

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА НЕОДНОРІДНОЇ ПО ТОВЩИНІ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Задачу про граничну рівновагу пружно-пластичної неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з внутрішньою тріщиною довільної конфігурації зведено до системи нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано числовим методом механічних квадратур.

Вступ. Оболонкові елементи конструкцій часто працюють у таких умовах, що їх внутрішня та зовнішня поверхні знаходяться в різних середовищах, зокрема агресивних. У таких випадках доцільно використовувати шаруваті структури або функціонально градієнтні матеріали (ФГМ), тобто композитні матеріали мікроскопічної неоднорідності, в яких механічні властивості змінюються неперервно за товщиною. Потребу у таких матеріалах, перш за все, зумовило космічне матеріалознавство, щоб забезпечити надійне функціонування елементів конструкцій за дії надвисоких температур. Розподіл збурених напружень біля наскрізних або поверхневих прямокутних тріщин у таких оболонках досліджено раніше [3, 4]. Тут визначено розподіл напружень, зумовлених внутрішньою тріщиною довільної конфігурації.

Формулювання задачі. Розглянемо пружно-пластичну сферичну оболонку, виготовлену з ФГМ. Систему ортогональних координат $XOY\gamma$ оберемо так, щоб осі X, Y лежали в серединній поверхні оболонки, а вісь γ спрямована по нормалі до неї. Оболонка послаблена внутрішньою тріщиною завдовжки $2l_0$ уздовж осі OX . Глибину тріщини задано неперервними кри-

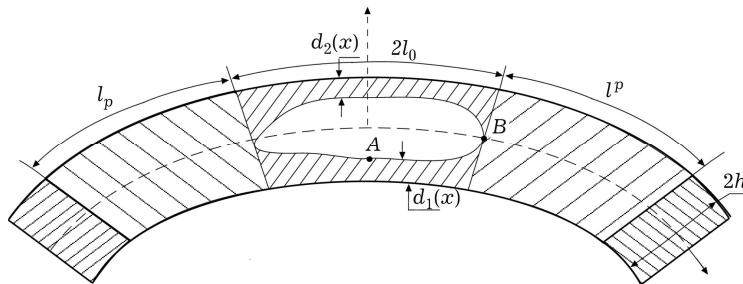


Рис. 1.

вими $d_1(X)$ та $d_2(X)$ (рис. 1). Вважаємо, що оболонку та береги тріщини завантажено лише симетричними відносно площини тріщини зусиллями і моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують. Обмежимося розглядом досить глибоких тріщин ($\max(d_1(X) - d_2(X)) \geq 0, 4h$, $2h$ – товщина оболонки). Розміри тріщини, навантаження та властивості матеріалу передбачені такими, що біля тріщини по всій товщині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Згідно з аналогом δ_c -моделі [2, 5], зони пластичних деформацій замінено поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту (фіктивною тріщиною), а реакцію матеріалу пластичних зон на пружний об'єм – відповідними зусиллями та моментами. Вважаємо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки, тобто в області $X \in]-l_0; l_0[$, $\gamma \in [-h; -h + 2d_1] \cup [h - 2d_2; h]$, діють сталі напруження $\sigma^0 = (\sigma_{Bi} + \sigma_{Ti}) / 2$, де σ_{Bi} , $(i = 1, 2)$ – границя міцності ФГМ відповідно під $d_1(X)$ та над $d_2(X)$ тріщиною; σ_{Ti} – поріг

текучості ФГМ у тих самих областях. У пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині діють невідомі нормальне зусилля N_i та згинальний момент M_i , які задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок.

Таким чином, у межах прийнятого аналога δ_c -моделі пружно-пластичну задачу для внутрішньої тріщини завдовжки $2l_0$ замінено пружною задачею для фіктивної наскрізної тріщини невідомої довжини $2l_1 = 2l_0 + l_p + l^p$ (l_p , l^p – довжини пластичних зон зліва та справа від реальної тріщини), на берегах якої виконуються умови

$$N_2(x) = \begin{cases} N_2^{(1)} + N^l - N_2^0, & |X| < l_0; \\ N_1 - N_2^0, & l_0 \leq X \leq l_0 + l_p; \\ N_2 - N_1^0, & -l_0 \leq X \leq -l_0 - l^p; \end{cases}$$

$$M_2(x) = \begin{cases} M_2^{(1)} + M^l - M_2^0, & |X| < l_0; \\ M_1 - M_2^0, & l_0 \leq X \leq l_0 + l_p; \\ M_2 - M_1^0, & -l_0 \leq X \leq -l_0 - l^p. \end{cases} \quad (1)$$

Тут N^l , M^l – нормальне зусилля та згинальний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під тріщиною та які згідно з прийнятими припущеннями про напруження в цих смугах визначають за формулами

$$N^l = \sigma^0 \int_{-h}^{d_1(X)} d\gamma + \sigma^0 \int_{d_2(X)}^h d\gamma, \quad M^l = \sigma^0 \int_{-h}^{d_1(X)} \gamma d\gamma + \sigma^0 \int_{d_2(X)}^h \gamma d\gamma, \quad (2)$$

$N_2^{(1)}$, $M_2^{(1)}$ – зусилля та момент, прикладені до берегів реальної тріщини; N_2^0 , M_2^0 – ці ж параметри основного напруженого стану (оболонка без тріщини).

Основні співвідношення неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з тріщиною. Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона є функціями нормальної до серединної поверхні координати γ :

$$E = E(\gamma), \quad \mu = \mu(\gamma). \quad (3)$$

Залежності (3) такі, що виконується узагальнений закон Гука та справедлива гіпотеза Лява [1]. Система ключових рівнянь на функцію напружень $\varphi(x, y)$ та функцію прогинів $w(x, y)$, що отримана на основі методу дисторсій тонких оболонок [6], має вигляд

$$\frac{B}{l_1^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{d_{22}}{l_1^2} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \nabla^2 w = -F_1^0(x, y),$$

$$\frac{A}{l_1^2} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{d_{22}}{l_1^2} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{1}{R} \nabla^2 \varphi = -AF_2^0(x, y). \quad (4)$$

Тут A , B , d_{22} виражено через $E(\gamma)$ та $\mu(\gamma)$, а $F_1^0(x, y)$, $F_2^0(x, y)$ – функції стрибка переміщення $[v(x)]$ та кута повороту $[\theta_2(x)]$; $x = X/l_1$, $y = Y/l_1$; R – радіус серединної поверхні оболонки.

Враховуючи, що функції переміщень за переходу через тріщину мають стрибок, а функції зусиль та моментів неперервні, запишемо формули для визначення збурених нормального зусилля N_2 та згинального моменту M_2 у довільній точці оболонки:

$$N_2(x, y) = \frac{1}{l_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(x, y),$$

$$M_2(x, y) = -A \left(\frac{1}{l_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y) + \kappa_{22}^0 \right) + \frac{d_{22}}{l_1^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(x, y). \quad (5)$$

Інтегральні рівняння задачі. На основі фундаментального розв'язку системи (4) та операції згортки побудовано інтегральне зображення ключових функцій $\varphi(x, y)$, $w(x, y)$, а з допомогою співвідношень (5) – інтегральне подання нормального зусилля та згинального моменту в довільній точці оболонки через невідомі стрибки $[v(x)]$, $[\theta_2(x)]$. Вимагаючи тепер виконання умов (1), отримали систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення $[v(x)]$, $[\theta_2(x)]$:

$$\sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 \Psi_k(\xi) K_{ik}^*(x - \xi) d\xi = f_i^*(x), \quad |x| < 1, \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

де $K_{12}^* = K_{21}^* = -a_{12}/z + K_{12}^0$; $K_{11}^* = -a_1/z + K_{11}^0$; $K_{22}^* = -a_2/z + K_{22}^0$; K_{ij}^0 – неперервні функції; $m_1 = 4\pi b/A$; b – функція $E(\gamma)$ та $\mu(\gamma)$.

Розв'язки системи інтегральних рівнянь (6) повинні задовольняти умови

$$\int_{-1}^1 \Psi_k(\xi) d\xi = 0, \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

які забезпечують неперервність переміщень $v(x)$ та кута повороту $\theta_2(x)$ у вершинах тріщини.

Відповідно до прийнятої моделі в системі (6) невідомі межі інтегрування, тобто довжина фіктивної тріщини $2l_1$, а також зусилля N_i та момент M_i , що відповідають реакції пластичних смуг на пружний об'єм і згідно з умовами (1) входять у праву частину системи (6). Вважатимемо, що матеріалу оболонки притаманне зміцнення, тому вимагатимемо, щоб N_i та M_i уздовж пластичних смуг були розподілені за лінійним законом:

$$N_i(x) = S_i \left[(1 - m^*) (|x| - x_0) / (x_1 - x_0) + m^* \right],$$

$$M_i(x) = H_i \left[(1 - m^*) (|x| - x_0) / (x_1 - x_0) + m^* \right], \quad x_0 \leq |x| \leq x_1, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Тут $m^* = \sigma_B / \sigma_T$; σ_B , σ_T – відповідно інтегральна характеристика границі міцності та порога текучості на проміжку $\gamma \in [-h; h]$; S_i , H_i – невідомі сталі, які задовольняють прийняту умову пластичності тонких оболонок, наприклад, умову пластичного шарніра Треска [7]

$$[S_i / (2h\sigma_T^*)]^2 + |H_i| / (h^2\sigma_T^*) = 1, \quad [N_i(x) / (2h\sigma_T^*)]^2 + |M_i(x)| / (h^2\sigma_T^*) = 1, \quad (9)$$

$$\sigma^*(x) = (\sigma_T - \sigma_B)(|x| - x_0) / (x_1 - x_0) + \sigma_B, \quad i = 1, 2,$$

але координата нейтрального волокна вздовж пластичної смуги стала.

Умови пластичності (8), (9) використовуємо для визначення довжин пластичних зон l_p , l^p чи, відповідно, довжини фіктивної тріщини l_1 . Для знаходження невідомих величин S_i та H_i застосуємо умову скінченності зусиль та моментів біля вершин наскрізної тріщини. Для цього достатньо, щоб коефіцієнти інтенсивності нормального зусилля та згинального моменту дорівнювали нулю, тобто

$$K_N(l_1) = K_M(l_1) = K_N(-l_1) = K_M(-l_1) = 0. \quad (10)$$

Задача зведена до сумісного розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (6), умов однозначності переміщень (7), умов пластичності тонких оболонок (8), (9) та умов скінченності напружень (10).

Алгоритм числового розв'язування таких систем наведено в праці [2].

Інтегруючи розв'язок системи (6), розкрив тріщини $\delta(x, \gamma)$ у довільній її точці визначимо за формулою

$$\delta(x, \gamma) = [v(x)] + \gamma[\theta_2(x)], \quad |x| < 1, \quad |\gamma| \leq h. \quad (11)$$

Числові результати. Розглянемо сферичну оболонку $h/R = 0,01$; $\mu = 0,3$; $\sigma_B/\sigma_T = 1,5$; $d/h = 0,5$; $l_0/h = 10$ під дією внутрішнього тиску P ($N_2^0 = RP/2$, $M_2^0 = 0$), виготовлену з ФГМ, зовнішня поверхня якої алюміній ($E_3 = 70$ ГПа), а внутрішня – германій ($E_B = 151$ ГПа). Модуль пружності $E(\gamma)$ вздовж γ змінюється за законом [8]

$$E(\gamma) = (E_3 - E_B)V + E_B, \quad V = \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^m, \quad \xi = (\gamma/2h); \quad \mu(\gamma) = const.$$

Береги реальної параболічної тріщини вільні від навантаження ($N_2^{(1)} = M_2^{(1)} = 0$), а її глибину задано формулами

$$d_1(x) = \frac{l_1^2}{l^2} \left(h - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} \right) x^2 - h + a_1, \quad d_2(x) = -\frac{l_1^2}{l^2} \left(h - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} \right) x^2 + h - a_2,$$

де a_1, a_2 – найменша відстань від тріщини до внутрішньої та зовнішньої поверхонь відповідно; $\sigma_{T1}/\sigma_T = 1,3$; $\sigma_{B1}/\sigma_T = 1,9$; $\sigma_{T2}/\sigma_T = 0,8$; $\sigma_{B2}/\sigma_T = 1,1$. Очевидно, що в цьому випадку $l_p = l^p$ і, відповідно, $N_1 = N_2$, $M_1 = M_2$, $S_1 = S_2$, $H_1 = H_2$. Проаналізовано залежність розкриття тріщини $\delta^* = \delta(x, \gamma)E_B / (l_0\sigma_T)$ (рис. 2) та відносної довжини пластичної зони $\eta_0 = l_0/l_1$ (рис. 3) від відносного навантаження $n^0 = RP / (4h\sigma_T)$.

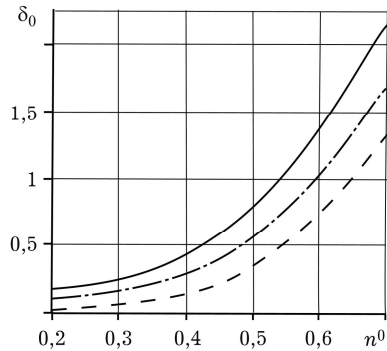


Рис. 2.

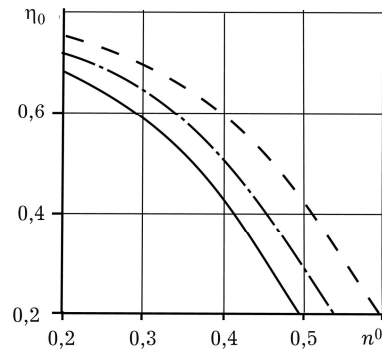


Рис. 3.

Результати порівняно з аналогічними для прямокутної тріщини [3] заглибки $2h - a_1 - a_2$. Суцільні лінії на рисунках відповідають точці А, штрихові – точці В, штрихпунктирні – точці В для прямокутної тріщини. Вигляд внутрішньої тріщини (параболічна, еліптична) мало впливає на відносну довжину пластичної зони η_0 та розкриття тріщини δ^* . За врахування зміцнення ФГМ зменшуються δ^* та η_0 .

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
3. Кушнір Р. М., Николишин Т. М., Ростун М. Й. Гранична рівновага неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з поверхневою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 5–11.
4. Кушнір Р. М., Николишин Т. М., Ростун М. Й. Гранична рівновага виготовленої з функціонально градієнтного матеріалу циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною // Машинознавство. – 2006. – № 5. – С. 3–7.
5. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
6. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
7. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1958. – 136с.
8. Ruhi M., Angoshtari A., and Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials // J. Thermal Stresses. – 2005. – **28**. – P. 391–408.

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Задачу о предельном равновесии упругопластической неоднородной по толщине сферической оболочки с внутренней трещиной произвольной конфигурации сведено к системе нелинейных сингулярных интегральных уравнений, которую решено численным методом механических квадратур.

LIMIT EQUILIBRIUM OF SPHERICAL SHELL MADE FROM FUNCTIONALLY GRADIENT MATERIAL WITH INTERNAL CRACK ARBITRARY CONFIGURATION

The problem on limit equilibrium elastic-plastic thickness-inhomogeneous made spherical shell with internal crack arbitrary configuration reduced to a system of singular integral equations, which is solved by numerical method of mechanical quadratures.

¹Дніпропетровський нац. ун-т залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна, Дніпропетровськ

²Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів