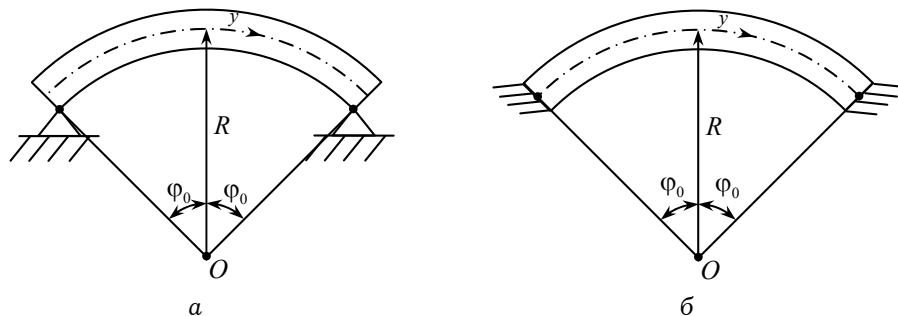


ВПЛИВ УМОВ ЗАКРІПЛЕННЯ ВИДОВЖЕНИХ ТОРЦІВ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ НА ЇХ ВЛАСНІ ЧАСТОТИ

На основі співвідношень узагальненої теорії динамічного деформування податливих до зсуву оболонок отримано систему розв'язувальних рівнянь, яка описує вільні поперечні коливання видовжених циліндричних панелей. Знайдено аналітичні вирази для спектрів власних частот за різних умов закріплення видовжених торців. Досліджено вплив умов закріплення на значення власних частот за різних товщин панелі.

Видовжені циліндричні панелі із ортотропних композитних матеріалів широко застосовують у різноманітних конструкціях і технічних засобах, що перебувають під динамічним, зокрема циклічним, навантаженням [1]. Поряд із просторовою ортотропією пружних характеристик найхарактернішою властивістю композитних тонкостінних елементів є податливість до трансверсальних деформацій зсуву та стиснення [2]. Зазвичай спектри власних частот таких об'єктів досліджували, або застосовуючи числові методи, або лише враховуючи податливість до трансверсального зсуву [5–8]. Нижче на основі отриманого аналітичного розв'язку задачі про малі коливання податливих до трансверсальних зсуву та стиснення циліндричних панелей вивчено вплив жорсткого зацементування порівняно з шарнірним закріпленням видовжених торців на значення власних частот.

Формулювання задачі. Розглянемо видовжену композитну циліндричну панель товщиною $2h$ з радіусом серединної поверхні R і кутом розхилу $2\varphi_0$.



Динамічний напружено-деформований стан тонкостінного елемента за відсутності масових та поверхневих зусиль описують співвідношення, що містять [3]:

рівняння руху (рівноваги)

$$\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{R} Q = 2 \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{1}{R} N = 2 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - Q = \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}; \quad (3)$$

співвідношення пружності

$$N = \bar{B} \varepsilon_1^0; \quad M = \bar{D} \varepsilon_1^1; \quad Q = \Lambda \varepsilon_{13}^0 \quad (4)$$

та деформаційні співвідношення:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + w / R; \quad \varepsilon_1^1 = \frac{\partial \gamma}{\partial y}; \quad \varepsilon_{13}^0 = \gamma + \frac{\partial w}{\partial y} - u / R. \quad (5)$$

У рівностях (1)–(5) прийняті позначення: $y = R \varphi$, φ – кутова координата на серединній поверхні панелі; N – розтягувальне (стискальне) зусилля вздовж кутової координати; M – згинний момент; Q – перерізальне зусилля; u – переміщення точок серединної поверхні вздовж тангенціальної координати y ; γ – кут повороту нормального до серединної поверхні елемента перед деформуванням; w – переміщення точок серединної поверхні вздовж радіальної координати; $\bar{B} = 2Eh(1 + \alpha) / (1 - \nu^2)$ – узагальнена жорсткість панелі на розтяг; $\bar{D} = h^2 \bar{B} / 3$ – узагальнена згинна її жорсткість, а $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувна; $\alpha = (1 + \nu)(\nu')^2 / (1 - \nu - 2\nu\nu')$ (E / E'); E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантних їй поверхнях; E', ν' – ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної поверхні; G' – трансверсальний модуль зсуву; ρ – густина матеріалу панелі; $k' = 14 / 15$.

Граничні умови на видовжених торцях панелі $y = \pm b_0 = \pm R \varphi_0$ за їх шарнірного закріплення на нижній лицевій поверхні (див. рисунок а) мають вигляд

$$N(\pm b_0) = 0; \quad M(\pm b_0) = 0; \quad w(\pm b_0) = 0, \quad (6)$$

а для жорсткого закріплення видовжених торців (див. рисунок б)

$$u(\pm b_0) = 0; \quad \gamma(\pm b_0) = 0; \quad w(\pm b_0) = 0. \quad (7)$$

Рівняння (1)–(3) разом зі співвідношеннями (4), (5) та граничними умовами (6), (7) складають математичну модель, що описує процес малих вільних поперечних коливань видовженої циліндричної панелі за вище згаданих типів закріплення видовжених торців. Податливість матеріалу панелі до поперечного стиснення враховують через коефіцієнт α , що залежить від трансверсальних пружних сталей E' та ν' .

Побудова розв'язку задачі. Почергове підставлення (5) в (4), а результату – в (1)–(3) та нехтування інерцією повороту γ [4] призводять до системи рівнянь руху в узагальнених переміщеннях:

$$\bar{B}(u'' + w' / R) + \frac{\Lambda}{R}(\gamma + w' - u / R) = 2\rho h \ddot{u}, \quad (8)$$

$$\Lambda(\gamma' + w'' - u' / R) - \frac{\bar{B}}{R}(u' + w / R) = 2\rho \ddot{w}, \quad (9)$$

$$\bar{D} \gamma'' - \Lambda(\gamma + w' - u / R) = 0. \quad (10)$$

Тут і надалі штрих означає похідну по y , а крапка – по t .

З рівняння (10) отримуємо вираз для тангенціального переміщення u :

$$u = R(\gamma + w' - \gamma'' / \kappa^2), \quad (11)$$

де $\kappa^2 = \Lambda / \bar{D}$.

Після підставлення (11) у рівняння (8) та (9) отримуємо систему розв'язувальних рівнянь задачі про малі вільні поперечні коливання видовженої циліндричної панелі:

$$\begin{aligned} \gamma^{IV} + 1 / R^2 \gamma^{II} &= 3(2\ddot{w} - \ddot{\gamma} - \ddot{\gamma}^{II} / \kappa^2) / (c_1^2 h^2), \\ \gamma^{IV} - 1 / R^2 \gamma^{II} - 6(\gamma^{II} - \gamma^{IV} / \kappa^2 + w^{III} + \\ &+ 1 / R w) / h^2 = 3(\dot{\gamma}^{II} / \kappa^2 - \dot{\gamma}) / (c_1^2 h^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Тут $c_1 = \sqrt{2h\rho / \bar{B}}$ – швидкість поширення хвиль уздовж кільцевої координати.

Для задоволення граничних умов (6) та (7) розв'язки системи рівнянь (12) шукаємо у вигляді:

а) для шарнірного закріплення видовжених торців на нижній лицевій поверхні

$$w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos \lambda_n y \right) e^{i\omega t}, \quad \gamma = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sin \lambda_n y \right) e^{i\omega t}, \quad (13)$$

б) для жорсткого закріплення видовжених торців

$$w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos^2 \lambda_n y \right) e^{i\omega t}, \quad \gamma = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sin 2\lambda_n y \right) e^{i\omega t}, \quad (14)$$

де $\lambda_n = k_n / R$, $k_n = \frac{2n+1}{2} \pi / \varphi_0$, ω – шукана частота коливань.

Після підставлення (13) або (14) у систему рівнянь (12) та прирівнювання до нуля визначника кожної незалежної підсистеми для знаходження величини $\mu_n = \omega_n / c_1$ маємо біквдратне рівняння

$$\mu_n^4 - \frac{2(1+k_n^2)}{R^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 k_n^2}{6} \frac{1}{1+\varepsilon^2 k_n^2 / \bar{\kappa}^2} \right] \mu_n^2 + \frac{\varepsilon^2 k_n^2}{3} \frac{1}{R^4} \frac{(k_n^2-1)^2}{1+\varepsilon^2 k_n^2 / \bar{\kappa}^2} = 0. \quad (15)$$

Тут $\bar{\kappa}^2 = h^2 \kappa^2$; $k_n = \frac{2n+1}{2} \pi / \varphi_0$ – для випадку граничних умов (а) та $k_n = (2n+1) \pi / \varphi_0$ – для граничних умов (б).

З рівняння (15) для величини μ_n^2 отримуємо вираз

$$\mu_n^2 = a_n^2 / R^2, \quad (16)$$

де

$$a_n^2 = (1+k_n^2) \left[1 + \alpha + \frac{\varepsilon^2}{3} \eta_n^2 + \sqrt{(1+\alpha)^2 + \left(\frac{\varepsilon^2}{3} \eta_n^2 \right)^2} + (1+\alpha) \frac{\varepsilon^2}{3} \eta_n^2 \bar{k}_n \right] / 2; \quad (17)$$

$$\eta_n^2 = 1 / [1 / k_n^2 + \bar{\beta}^2 / \delta^2];$$

$$\bar{\beta}^2 = \varepsilon^2 (E / G') / k', \quad \delta^2 = 3(1 - \nu^2);$$

$$\bar{k}_n = 2(6 / k_n^2 - 1 / k_n^4 - 1) / (1 + 1 / k_n^2)^2;$$

$\varepsilon = h / R$ – параметр тонкостінності панелі.

Можна показати, що підкореневий вираз у (17) завжди невід'ємний.

Введемо до розгляду спектр безрозмірних частот за формулою

$$\bar{\omega}_n = \omega_n h \sqrt{\rho / E}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Використавши (17), для $\bar{\omega}_n$ отримаємо вираз

$$\bar{\omega}_n = \varepsilon a_n / \sqrt{(1 - \nu^2)}, \quad (18)$$

який є аналітичним розв'язком задачі про малі вільні поперечні коливання ортотропної циліндричної панелі за двох вище згаданих випадків закріплення її видовжених торців.

Аналіз числових результатів та висновки. Під час розрахунків розглянуто дві циліндричні панелі з параметрами тонкостінності $\varepsilon = 0,1$ та $\varepsilon = 0,05$ з однаковими кутами розхилу $2\varphi_0 = \pi / 2$. Коефіцієнт Пуассона прийнято $\nu = 0,375$, що є характерним для композитів на полімерній основі. Співвідношення між кільцевим та радіальним модулями пружності $E / E' = 1$. Коефіцієнт α , через який враховано податливість до трансверсального стиснення, в даному випадку становить $0,5625$.

Таблиця 1.

$\bar{\omega}_n^{(i)}, \xi_n$ \ n	0	1	2
$\bar{\omega}_n^{(1)}$	0,30272	0,82149	1,35869
$\bar{\omega}_n^{(2)}$	0,50756	1,62712	2,7008
ξ_n	1,67674	1,98069	1,98779

Таблиця 2.

$\bar{\omega}_n^{(i)}, \xi_n$ \ n	0	1	2
$\bar{\omega}_n^{(1)}$	0,15091	0,41033	0,67840
$\bar{\omega}_n^{(2)}$	0,27834	0,81272	1,35031
ξ_n	1,8444	1,98065	1,99043

У табл. 1 наведені значення перших трьох безрозмірних частот для панелі з параметром тонкостінності $\varepsilon = 0,1$, а в табл. 2 – $\varepsilon = 0,05$. Перші рядки таблиць відповідають шарнірному закріпленню видовжених торців, а другі – жорсткому защемленню. У третій рядках наведені значення коефіцієнтів впливу $\xi_n = \bar{\omega}_n^{(2)} / \bar{\omega}_n^{(1)}$ граничних умов на власні частоти. Зауважено подібну тенденцію до збільшення значень власних частот для обох панелей, окрім основної власної частоти, за якої коефіцієнти впливу суттєво різняться.

У подальшому відповідні дослідження доцільно виконувати для інших класів оболонок, де можна отримати аналітичні розв'язки, цікаві для практики і які можуть бути тестовими для апробації числових методів.

1. Вольмир А. С., Куранов Б. А., Турбаивский А. Т. Статика и динамика сложных структур. – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с.
2. Карпинос Д. М. Композиционные материалы: Справ. – К.: Наук. думка, 1985. – 493 с.

3. Марчук М. В. Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // *Машинознавство*. – 2005. – № 10. – С. 9–14.
4. Осадчук В. А., Марчук М. В. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // *Прикл. проблеми механіки і математики*. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
5. Grigorenko A. Ya. and Parkhomenko A. Yu. Free Vibrations of Shallow Nonthin Shells with Variable Thickness and Rectangular Planform // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – 46, № 7. – P. 776–789.
6. Gulgazaryan G. R., Gulgazaryan R. G., Khachanyan A. A. Vibrations of an Orthotropic Cylindrical Panel with Various Boundary Conditions // *Ibid.* – 2013. – 49, № 5. – P. 534–554.
7. Gulgazaryan G. R., Gulgazaryan R. G. and Saakyan R. D. The Vibrations of a Thin Elastic Orthotropic Circular Cylindrical Shell with Free and Hinged Edges // *J. Appl. Math. Mech.* – 2008. – 72, № 3. – P. 453–465.
8. Haldar S. Free Vibration of Composite Skewed Cylindrical Shell and Panel by Finite Element Method // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – 311. – P. 9–19.

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ УДЛИНЕННЫХ ТОРЦОВ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ НА ИХ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ

На основании соотношений обобщенной теории динамического деформирования податливых к сдвигу оболочек получена система разрешающих уравнений, описывающая свободные поперечные колебания удлиненных цилиндрических панелей. Найдены аналитические выражения для спектров собственных частот при разных условиях закрепления удлиненных торцов. Исследовано влияние условий закрепления на значения собственных частот при разных толщинах панели.

INFLUENCE OF CONDITIONS FIXING OF ALONGATED ENDS OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL PANELS ON THEIR NATURAL FREQUENCIES

On the basis of the relations of the generalized theory of dynamic deformation of shells pliable to shear, a system of governing equations describing the free transverse vibrations of elongated cylindrical panels is obtained. Analytical expressions for the spectrum of the natural frequencies at different conditions fixing of elongated ends are found. The influence of fixing conditions on the values of the natural frequencies at different thickness of panel is investigated.