм розрахунку субоптимальних параметрів пасивних приводів та керувань маніпулятора за умови виконання циклічної операції з мінімізацією заданого квадратичного функціонала. Алгоритм ґрунтується на процедурах параметризації, концепції обернених задач динаміки та числових методах нелінійного математичного програмування. У статті [13] досліджено задачу оптимального керування замкнутим чотириланковим маніпулятором. Оптимальні керування побудовано на принципі максимуму Понтрягіна з використанням числових методів розв'язання двочислових крайових задач. Замкнутий чотириланковий маніпулятор розглядають також у праці [16]. Тут три замкнуті ланки маніпулятора обертаються у горизонтальній площині, а четверта поступально переміщається у вертикальному напрямку. Методами параметричної оптимізації знайдено субоптимальні параметри пасивних приводів та побудовано субоптимальні режими керування маніпулятора. Досліджено [17] кінематичну структуру замкнутого чотириланкового маніпулятора, зокрема, проаналізовано його сингулярні конфігураційні положення.

Нижче досліджено задачу оптимізації конструктивних параметрів (лінійних розмірів ланок) та режимів керування чотириланкового замкнутого маніпулятора. Маніпулятор під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію: переносить вантаж з одного положення робочої зони в інше. Траєкторію руху заздалегідь не задають, а визначають під час оптимізації. На конструктивні параметри та керування накладають двосторонні обмеження, за критерій мінімізації взято квадратичний (за керуваннями) функціонал. Оптимізуємо ланки за умови сталості їх сумарних довжини та маси. Мета статті – дослідити вплив розподілу довжин та маси ланок маніпулятора на його оптимальні режими керування. Алгоритм розв'язання задачі оптимізації ґрунтується на параметризації узагальнених координат маніпулятора сімейством заданих функцій та методиці обернених задач динаміки. У результаті вихідну задачу оптимального керування (з параметрами) зводимо до задачі мінімізації функцій багатьох змінних, у якій за параметри оптимізації вибираємо параметри конструкції та коефіцієнти параметризації. Числові розрахунки підтвердили ефективність запропонованого алгоритму.

Механіко-математична модель маніпулятора. Розглянемо чотириланковий маніпулятор, кінематична схема якого зображена на рис. 1 [5]. Він здійснює плоскопаралельний рух у горизонтальній площині O_1XY . Для моделювання руху використаємо систему чотирьох твердих тіл O_1A_1 , A_1B , BA_2 , A_2O_2 , послідовно з'єднаних між собою циліндричними шарнірами A_1 , B , A_2 ; за допомогою циліндричних шарнірів O_1 , O_2 система зв'язана з нерухомою основою. Осі всіх шарнірів ортогональні площині руху O_1XY , шарніри вважаємо ідеальними. У захваті маніпулятора розміщено вантаж, який моделюємо точковою масою m , зосередженою у шарнірі B .

Маніпулятор рухається під дією керуючих моментів сил u_1 , u_2 , прикладених у шарнірах O_1 , O_2 . Для опису руху замкнутої маніпуляційної системи умовно розділимо її у шарнірі B на дві підсистеми O_1A_1B і O_2A_2B , навантаживши кожен з них у точці B масою $0.5m$ та силою реакції \mathbf{R} і $-\mathbf{R}$ відповідно. Введемо позначення: α_i , β_i – кути повороту ланок O_iA_i , A_iB відносно осі O_1X ; R_x , R_y – проекції вектора реакції \mathbf{R} на осі системи координат O_1XY ; $a_i = |O_iA_i|$, $b_i = |A_iB|$ – довжини ланок маніпулятора; d_i –

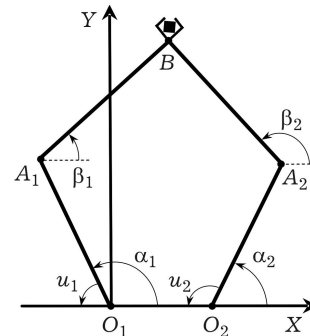


Рис. 1.

відстань від осі шарніра A_i до центра маси ланки A_iB ; m_{bi} – маса ланки A_iB ; J_{ai} , J_{bi} – моменти інерції ланок O_iA_i , A_iB відносно осей шарнірів O_i , A_i відповідно, $i = 1, 2$; $L = |O_1O_2|$ – довжина бази закріплення маніпулятора до основи. Тоді рівняння руху маніпулятора можна записати у вигляді системи чотирьох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [5]:

$$\begin{aligned} K_{ai}\ddot{\alpha}_i + K_i[\ddot{\beta}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) + \dot{\beta}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i)] &= \\ &= u_i + (-1)^i a_i (R_x \sin \alpha_i - R_y \cos \alpha_i), \\ K_{bi}\ddot{\beta}_i + K_i[\ddot{\alpha}_i \cos(\alpha_i - \beta_i) - \dot{\alpha}_i^2 \sin(\alpha_i - \beta_i)] &= \\ &= (-1)^i b_i (R_x \sin \beta_i - R_y \cos \beta_i), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1)$$

та двох тригонометричних співвідношень

$$\begin{aligned} a_1 \cos \alpha_1 + b_1 \cos \beta_1 &= L + a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \cos \beta_2, \\ a_1 \sin \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1 &= a_2 \sin \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2, \end{aligned} \quad (2)$$

де $K_{ai} = J_{ai} + a_i^2(m_{bi} + 0.5m)$, $K_{bi} = J_{bi} + 0.5mb_i^2$, $K_i = a_i(d_i m_{bi} + 0.5mb_i)$. Тут і нижче крапкою (над величиною) позначено диференціювання за часом t . Співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду [11, 12], які описують рух чотириланкового маніпулятора під дією керуючих моментів сил u_1 , u_2 . Співвідношення (2) виражають умови нерозривності геометричної структури замкнутого маніпулятора в шарнірі B .

Оптимізація параметрів та законів руху маніпулятора. Задачу оптимізації конструктивних параметрів та законів руху маніпулятора досліджуватимемо за певних припущень. Нехай ланки маніпулятора є прямолінійними стрижнями з кільцевим поперечним перерізом та з попарно (для пар $\{O_1A_1, O_2A_2\}$, $\{A_1B, A_2B\}$) рівними параметрами: $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, постійними внутрішніми d_a , d_b та зовнішніми D_a , D_b діаметрами та сталими густинами матеріалу ρ_a , ρ_b відповідно, $d_1 = d_2 = b/2$. Оптимізуватимемо лінійні розміри ланок маніпулятора за умови сталості їх сумарних довжини та маси $a + b = l^0$, $m_a + m_b = m^0$, а також сталості відношень діаметрів $d_a/D_a = \omega_a^0$, $d_b/D_b = \omega_b^0$, де l^0 , m^0 , ω_a^0 , ω_b^0 – задані сталі величини, m_a – маса ланки O_1A_1 (O_2A_2), $m_b = m_{b1} = m_{b2}$. Виберемо за параметри оптимізації безрозмірні змінні $\mathbf{c} = (\mu, \nu)$: $\mu = a/l^0$, $\nu = m_a/m^0$, на які накладемо обмеження

$$\mu^0 \leq \mu \leq \mu^1, \quad \nu^0 \leq \nu \leq \nu^1, \quad (3)$$

де μ^0 , μ^1 , ν^0 , ν^1 – задані сталі величини; $0 < \mu^0 \leq \mu^1 < 1$, $0 < \nu^0 \leq \nu^1 < 1$. Зазначимо, що із умов сталості довжини та маси дволанковика O_1A_1B (O_2A_2B) слідує співвідношення $b = (1 - \mu)l^0$, $m_b = (1 - \nu)m^0$.

Маніпулятор переносить вантаж із заданого початкового положення у заданий кінцевий стан упродовж часу T . Зазначимо, що такі операції притаманні маніпуляційним системам, які функціонують у складі виробництв, де початкове й кінцеве положення та тривалість робочого циклу маніпулятора строго регламентовані умовами технологічного процесу. Обмежимося дослідженням керованого руху маніпулятора у верхній півплощині системи координат O_1XY з урахуванням таких кінематичних умов:

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \pi, \quad \beta_1 \leq \alpha_1, \quad \alpha_2 \leq \beta_2, \quad \beta_2 - \beta_1 \neq \pi, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Остання нерівність означає, що під час руху маніпулятора точка B не повинна перетинати пряму A_1A_2 .

Задамо положення та нульові швидкості захвата (точки B) маніпулятора у початковий $t = 0$ та кінцевий $t = T$ моменти часу руху системи:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad (5)$$

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \dot{x}(T) = \dot{y}(T) = 0, \quad (6)$$

де x , y – координати точки B у системі відліку O_1XY ; x_0 , y_0 , x_T , y_T – задані сталі параметри, які задовольняють умови досяжності захвата

$$x_\tau^2 + y_\tau^2 \leq l_{ab}^2, \quad (x_\tau - L)^2 + y_\tau^2 \leq l_{ab}^2, \quad \tau = 0, T$$

та узгоджені з умовами (4), згідно з якими захват у моменти часу $t = 0$ і $t = T$ слід розміщати по одну сторону від прямої A_1A_2 .

Нехай на керування u_1, u_2 накладено двосторонні обмеження

$$u_i^0 \leq u_i(t) \leq u_i^1, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Сформулюємо задачу оптимізації. **Задача 1.** Знайти такі конструктивні параметри \mathbf{c}^* та керування $u_1^*(t), u_2^*(t), t \in [0, T]$, які за обмежень (2)–(4), (7) забезпечують виконання маніпулятором транспортної операції (5), (6) та мінімізують функціонал

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (8)$$

Квадратичний функціонал (8) є типовим у задачах оптимального керування маніпуляційними системами [6, 10]. У разі, коли керування маніпулятором відбувається за допомогою електродвигунів постійного струму, функціонал (8) (за певних припущень) характеризує сумарну кількість тепла, яке виділяється в обмотках двигунів.

Відзначимо деякі особливості сформульованої задачі. Задача 1 є задачею спільної оптимізації конструктивних параметрів та режимів керування досліджуваного маніпулятора, тобто, це є задача оптимального керування з параметрами, що варіюють під час мінімізації функціонала (8). Це, а також суттєва нелінійність рівнянь руху (1), обмеження на узагальнені координати (2), (4) та керування (7) значно ускладнюють її розв'язання та викликають певні труднощі під час використання класичних методів теорії керування.

Ефективною для розв'язання задачі 1 є методика параметричної оптимізації [4–8, 16]. Суть її полягає у зведенні вихідної задачі оптимального керування (з параметрами) до задачі мінімізації функції багатьох змінних. Спочатку частину узагальнених координат механічної системи подаємо у вигляді лінійної комбінації заданих функцій з невідомими коефіцієнтами, решту координат визначаємо із умов (2). Далі, використовуючи підхід обернених задач динаміки, із рівнянь руху (1) знаходимо параметричне сімейство керувань $u_i(t, \mathbf{c}, \mathbf{k}), u_2(t, \mathbf{c}, \mathbf{k})$, де \mathbf{k} – вектор коефіцієнтів параметризації узагальнених координат. Підставивши керування $u_1(t, \mathbf{c}, \mathbf{k}), u_2(t, \mathbf{c}, \mathbf{k})$ у вираз для функціонала (8), отримуємо функцію багатьох змінних $E(\mathbf{c}, \mathbf{k})$. Виконання обмежень (4), (7) забезпечуємо методом зовнішніх штрафних функцій [2], попередньо подавши ці обмеження в інтегральній формі [5–7]:

$$\begin{aligned} g_1 &= \int_0^T \left[[-\alpha_1]_+^2 + (\alpha_1 - \pi]_+^2 \right] dt, \quad g_2 = \int_0^T \left[[-\alpha_2]_+^2 + (\alpha_2 - \pi]_+^2 \right] dt, \\ g_3 &= \int_0^T (\beta_1 - \alpha_1]_+^2 dt, \quad g_4 = \int_0^T (\alpha_2 - \beta_2]_+^2 dt, \quad g_5 = \int_0^T (\beta_2 - \beta_1 - \pi + \varepsilon]_+^2 dt, \\ g_{5+i} &= \int_0^T \left[(u_i^0 - u_i(t)]_+^2 + (u_i - u_i^1]_+^2 \right] dt, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут позначено $[w]_+ = w$ при $w > 0$, $[w]_+ = 0$ при $w \leq 0$, $\varepsilon > 0$ – заданий малий параметр, який характеризує допустиму віддаль від точки B до прямої A_1A_2 . У співвідношеннях (9) для означеності приймаємо, що точка B під час руху перебуває вище прямої A_1A_2 .

У результаті задачу 1 зводимо до задачі мінімізації функції багатьох змінних. **Задача 2.** Знайти такі параметри $\mathbf{c}^*, \mathbf{k}^*$, які за умов (3) мінімізують цільову функцію $E(\mathbf{c}, \mathbf{k}) + \langle \mathbf{h}, \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{k}) \rangle$. Тут $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_7)$, \mathbf{h} – вектор штрафних коефіцієнтів, кутowymi дужками позначено операцію скалярного

добутку. Для розв'язання задачі 2 можна використати відомі числові методи [2, 3]. Зауважимо, що по суті, вихідну задачу 1 замінюємо на дещо іншу задачу 2. Розв'язки цих задач близькі, однак, встановити апіорні оцінки цієї близькості, як правило, дуже складно. При цьому успіх застосування параметричного підходу залежить від вибору функцій параметризації.

Опишемо детальніше запропонований алгоритм. Аналіз кінематичної структури чотириланкового маніпулятора свідчить, що його керований рух можна однозначно задати двома незалежно варійованими функціями, за які виберемо кути $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $t \in [0, T]$. Використовуючи співвідношення (5), (6), задамо початкові (при $t = 0$) та кінцеві (при $t = T$) умови для кутів α_1 , β_1

$$\alpha_1(\tau) = \alpha_\tau, \quad \beta_1(\tau) = \beta_\tau, \quad \dot{\alpha}_1(\tau) = \dot{\beta}_1(\tau) = 0, \quad \tau = 0, T, \quad (10)$$

де величини α_τ , β_τ є розв'язком системи тригонометричних рівнянь

$$a \cos \alpha_\tau + b \cos \beta_\tau = x_\tau, \quad a \sin \alpha_\tau + b \sin \beta_\tau = y_\tau. \quad (11)$$

Враховуючи припущення про рух маніпулятора у верхній півплощині системи координат O_1XY та обмеження на кути (4), розв'язок системи рівнянь (11) запишемо у такому вигляді [5]:

$$\alpha_1 = \psi_\tau + \arccos \frac{a^2 + r_\tau^2 - b^2}{2ar_\tau}, \quad \beta_1 = \psi_\tau - \arccos \frac{b^2 + r_\tau^2 - a^2}{2br_\tau}, \quad (12)$$

де $\psi_\tau = \arccos(x_\tau / r_\tau)$; $r_\tau = \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2}$ – довжина радіус-вектора точки B у системі координат O_1XY в момент часу τ ($\tau = 0, T$). Більш загальний випадок конфігураційних положень дволанковика O_1A_1B розглянуто в праці [12].

Для параметризації функцій $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$ використаємо суму полінома третього порядку та скінченного тригонометричного ряду [5, 7, 8, 16]:

$$f = \sum_{i=0}^3 c_i^f t^i + \sum_{k=1}^n \left(a_k^f \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k^f \sin \frac{2k\pi}{T} t \right), \quad f(t) \equiv (\alpha_1(t), \beta_1(t)), \quad (13)$$

де c_i^f , a_k^f , b_k^f ($i = 0, 1, 2, 3$; $k = 1, \dots, n$) – невідомі коефіцієнти, які визначаємо під час розв'язання задачі нелінійного математичного програмування (див. нижче). Коефіцієнти полінома знаходимо за допомогою початкових та кінцевих умов (10)

$$c_0^f = f(0) - \sum_{k=1}^n a_k^f, \quad c_1^f = -\frac{2\pi}{T} \sum_{k=1}^n k b_k^f, \\ c_2^f = \frac{3}{T^2} [f(T) - f(0) - c_1^f T], \quad c_3^f = -\frac{2c_2^f}{3T}.$$

Кутові швидкості $\dot{\alpha}_1(t)$, $\dot{\beta}_1(t)$ та прискорення $\ddot{\alpha}_1(t)$, $\ddot{\beta}_1(t)$, $t \in [0, T]$, обчислюємо диференціюванням виразу (13).

Решту кутових координат $\alpha_2(t)$, $\beta_2(t)$ визначимо із умов нерозривності (2), які попередньо подамо у вигляді

$$a \cos \alpha_2 + b \cos \beta_2 = x - L, \quad a \sin \alpha_2 + b \sin \beta_2 = y, \quad (14)$$

де $x = a \cos \alpha_1 + b \cos \beta_1$, $y = a \sin \alpha_1 + b \sin \beta_1$. Аналогічно (11), (12) розв'язок системи тригонометричних рівнянь (14) запишемо так:

$$\alpha_2 = \varphi - \arccos \frac{a^2 + z^2 - b^2}{2az},$$

$$\beta_2 = \varphi + \arccos \frac{b^2 + z^2 - a^2}{2bz}, \quad (15)$$

де $\varphi = \arccos[(x - L) / z]$, $z = \sqrt{(x - L)^2 + y^2}$.

Кутові швидкості $\dot{\alpha}_2$, $\dot{\beta}_2$ та прискорення $\ddot{\alpha}_2$, $\ddot{\beta}_2$ отримаємо зі співвідношень (13), попередньо продиференціювавши їх (за часом t) потрібну кількість раз [5].

Керування u_1 , u_2 визначимо із рівнянь руху (1). Після підставлення виразів для кутів α_1 , β_1 , α_2 , β_2 та їх похідних у співвідношення (1) невідомі u_1 , u_2 (а також реакції R_x , R_y) отримаємо, розв'язавши систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \sin \alpha_1 & a \cos \alpha_1 \\ 0 & 0 & -b \sin \beta_1 & b \cos \beta_1 \\ 0 & 1 & a \sin \alpha_2 & -a \cos \alpha_2 \\ 0 & 0 & b \sin \beta_2 & -b \cos \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ R_x \\ R_y \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де компоненти вектора \mathbf{G} визначають ліві частини рівнянь (1). Відомо [9], що якщо визначник матриці \mathbf{A} відмінний від нуля, то система (16) має єдиний розв'язок. Після нескладних обчислень отримаємо вираз для визначника $\det \mathbf{A} = -b_1 b_2 \sin(\beta_1 - \beta_2)$, звідки, враховуючи обмеження (3), слідує $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Описаний вище алгоритм реалізовано в інтегрованому програмному середовищі MATLAB [1].

Числове моделювання. Опишемо результати розв'язання задачі оптимізації конструктивних параметрів та режимів керування досліджуваного маніпулятора. Розглянемо маніпулятор з такими параметрами: $\rho_a = \rho_b = 7850 \text{ кг/м}^3$, $L = 0.3 \text{ м}$, $m = 10 \text{ кг}$. В обмеженнях на оптимізаційні конструктивні параметри задавали $l^0 = 1.4 \text{ м}$, $m^0 = 10 \text{ кг}$, $\mu^0 = \nu^0 = 0.3$, $\mu^1 = \nu^1 = 0.7$, $\omega_a^0 = \omega_b^0 = 0.94$, для керувань $u_1^0 = u_2^0 = -1.2 \text{ Нм}$, $u_1^1 = u_2^1 = 1 \text{ Нм}$. Параметри транспортної операції $x_0 = 0$, $y_0 = 1.2 \text{ м}$, $x_T = 0.8 \text{ м}$, $y_T = 1.1 \text{ м}$, $T = 6 \text{ с}$.

Кількість членів тригонометричного ряду в (13) задавали $n = 8$. Як свідчать числові експерименти, збільшення кількості членів цього ряду не призвело до суттєвої зміни кінематичних і динамічних характеристик маніпулятора. В результаті загальна кількість параметрів оптимізації в задачі 2 становила 34, і для її розв'язання використовували алгоритм циклічного покоординатного спуску [3]. Штрафні коефіцієнти у зведеній цільовій функції задачі 2 набували значень $h_i = 10^4$, $i = 1, 2, \dots, 7$. Точність за параметрами оптимізації та значенням цільової функції становили відповідно 10^{-6} і 10^{-3} , час розв'язання задачі 2 на комп'ютері з процесором Phenom II X4 BE 965 (плата AMD 790 FX, 3.25 ГБ ОЗП) – близько 96 с.

У результаті розв'язання задачі 2 отримали оптимальні значення конструктивних параметрів $\mu^* = 0.3$, $\nu^* = 0.7$, що відповідає значенням лінійних розмірів ланок маніпулятора: $a^* = 0.42 \text{ м}$, $b^* = 0.98 \text{ м}$, $m_a^* = 7 \text{ кг}$, $m_b^* = 3 \text{ кг}$, $d_a^* = 0.143 \text{ м}$, $D_a^* = 0.152 \text{ м}$, $d_b^* = 0.061 \text{ м}$, $D_b^* = 0.065 \text{ м}$. Одержаний субоптимальний закон руху маніпулятора характеризується значеннями коефіцієнтів параметризації, поданими у табл. 1, при цьому мінімальне значення квадратичного функціонала (8) $E^* = 3.026$.

Таблиця 1.

Коефіцієнти параметризації		$f(t) \equiv \alpha_1(t)$	$f(t) \equiv \beta_1(t)$
a_i^f	a_1^f	-0.1349980	0.0536992
	a_2^f	-0.0120993	0.0055433
	a_3^f	-0.0018810	0.0009172
	a_4^f	-0.0003666	0.0001831
	a_5^f	-0.0001200	0.0000546
	a_6^f	-0.0000607	0.0000253
	a_7^f	-0.0000332	0.0000139
	a_8^f	-0.0000147	0.0000061
b_i^f	b_1^f	-0.0538039	0.0488745
	b_2^f	-0.0022540	0.0001787
	b_3^f	0.0005784	-0.0003458
	b_4^f	0.0002159	-0.0001419
	b_5^f	0.0000523	-0.0000453
	b_6^f	0.0000167	-0.0000170
	b_7^f	0.0000113	-0.0000107
	b_8^f	0.0000080	-0.0000063

Графічні залежності (від часу t) кінематичних та динамічних характеристик побудованого субоптимального режиму руху маніпулятора зображено на рис. 2–7. Тут час t виражено в секундах, лінійні переміщення захвата (точки B) x , y – у метрах, швидкості \dot{x} , \dot{y} – в м/с, кути α_i , β_i – в радіанах, момент u_i – в Н·м, $i = 1, 2$. На рис. 2 зображено траєкторію руху захвата, стрілкою вказано напрямок руху, на рис. 3–5 наведено графіки закону руху та швидкості захвата: $x(t)$, $\dot{x}(t)$ – проекція на вісь O_1X , $y(t)$, $\dot{y}(t)$ – проекція на вісь O_1Y . Як бачимо, побудований субоптимальний режим руху маніпулятора задовольняє умови транспортної операції (5), (6), при цьому рух захвата безреверсний. На рис. 6 зображено графіки кутових координат ланок маніпулятора, де кутові характеристики задовольняють умови руху (4). Графіки відповідних керувань u_1 , u_2 подано на рис. 7.

У табл. 2 наведено залежність мінімальних значень E^* функціонала (8) від параметра n . Бачимо, що для $n \geq 7$ значення E^* не змінюється. У таблиці також відповідно значенню n подано тривалість Δt (с) розв'язання задачі 2.

Таблиця 2.

n	4	5	6	7	8	9	10
E^*	3.028	3.027	3.027	3.026	3.026	3.026	3.026
Δt	47.7	62.3	73.3	85.7	96.1	105.0	114.3

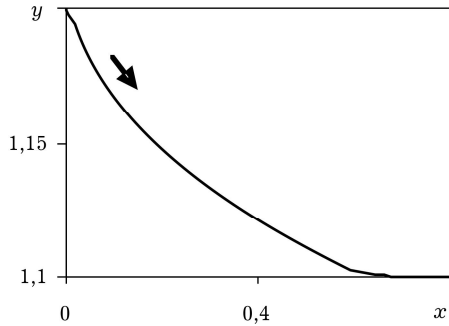


Рис. 2.

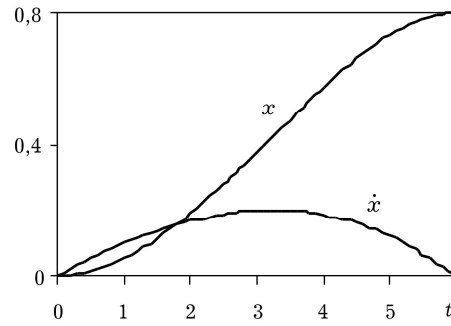


Рис. 3.

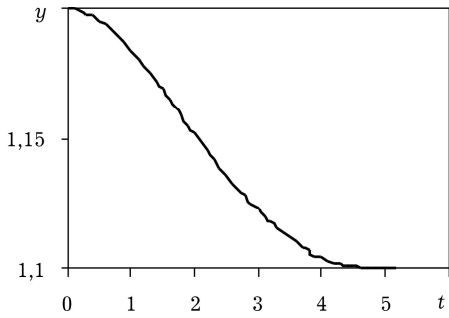


Рис. 4.

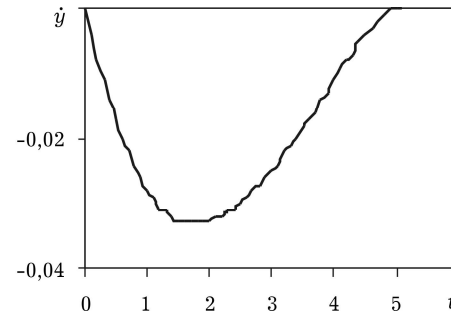


Рис. 5.

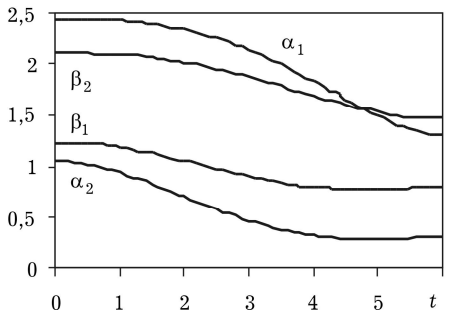


Рис. 6.

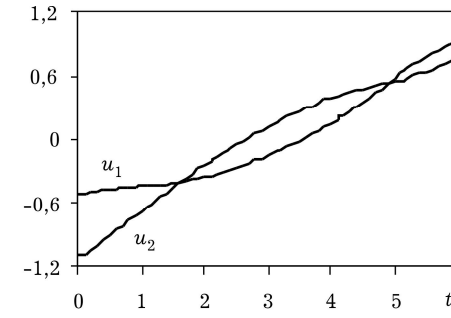


Рис. 7.

Для дослідження впливу лінійних розмірів ланок маніпулятора на енергетичні характеристики субоптимального руху розглядали таку задачу.

Задача 3. Для заданих значень конструктивних параметрів \mathbf{c} знайти такі керування $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $t \in [0, T]$, які за обмежень (2), (3) забезпечують виконання маніпулятором транспортної операції (5), (6) та мінімізують функціонал (8).

Алгоритм розв'язання задачі 3 аналогічний описаному вище, з тією тільки відмінністю, що зведену цільову функції $E(\mathbf{k}) + \langle \mathbf{h}, \mathbf{g}(\mathbf{k}) \rangle$ мінімізуємо тільки за коефіцієнтами параметризації \mathbf{k} . На рис. 8 наведено розподіл мінімальних значень E^* (вісь Z) функціонала (8) на дискретній множині $\Lambda = \{(\mu, \nu), \mu = 0.3 + 0.05k, \nu = 0.3 + 0.05j, k, j = 1, \dots, 9\}$. Значення по осі X відповідають параметру μ , по осі Y – параметру ν . Відтінками сірого кольору виділено області сталих значень функції $E^*(\mu, \nu)$. Бачимо, що збільшення параметру μ призводить до зростання E^* . Екстремальні значення функції

$E^*(\mu, \nu)$ на вказаній множині такі: мінімум $E^*(0.3, 0.7) = 3.026$, максимум $E^*(0.7, 0.7) = 10.789$. Це свідчить, що квадратичний функціонал (8) суттєво залежить від лінійних розмірів ланок маніпулятора.

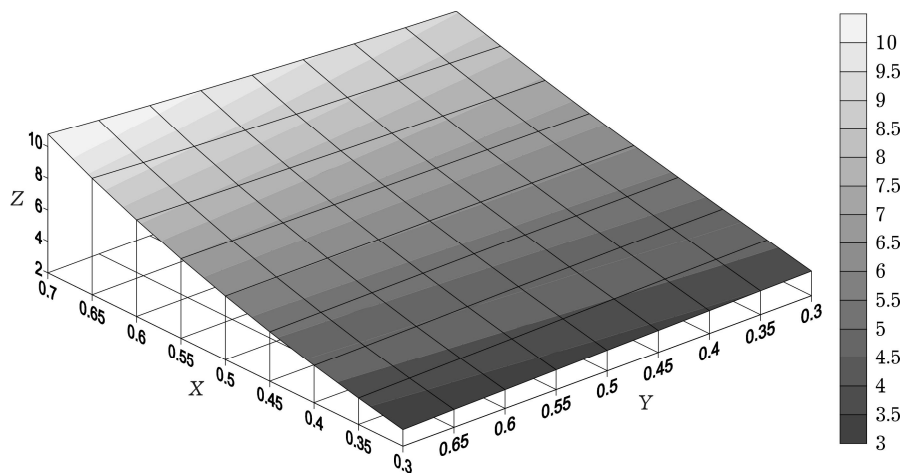


Рис. 8.

Висновки. Для чотириланкового маніпулятора замкнутої кінематичної структури розроблено числово-аналітичний алгоритм та програму (в середовищі MATLAB) для розв'язання задач оптимізації лінійних розмірів ланок та режимів керування. Алгоритм ґрунтується на параметризації узагальнених координат маніпулятора сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду, використанні методики обернених задач динаміки та процедур нелінійного математичного програмування. Запропоновані алгоритм і програму можна використати як елементи алгоритмічного та програмного забезпечення систем автоматизованого проектування робототехнічних комплексів.

Аналіз числових результатів свідчить, що раціональним підбором лінійних розмірів ланок досліджуваного маніпулятора можна суттєво зменшити порогові значення енергетичних характеристик його субоптимальних режимів керування.

Перспективою подальших досліджень може бути розв'язання задачі оптимального керування чотириланковим замкнутим маніпулятором із урахуванням (можливістю вибору) пари шарнірів, у яких прикладені керуючі моменти сил.

1. Ануфрієв І. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ. – Петербург, 2005. – 1104 с.
2. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
3. Бартіш М. Я. Методи оптимізації. Теорія і алгоритми. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. – 223 с.
4. Бербюк В. Є., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота // Вісн. Київськ. ун-ту. Кібернетика. – 2002. – № 3. – С. 7–9.
5. Демидюк М. В. Параметрична оптимізація чотириланкового замкнутого маніпулятора з активними й пасивними приводами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 1. – С. 193–202.
6. Демидюк М. В., Литвин Б. А., Голуб Б. М. Параметрична оптимізація ходи двоногого робота // Там само. – 2005. – 48, № 3. – С. 162–171.

7. Демидюк М. В., Ширко М. І. Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами // Там само. – 2007. – 50, № 2. – С. 41–48.
8. Демидюк М. В., Ширко М. І. Оптимізація законів руху та конструктивних параметрів маніпуляційного модуля // Відбір та обробка інформації – 2007. – Вип. 26 (102). – С. 44–49.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
10. Красовский Н. Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
11. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
12. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 386 с.
13. Chesse S., Bessonnet G. Optimal dynamics of constrained multibody systems. Application to bipedal walking synthesis // Proc. of 2001 IEEE Int. conf on Robotics & Automation. – 2001. – P. 2499–2505.
14. Nagurka M., Yen V. Fourier-based optimal control of nonlinear dynamic systems // Trans. ASME. J. Dynamic Systems, Meas. and Contr. – 1990. – 112, № 3. – P. 19–26.
15. Nakamura Y., Ghodoussi M. Dynamic computation of closed-link robot mechanism with nonredundant and redundant actuators. // IEEE. Trans on Robotics and Automation. – 1989. – 5. – P. 294–302.
16. Lidberg M., Verbyuk V. Optimization of Controlled Motion of Closed-Loop Chain Manipulator Robots with Different Degree and Type of Actuation // J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA). – 2002. – 4, No 2. – P. 56–73.
17. Zhang Y., Gruver W., Gao F. Dynamic simplification of three degree of freedom manipulators with closed chains. // Robotics and Autonomous Systems. – 1999. – 28. – P. 261–269.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ И РЕЖИМОВ УПРАВЛЕНИЯ ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО ЗАМКНУТОГО МАНИПУЛЯТОРА

Исследована задача оптимизации конструктивных параметров (линейных размеров звеньев) и режимов управления четырехзвеного манипулятора замкнутой кинематической структуры. Манипулятор под действием активных управлений (моментов сил в шарнирах) выполняет транспортные операции в горизонтальной плоскости. В качестве критерия минимизации использован квадратический (по управляющим моментам сил) функционал. Алгоритм решения задачи базируется на параметризации обобщенных координат манипулятора семейством заданных функций, применении методики обратных задач динамики и численных процедур математического программирования.

OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS AND CONTROL OF THE FOUR-LINK CLOSE-CHAIN MANIPULATOR

The problem of optimization of the design parameters (the links linear dimensions) and control of the four-link close-chain manipulator is researched. Manipulator is performing the pick-and-place operations in the horizontal plane under the action of the active control (the torques in the joints). The objective function is taken to be the quadratic functional (the control torques in the joints). The algorithm of solution of this problem based on parameterization of the generalized coordinates, methodology of inverse problems of dynamics and the numerical procedures of the mathematical programming is developed.