УДК: 517.956

О. В. Флюд

АПРІОРНА ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ НАПІВЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В СЕКТОРІ

Отримано апріорні оцінки для узагальненого (неперервного) розв'язку крайової задачі для виродженої гіперболічної системи напівлінійних рівнянь першого порядку в кутовій області.

Основна мета статті – довести апріорні оцінки розв'язку крайової задачі для виродженої гіперболічної ситеми першого порядку в кутовій області.

Перш ніж перейти до формулювання задачі приймемо такі позначення. Нехай $I = \{1, 2, ..., m\}$, $J = \{1, 2, ..., n\}$ – множини індексів, $|I| = m$ – кількість елементів множини I. Введемо вектор-функції

$$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_m(x,t)),\ v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), ..., v_m(x,t)),$$

$$f(x,t,u(x,t),v(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t),v(x,t)), ..., f_m(x,t,u(x,t),v(x,t))),$$

$$g(x,t,u(x,t),v(x,t)) = (g_1(x,t,u(x,t),v(x,t)), ..., g_n(x,t,u(x,t),v(x,t))),$$

$$\lambda(x,t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(x,t), ..., \lambda_m(x,t)\},\ \mu(x,t) = \mathrm{diag}\{\mu_1(x,t), ..., \mu_n(x,t)\}.$$

У кутовому секторі $S = \{(x,t) : 0 < t < T,\ -kt < x < kt\ ,\ 0 < \mathrm{T}, k < \infty\}$ розглянемо гіперболічну систему $m + n$ $(m \ge 0, n \ge 0, m + n \ge 1)$ напівлінійних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u(x,t),v(x,t)), \\ \mu(x,t)\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u(x,t),v(x,t)). \end{cases} \tag{1}$$

Доповнимо її нелінійними крайовими умовами:

$$u_i(-kt,t) = \gamma_i^-(t,(u_s(-kt,t))_{s\in I_1}),\ \text{якщо}\ i \in I_2 \cup I_3, \tag{2}$$

$$u_i(kt,t) = \gamma_i^+(t,(u_s(kt,t))_{s\in I_2}),\quad \text{якщо}\ i \in I_1 \cup I_3, \tag{3}$$

$$v_j(-kt,t) = \gamma_j(t,(u_s(-kt,t))_{s\in I_1}),\ \text{якщо}\ j \in J, \tag{4}$$

де I_1, I_2, I_3 – множини індексів, визначені так:

$$I_1 = \{\, i \in I : \lambda_i(0,0) < -k\},\quad I_2 = \{\, i \in I : \lambda_i(0,0) > k\},$$

$$I_3 = \{\, i \in I : -k < \lambda_i(0,0) < k\},\ |I_1| = r_1,\ |I_2| = r_2,\ |I_3| = r_3.$$

Вважатимемо, що функції $\lambda_i(x,t)$ і $\mu_j(x,t)$ у кожній точці області S задовольняють умови

$$\lambda_i(x,t) \ne 0,\ \big(\lambda_i(-kt,t) + k\big)\big(\lambda_i(kt,t) - k\big) \ne 0,\ \forall i \in I,$$

$$0 \le \mu_j(x,t) < \frac{1}{k},\ \forall j \in J.$$

Якщо $\mu = 0$, то це свідчить про виродженість системи (1).

Припустимо, що всі задані функції $\lambda_i, \mu_j : S \to R$, $f_i, g_j : S \times R^{m+n} \to R$, $\gamma_i^- : [0,T] \times R^{r_1} \to R$ $(i \in I_2 \cup I_3)$, $\gamma_i^+ : [0,T] \times R^{r_2} \to R$ $(i \in I_1 \cup I_3)$,

$\gamma_j : [0,T] \times R^{r_1} \to R$ $(j \in J)$ − неперервні; функції λ_i задовольняють умову Ліпшиця за змінною x, а μ_j − за змінною t; ступінь зростання за змінними (u,v) функцій $f_i, g_j, \gamma_i^-, \gamma_i^+, \gamma_j$ не перевищує одиницю; система $r_1 + r_2$ нелінійних рівнянь із $r_1 + r_2$ невідомими

$$\begin{cases} \alpha_i^0 = \gamma_i^-(0, (\alpha_i^0)_{s \in I_1}), & i \in I_2, \\ \alpha_i^0 = \gamma_i^+(0, (\alpha_i^0)_{s \in I_2}), & i \in I_1 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок α_i^0, $i \in I_1 \bigcup I_2$; виконується умова погодження нульового порядку $\gamma_i^-(0, (\alpha_i^0)_{s \in I_1}) = \gamma_i^+(0, (\alpha_i^0)_{s \in I_2})$, $i \in I_3$.

Задачі для вироджених гіперболічних систем виникають у фізиці, біології, оптимальному керуванні тощо (див., напр., [4]).

За вказаних вище умов при $\mu = 0$ задача (1)−(4) має єдиний узагальнений розв'язок [1, 2]. Для прямокутної області подібні результати отримано в праці [3].

Позначимо через $\xi = \varphi_i(\tau; x, t)$ характеристику i-го ($i \in I$) рівняння сисеми (1), що проходить через точку $(x,t) \in S$ і є розв'язком задачі Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi, \tau), \\ \xi|_{\tau = t} = x. \end{cases}$$

Аналогічно $\tau = \psi_j(\xi; x, t)$ − характеристика j-го ($j \in J$) рівняння системи, яка є розв'язком початкової задачі

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{d\xi} = \mu_j(\xi, \tau), \\ \tau|_{\xi = x} = t. \end{cases}$$

Систему (1) вздовж характеристичних кривих можна записати так:

$$\begin{cases} \dfrac{du_i(\varphi_i(\tau; x,t), \tau)}{d\tau} = f_i(\varphi_i(\tau; x,t), \tau, u(\varphi_i(\tau; x,t), \tau), v(\varphi_i(\tau; x,t), \tau)), & i \in I, \\ \dfrac{dv_j(\xi, \psi_j(\xi; x,t))}{d\xi} = g_j(\xi, \psi_j(\xi; x,t), u(\xi, \psi_j(\xi; x,t)), v(\xi, \psi_j(\xi; x,t))), & j \in J. \end{cases} \tag{5}$$

Уведемо позначення: $\partial S^- = \{(x,t) : x = -kt, t \ge 0\}$ − ліва межа сектора S та $\partial S^+ = \{(x,t) : x = kt, t \ge 0\}$ − його права межа, $\partial S = \partial S^- + \partial S^+$. Нехай $\chi_i(x,t)$ $(i \in I)$ − ордината точки перетину i-ої характеристики $\xi = \varphi_i(\tau; x, t)$ системи (1) із межею ∂S, а $\kappa_j(x,t)$ $(j \in J)$ − абсциса точки перетину j-ої характеристики $\tau = \psi_j(\xi; x,t)$ системи із межею ∂S^-.

Проінтегруємо систему (5) вздовж відповідних характеристик, використавши умови (2)−(4). Тоді отримаємо еквівалентну систему інтегро-операторних рівнянь:

$$u_i(x,t) = F_i[u](x,t) + \\ + \int_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau; x,t), \tau, u(\varphi_i(\tau; x,t), \tau), v(\varphi_i(\tau; x,t), \tau)), \; i \in I, \tag{6}$$

$$v_j(x,t) = G_j[u](x,t) + \\ + \int\limits_{\kappa_j(x,t)}^{x} g_j(\xi, \psi_j(\xi; x,t), u(\xi, \psi_j(\xi; x,t)), v(\xi, \psi_j(\xi; x,t))), \quad j \in J, \tag{7}$$

де оператори F_i та G_j мають вигляд

$$F_i[u](x,t) = \begin{cases} \gamma_i^-(\chi_i(x,t), [u_s(-k\chi_i(x,t), \chi_i(x,t))]_{s\in I_1}), & (x,t) \in \partial S^-, \\ \gamma_i^+(\chi_i(x,t), [u_s(k\chi_i(x,t), \chi_i(x,t))]_{s\in I_2}), & (x,t) \in \partial S^+, \end{cases}$$

$$G_j[u](x,t) = \\ = \gamma_j(\psi_j(\kappa_j(x,t); x,t), u_s(-k\psi_j(\kappa_j(x,t); x,t), \psi_j(\kappa_j(x,t); x,t))]_{s\in I_1}), (x,t) \in \partial S^-.$$

Відповідно до наведених вище припущень кожний із цих операторів відображає простір $C(S; R^n)$ у простір $C(S; R)$.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) назвемо пару вектор-функцій (u, v), компоненти яких належать простору $C(S)$ і задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь (6), (7).*

Приймемо позначення

$$|f(x,t,u,v)| = \max_i |f_i(x,t,u,v)|, \quad \|f\| = \max_{(x,t)\in S} |f(x,t,u,v)|.$$

Аналогічні позначення використаємо і для інших вихідних вектор-функцій.

Теорема *(про апріорну оцінку). Нехай $\omega = (u, v)$ – узагальнений розв'язок задачі (1)–(4). Якщо існує стала величина $0 < M < 1$, для якої справедливі нерівності*

$$\max\{\|f\|, \|g\|\} \le M(1 + |u| + |v|), \quad \max\left\{\|\gamma^-\|, \|\gamma^+\|, \|\gamma\|\right\} \le M(1 + |u|), \tag{8}$$

то знайдеться така стала $N > 0$, що

$$\|\omega\| \le N.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $S^t = \{(x,\tau) : 0 \le \tau \le t, \ -kt \le \xi \le kt\}$,

$S^-_{(x,t)} = \{(\xi,\tau) : -x/k \le \tau \le t, \quad -kt \le \xi \le x, \ x \le 0\}$,

$S^+_{(x,t)} = \{(\xi,\tau) : x/k \le \tau \le t, \ x \le \xi \le kt, \ x > 0\}$.

Позначимо:

$$U(t) = \max_{(x,\tau)\in S^t} |u(x,\tau)|,$$

$$V(x,t) = \begin{cases} \max\limits_{(\xi,\tau)\in S^-_{(x,t)}} |v(\xi,\tau)|, & x \le 0, \\ \max\limits_{(\xi,\tau)\in S^t \setminus S^+_{(x,t)}} |v(\xi,\tau)|, & x > 0. \end{cases}$$

Використавши оцінки (8), із (6) та (7) отримаємо нерівності

$$|u_i(x,t)| \le |F_i[u](x,t)| + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} M(1 + U(\tau) + V(k\tau,\tau))d\tau, \tag{9}$$

$$|v_j(x,t)| \le |G_j[u](x,t)| + \int\limits_{\kappa_j(x,t)}^{x} M(1 + U(t) + V(\xi,t))d\xi, \tag{10}$$

в яких оцінки відповідних операторів мають вигляд

$$\left|F_i[u](x,t)\right| \le \begin{cases} M\left(1+\max\limits_{i\notin I_1}\left|u_i(-k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))\right|\right), & (x,t)\in\partial S^-, \\ M\left(1+\max\limits_{i\notin I_2}\left|u_i(k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))\right|\right), & (x,t)\in\partial S^+, \end{cases} \tag{11}$$

$$\left|G_j[u](x,t)\right| \le M(1+U(t)), \qquad (x,t)\in\partial S^-. \tag{12}$$

З умов (9) і (11) та припущення теореми щодо M маємо:

$$U(t) \le M(1+U(t)) + M\int_0^t [U(\tau)+V(k\tau,\tau)]d\tau + MT,$$

або

$$U(t) \le \frac{M(1+T)}{1-M} + \frac{M}{1-M}\int_0^t [U(\tau)+V(k\tau,\tau)]d\tau. \tag{13}$$

Відповідно із (10) і (12) отримаємо:

$$V(x,t) \le M(1+U(t)) + M\int_{-kt}^{x}[1+U(t)+V(\xi,t)]d\xi \le$$

$$\le M(1+2kt)(1+U(t)) + M\int_{-kt}^{x} V(\xi,t)d\xi.$$

Після застосування до останньої нерівності леми Гроноулла–Беллмана для кожного довільного фіксованого t справедлива нерівність

$$V(x,t) \le M(1+2kt)(1+U(t))e^{M(x+kt)}. \tag{14}$$

Оцінку для $V(x,t)$ підставимо в праву частину нерівності (13). Тоді

$$U(t) \le \frac{M(1+T)}{1-M} + \frac{1-M+(M-1+2kMt)e^{2kMt}}{2k(1-M)} +$$

$$+\frac{M}{1-M}\int_0^t [(1+M(1+2k\tau))e^{2kMT}U(\tau)]d\tau.$$

Застосувавши знову лему Гроноулла–Беллмана та обчисливши інтеграл в експоненті, отримаємо остаточну оцінку для $U(t)$:

$$U(t) \le \exp\left\{\frac{M\left((1+2kt)\,e^{2kMt}-1\right)}{2k\,(M-1)}\right\}\left[\frac{M\,(1+T)}{1-M} + \frac{1-M+(M-1+2kMT)\,e^{2kMT}}{2k\,(1-M)}\right].$$

З (14) та останьої нерівності випливає апріорна оцінка розв'язку задачі (1)–(4), якщо $t = T$.

1. *Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Пелюшкевич О. В.* Задача для сингулярної гіперболічної системи в кутовій област // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2011. – Вип. 9. – С. 15–21.
2. *Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Пелюшкевич О. В.* Задача для виродженої напівлінійної гіперболічної системи в секторі // Карпатські матем. публікації. – 2011. – **3**, № 2. – С. 4–12.
3. *Мауленов О., Мышкис А. Д.* О смешанной задаче для полулинейной гиперболической системы на отрезке с малым параметром при производных по времени (часть I) // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1983. – № 3. – С. 59–62.
4. *D'Acunto B., Frunzo L.* Free boundary problem for an initial cell layer in multispecies biofilm formation // Appl. Math. Letter. – 2012.– № 25.– P. 20–25.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СЕКТОРЕ

Получены априорные оценки для обобщенного (непрерывного) решения краевой задачи для вырожденной гиперболической системы полулинейных уравнений первого порядка в угловой области.

A PRIORI ESTIMATES OF THE BOUNDARY PROBLEM SOLUTION FOR DEGENERATE SEMILINEAR HYPERBOLIC SYSTEM FIRST ORDER IN THE SECTOR

A priori estimates of generalized (continuous) upshot boundary value problem for a degenerate semilinear hyperbolic system of equations of the first order in angular domain.

Львів. нац. ун-т
імені Івана Франка, Львів

Одержано
17.09.13