УДК 517.524

Т. М. Антонова, В. Р. Гладун

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ТА АБСОЛЮТНОЇ СТІЙКОСТІ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Встановлено достатні умови знакопочерговості залишків підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з дійсними частинними чисельниками та знаменниками, що дорівнюють одиниці. З допомогою методу фундаментальних нерівностей доведено ознаки збіжності таких гіллястих ланцюгових дробів і деяких послідовностей їх підхідних дробів, знайдено оцінки швидкості збіжності. Побудовано і досліджено багатовимірні множини абсолютної стійкості до збурень такого класу гіллястих ланцюгових дробів. Одержано оцінки абсолютних похибок підхідних дробів, що виникають у результаті збурення їх елементів.

Вступ. Важливими питаннями аналітичної теорії неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень як ефективного математичного апарату теорії функцій, обчислювальної математики, теорії чисел є збіжність і стійкість до збурень [5, 8, 10–13].

Задачу збіжності неперервних дробів з додатними елементами розв'язав Л. Зейдель [8], який встановив критерій збіжності неперервного дробу $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}(1/b_k)$. Для гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД) $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\left(1/b_{i(k)}\right)$ з додатними частинними знаменниками доведено багатовимірний аналог достатності критерію збіжності Зейделя, а також встановлено, що область $(0,+\infty)$ є областю відносної стійкості до збурень [5].

Доведено, що проста область збіжності неперервного дробу $\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}(a_k/1)$ з дійсними частинними чисельниками не може містити точок, що лежать зліва від точки $-1/4$ [8]. Збіжність і стійкість до збурень ГЛД $b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\left(a_{i(k)}/b_{i(k)}\right)$ з дійсними елементами досліджували у випадку, коли $a_{i(k)}\left(b_{i(k-1)}b_{i(k)}\right)^{-1} \ge -N^{-1}\rho(1-\rho)$, $0 \le \rho \le 1/2$ [5, 7, 9].

Питання збіжності і стійкості до збурень багатовимірних узагальнень неперервних дробів з від'ємними (недодатними) та знакозмінними частинними чисельниками вивчали у працях [1–4, 6], використовуючи методику, що вимагає встановлення множин значень залишків підхідних дробів. Ця робота продовжує ці дослідження для знакозмінних залишків підхідних дробів ГЛД.

Ознаки збіжності. Розглянемо ГЛД

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де $N \in \mathbb{N}$ – кількість гілок розгалужень, $i(k)$ – мультиіндекс: $i(k) \in I_k$, $k = 1,2,\ldots$, $I_k = \{i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k :\ i_p = \overline{1,N},\ p = \overline{1,k}\}$, $k = 1,2,\ldots$, $a_{i(k)} \in \mathbb{R}$ – елементи дробу, причому

$$a_{i(2k)} \le 0,\ i(2k) \in I_{2k},\ k = 1,2,\ldots. \tag{2}$$

Підхідними дробами n-го порядку ГЛД (1) називають вирази

$$f_0 = 0,\ f_n = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1},\ n = 1,2,\ldots.$$

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = F$, то ГЛД (1) називають збіжним, а число F − його значенням. Послідовність $\{f_{2k}\}, k = 1,2,\ldots$, називають парною частиною ГЛД (1). Парна частина ГЛД (1) збігається, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k} = F_2$.

Залишками підхідного дробу n-го порядку ГЛД (1) називають величини, які визначають такі співвідношення:

$$\begin{aligned} &Q_{i(n)}^{(n)} = 1,\ i(n) \in I_n,\ n = 1,2,\ldots, \\ &Q_{i(k)}^{(n)} = 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(n)}},\ i(k) \in I_k,\ k = \overline{1, n-1},\ n = 2,3,\ldots. \end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. *Нехай елементи ГЛД (1) задовольняють умови (2) та*

$$\sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k+1)}\right|}{g_{i(k+1)}} \le \alpha_{k+1}, \tag{4}$$

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k)}\right|}{1 + \sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N} \dfrac{\left|a_{i(2k+1)}\right|}{g_{i(k+1)} + \varepsilon_{i(k+1)}}} \ge 1 + g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}, \tag{5}$$

$i(2k) \in I_{2k}$, $i(2k-1) \in I_{2k-1}$, $k = 1,2,\ldots$, *де* $g_{i(k)}$, $\varepsilon_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 1,2,\ldots$, α_k, ρ_k, $k = 2,3,\ldots$, *− такі додатні сталі, що*

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}}\right)\frac{g_{i(k)}}{\varepsilon_{i(k)}} \le \rho_k,\ \alpha_k \le 1,\ i(k) \in I_k,\ k = 2,3,\ldots, \\ &\prod\nolimits_{k=2}^{\infty} \alpha_k \rho_k = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Тоді парна частина ГЛД (1) збігається і швидкість збіжності характеризує нерівність

$$\left|F_2 - f_{2p}\right| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left|a_{i(1)}\right|\left(1 + g_{i(1)} + \varepsilon_{i(1)}\right)}{\left(g_{i(1)} + \varepsilon_{i(1)}\right)^2} \prod_{k=2}^{p+1} \alpha_k \rho_k. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Покажемо, що для залишків підхідного дробу f_{2p} ГЛД (1) за умов (4), (5) справджуються нерівності

$$0 < Q_{i(2k)}^{(2p)} \le 1 + \sum_{i_{2k+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k+1)}\right|}{g_{i(k+1)} + \varepsilon_{i(k+1)}},\ k = \overline{1, p},\ p = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

$$Q_{i(2k-1)}^{(2p)} < 0,\ \left|Q_{i(2k-1)}^{(2p)}\right| \ge g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)},\ k = \overline{1, p},\ p = 1,2,\ldots. \tag{9}$$

Правильність нерівностей (8), якщо $k = p$, випливає з формул (3). Враховуючи умову (5), маємо:

$$Q_{i(2p-1)}^{(2p)} = 1 - \sum_{i_{2p}=1}^{N} \left|a_{i(2p)}\right| < 0,$$

$$\left|Q_{i(2p-1)}^{(2p)}\right| = \sum_{i_{2p}=1}^{N} \left|a_{i(2p)}\right| - 1 \ge g_{i(p)} + \varepsilon_{i(p)},$$

тобто нерівності (9) справджуються, коли $k = p$. Припустимо, що оцінки (8), (9) правильні за деякого значення $k = m+1$, $1 \le m \le p-1$. Виходячи з нерівності (9) і враховуючи умову (4), одержуємо

$$Q_{i(2m)}^{(2p)} \geq 1 - \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2m+1)}\right|}{\left|Q_{i(2m+1)}^{(2p)}\right|} \geq 1 - \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2m+1)}\right|}{g_{i(m+1)} + \varepsilon_{i(m+1)}} > 1 - \alpha_{m+1} \geq 0,$$

$$Q_{i(2m)}^{(2p)} \leq 1 + \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2m+1)}\right|}{\left|Q_{i(2m+1)}^{(2p)}\right|} \leq 1 + \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2m+1)}\right|}{g_{i(m+1)} + \varepsilon_{i(m+1)}},$$

а беручи до уваги нерівності (5) і (8), –

$$-Q_{i(2m-1)}^{(2p)} = \sum_{i_{2m}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2m)}\right|}{Q_{i(2m)}^{(2p)}} - 1 \geq \sum_{i_{2m}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2m)}\right|}{1 + \sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{N} \dfrac{\left|a_{i(2m+1)}\right|}{g_{i(m+1)} + \varepsilon_{i(m+1)}}} - 1 \geq g_{i(m)} + \varepsilon_{i(m)},$$

тобто нерівності (8), (9) справджуються, якщо $k = m$.

Використовуючи формулу різниці підхідних дробів [5]

$$f_s - f_r = (-1)^r \sum_{i_1,\ldots,i_{r+1}=1}^{N} \frac{\prod\limits_{k=1}^{r+1} a_{i(k)}}{\prod\limits_{k=1}^{r+1} Q_{i(k)}^{(s)} \prod\limits_{k=1}^{r} Q_{i(k)}^{(r)}}, \quad s > r, \tag{10}$$

оцінимо різницю $f_s - f_{2p}$, $s \geq 2p+1$:

$$\left|f_s - f_{2p}\right| \leq \sum_{i_1,\ldots,i_{2p+1}=1}^{N} \frac{\prod\limits_{k=1}^{2p+1} \left|a_{i(k)}\right|}{\prod\limits_{k=1}^{2p+1} \left|Q_{i(k)}^{(s)}\right| \prod\limits_{k=1}^{2p} \left|Q_{i(k)}^{(2p)}\right|} = \sum_{i_1,\ldots,i_{2p}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(1)}\right|}{\left|Q_{i(1)}^{(s)}\right|} \frac{\left|a_{i(2)}\right|}{\left|Q_{i(1)}^{(2p)} Q_{i(2)}^{(2p)}\right|} \times$$

$$\times \prod_{k=2}^{p} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right| \left|a_{i(2k)}\right|}{\left|Q_{i(2k-2)}^{(s)} Q_{i(2k-1)}^{(s)}\right| \left|Q_{i(2k-1)}^{(2p)} Q_{i(2k)}^{(2p)}\right|} \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2p+1)}\right|}{\left|Q_{i(2p)}^{(s)} Q_{i(2p+1)}^{(s)}\right|}. \tag{11}$$

Покладемо в (11) $s = 2n$, $n \geq p+1$, і оцінимо величини $\sum_{i_{2k}=1}^{N} \left|a_{i(2k)}\right| \left|Q_{i(2k-1)}^{(2p)} Q_{i(2k)}^{(2p)}\right|^{-1}$, $\sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \left|a_{i(2k-1)}\right| \left|Q_{i(2k-2)}^{(2n)} Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right|^{-1}$. Враховуючи нерівності (4), (9), одержуємо:

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k)}\right|}{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2p)} Q_{i(2k)}^{(2p)}\right|} = \left(\sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k)}\right|}{Q_{i(2k)}^{(2p)}} - 1 \right)^{-1} \sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k)}\right|}{Q_{i(2k)}^{(2p)}} = 1 + \frac{1}{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2p)}\right|} \leq$$

$$\leq 1 + \left(g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}\right)^{-1}, \quad i(2k-1) \in I_{2k-1}, \quad k = \overline{1,p}, \tag{12}$$

$$\sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{\left|Q_{i(2k-2)}^{(2n)} Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right|} \leq \left(1 - \sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right|}\right)^{-1} \sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right|} =$$

$$= \left(1 - \sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{g_{i(k)}} + \sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{g_{i(k)}} \cdot \frac{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right| - g_{i(k)}}{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right|}\right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{g_{i(k)}} \cdot \frac{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right| - g_{i(k)}}{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right|} \cdot \frac{g_{i(k)}}{\left|Q_{i(2k-1)}^{(2n)}\right| - g_{i(k)}} \leq$$

$$\leq \left(1 - \sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{g_{i(k)}} + \sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{g_{i(k)}}\right)^{-1} \sum_{i_{2k-1}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k-1)}\right|}{g_{i(k)}} \cdot \frac{g_{i(k)}}{\varepsilon_{i(k)}} \leq$$

$$\le \alpha_k \frac{g_{i(k)}}{\varepsilon_{i(k)}}, \; i(2k-2) \in I_{2k-2}, \; k = \overline{2, p+1}. \tag{13}$$

Із урахуванням умов (6) та оцінок (12), (13) маємо:

$$\sum_{i_{2k-1}, i_{2k}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2k-1)} a_{i(2k)} \right|}{\left| Q_{i(2k-2)}^{(2n)} Q_{i(2k-1)}^{(2n)} \right| \left| Q_{i(2k-1)}^{(2p)} Q_{i(2k)}^{(2p)} \right|} \le \alpha_k \frac{g_{i(k)}}{\varepsilon_{i(k)}} \left(1 + \frac{1}{g_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}} \right) \le$$

$$\le \alpha_k \rho_k, \; i(2k-2) \in I_{2k-2}, \; k = \overline{2, p}.$$

Отже, якщо $n \ge p+1$, справджується оцінка

$$\left| f_{2n} - f_{2p} \right| \le \sum_{i_1, i_2 = 1}^{N} \frac{\left| a_{i(1)} \right| \left| a_{i(2)} \right|}{\left| Q_{i(1)}^{(2n)} \right| \left| Q_{i(1)}^{(2p)} Q_{i(2)}^{(2p)} \right|} \prod_{k=2}^{p+1} \alpha_k \rho_k \le$$

$$\le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left| a_{i(1)} \right|}{\left(g_{i(1)} + \varepsilon_{i(1)} \right)} \left(1 + \frac{1}{g_{i(1)} + \varepsilon_{i(1)}} \right) \prod_{k=2}^{p+1} \alpha_k \rho_k,$$

звідки при $p \to \infty$ випливає збіжність парної частини ГЛД (1), а при $n \to \infty$ – оцінка швидкості збіжності (7). Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай елементи ГЛД (1) задовольняють умови (2), (4), (5), де* $g_{i(k)}$, $\varepsilon_{i(k)}$, $i(k) \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$, α_k, ρ_k, $k = 2, 3, \ldots$, *– такі додатні сталі, що виконуються умови (6) і, крім того, існує таке число* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *що*

$$\left| Q_{i(2p+1)}^{(2p+2m+1)} \right| \ge g_{i(p+1)} + \varepsilon_{i(p+1)}, \, p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

де залишки $Q_{i(2p+1)}^{(2p+2m+1)}$ *визначають за формулами (3). Тоді ГЛД (1) збігається і швидкість збіжності характеризує нерівність*

$$\left| F - f_{2p} \right| \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\left| a_{i(1)} \right| \left(1 + g_{i(1)} + \varepsilon_{i(1)} \right)}{\left(g_{i(1)} + \varepsilon_{i(1)} \right)^2} \prod_{k=2}^{p+1} \alpha_k \rho_k.$$

Д о в е д е н н я. За виконання умов теореми

$$Q_{i(2p)}^{(2p+2m+1)} \ge 1 - \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2p+1)} \right|}{\left| Q_{i(2p+1)}^{(2p+2m+1)} \right|} \ge 1 - \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2p+1)} \right|}{g_{i(p+1)} + \varepsilon_{i(p+1)}} >$$

$$> 1 - \alpha_{p+1} \ge 0,$$

$$Q_{i(2p)}^{(2p+2m+1)} \le 1 + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2p+1)} \right|}{\left| Q_{i(2p+1)}^{(2p+2m+1)} \right|} \le 1 + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2p+1)} \right|}{g_{i(p+1)} + \varepsilon_{i(p+1)}},$$

тобто оцінки

$$0 < Q_{i(2k)}^{(2p+2m+1)} \le 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{\left| a_{i(2k+1)} \right|}{g_{i(k+1)} + \varepsilon_{i(k+1)}}, \; k = \overline{1, p}, \; p = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\left| Q_{i(2k+1)}^{(2p+2m+1)} \right| \ge g_{i(k+1)} + \varepsilon_{i(k+1)}, \; k = \overline{0, p}, \; p = 0, 1, 2, \ldots, \\ &Q_{i(2k+1)}^{(2p+2m+1)} < 0, \; k = \overline{0, p-1}, \; p = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{16}$$

справджуються, якщо $k = p$. Правильність оцінок (15), (16) для довільних можливих значень k доводимо методом математичної індукції.

Поклавши в (11) $s = 2p + 2m + n$, $n = 1, 2, \ldots$, і врахувавши нерівності (8), (9), (12), (13), (15), (16) та умови (6), діємо за схемою доведення теореми 1. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай *елементи ГЛД (1) задовольняють умови (2), (4) та*

$$\sum_{i_{2k}=1}^{N} \frac{\left|a_{i(2k)}\right|}{1+\sum\limits_{i_{2k+1}=1}^{N}\left|a_{i(2k+1)}\right|} \ge 2\,,\quad i(2k-1)\in I_{2k-1}\,,\ k=1,2,\ldots, \tag{17}$$

де $g_{i(k)}$, α_k, ρ_k, $i(k)\in I_k$, $k=2,3,\ldots$, *− такі додатні сталі, що*

$$\begin{gathered} g_{i(k)}<1,\ 2g_{i(k)}\le \rho_k\left(1-g_{i(k)}\right),\ \alpha_k\le 1,\ i(k)\in I_k,\ k=2,3,\ldots, \\ \prod\nolimits_{k=2}^{\infty}\alpha_k\rho_k=0. \end{gathered} \tag{18}$$

Тоді ГЛД (1) збігається і швидкість збіжності характеризує нерівність $\left|F-f_{2p}\right|\le 2\sum\nolimits_{i_1=1}^{N}\left|a_{i(1)}\right|\prod\nolimits_{k=2}^{p+1}\alpha_k\rho_k$. *Окрім того, якщо*

$$a_{i(2k-1)}\ge 0\,,\ i(2k-1)\in I_{2k-1}\,,\ k=1,2,\ldots, \tag{19}$$

то

$$f_1\ge f_0\ge f_5\ge f_4\ge\ldots\ge f_{4k+1}\ge f_{4k}\ge\ldots\ge f_{4l+2}\ge f_{4l+3}\ge\ldots\ge f_6\ge f_7\ge f_2\ge f_3\,. \tag{20}$$

Д о в е д е н н я. Підставляючи в умови (5), (6) $\varepsilon_{i(k)}=1-g_{i(k)}$, $g_{i(k)}<1$, одержуємо умови (17), (18) відповідно. Окрім того, $Q_{i(2p+1)}^{(2p+1)} = g_{i(p+1)}+\varepsilon_{i(p+1)}$, тобто умова (14) виконується, якщо $m=0$. Тому перша частина теореми є наслідком теореми 2.

Використовуючи умову (19), оцінки (8), (9), (15), (16), де $m=0$, а також формулу (10), одержуємо систему нерівностей (20). Теорему доведено.

Множини абсолютної стійкості до збурень. Нехай $\widehat{a}_{i(k)}$, $i(k)\in I_k$, $k=1,2,\ldots$, збурені значення елементів $a_{i(k)}$ ГЛД (1). ГЛД

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{\widehat{a}_{i(k)}}{1} \tag{21}$$

називають збуреним до дробу (1).

Нехай $\left\{E_{i(k)}\right\}$, $E_{i(k)}\subset \mathbb{C}^N$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, $I_0=\{0\}$, − послідовність багатовимірних множин елементів ГЛД (1) і збуреного до нього ГЛД (21), тобто

$$\mathrm{a}_{i(k)}=(a_{i(k)1},a_{i(k)2},\ldots,a_{i(k)N})\in E_{i(k)}\,,\ i(k)\in I_k\,,\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$\widehat{\mathrm{a}}_{i(k)}=(\widehat{a}_{i(k)1},\widehat{a}_{i(k)2},\ldots,\widehat{a}_{i(k)N})\in E_{i(k)}\,,\ i(k)\in I_k\,,\ k=0,1,2,\ldots.$$

Послідовність множин $\left\{E_{i(k)}\right\}$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, називають послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (1), якщо для довільного дійсного $\varepsilon>0$ існує таке дійсне число $\delta>0$, що для кожного елемента $\mathrm{a}_{i(k)}\in E_{i(k)}$ і кожного $\widehat{\mathrm{a}}_{i(k)}\in E_{i(k)}$ такого, що $\left|\widehat{a}_{i(k)j}-a_{i(k)j}\right|<\delta$, $j=\overline{1,N}$, $i(k)\in I_k$, $k=0,1,2,\ldots$, виконуються нерівності $\left|\widehat{f}_s-f_s\right|<\varepsilon$, $s=1,2,\ldots$, де f_s, $\widehat{f}_s$ − s-ті підхідні дроби ГЛД (1), (21) відповідно.

Позначимо через $\Delta a_{i(k)}$, Δf_s абсолютні похибки елементів $a_{i(k)}$ і підхідних дробів f_s ГЛД (1) відповідно, тобто

$$\Delta a_{i(k)}=\widehat{a}_{i(k)}-a_{i(k)}\,,\ i(k)\in I_k\,,\ k=1,2,\ldots,\ \Delta f_s=\widehat{f}_s-f_s\,,\ s=1,2,\ldots.$$

Надалі, досліджуючи абсолютну стійкість до збурень ГЛД (1), використовуватимемо формулу абсолютної похибки підхідного дробу [7], яку, враховуючи вигляд досліджуваного дробу, запишемо так:

$$\Delta f_s = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{\Delta a_{i(1)}}{\widehat{Q}_{i(1)}^{(s)}} + \sum_{k=2}^{s} (-1)^{k-1} \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)}} \sum_{i_2,i_3,\dots,i_k=1}^{N} \prod_{m=2}^{k-1} q_{i(m)}^{(s)} \frac{\Delta a_{i(k)}}{\tilde{Q}_{i(k-1)}^{(s)} \tilde{Q}_{i(k)}^{(s)}}, \quad (22)$$

$s = 1, 2, \dots$, де

$$\tilde{Q}_{i(k)}^{(s)} = \begin{cases} \widehat{Q}_{i(k)}^{(s)}, & k - \text{непарне}, \\ Q_{i(k)}^{(s)}, & k - \text{парне}, \end{cases} \qquad q_{i(k)}^{(s)} = \begin{cases} a_{i(k)} \left(Q_{i(k-1)}^{(s)} Q_{i(k)}^{(s)} \right)^{-1}, & k - \text{непарне}, \\ \widehat{a}_{i(k)} \left(\widehat{Q}_{i(k-1)}^{(s)} \widehat{Q}_{i(k)}^{(s)} \right)^{-1}, & k - \text{парне}, \end{cases}$$

$Q_{i(k)}^{(s)}$, $\widehat{Q}_{i(k)}^{(s)}$ – залишки s-их підхідних дробів ГЛД (1), (21) відповідно.

Теорема 4. *Нехай існує така додатна стала* Δ, *що* $\left|\Delta a_{i(k)}\right| \le \Delta$, $i(k) \in I_k$, $k = 1, 2, \dots$. *Сукупність множин*

$$E_0 = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^{N} |x_j| \le g_0 \right\}, \quad (23)$$

$$E_{i(1)} = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^N : x_j \le 0,\ j = \overline{1,N},\ \sum_{j=1}^{N} |x_j| \left(1 + g_{i(1)j}\right)^{-1} \ge 2 \right\}, \quad (24)$$

$i(1) \in I_1$,

$$E_{i(2k)} = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^{N} |x_j| \le g_{i(k+1)} \right\},$$

$i(2k) \in I_{2k}$, $k = 1, 2, \dots$, (25)

$$E_{i(2k-1)} = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^N : x_j \le 0,\ j = \overline{1,N},\ \sum_{j=1}^{N} |x_j| \ge 2\left(1 + g_{i(k+1)}\right) \right\}, \quad (26)$$

$i(2k-1) \in I_{2k-1}$, $k = 2, 3, \dots$,

де $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots x_N)$, $g_0 > 0$, $0 \le g_{i(k)} < 1$, $i(k) \in I_k$, $k = 2, 3, \dots$, *є послідовністю множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (1), якщо збігається ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3 + (-1)^{k+1}}{1 - g_{[k/2]+1}} \prod_{m=2}^{[k/2]} \frac{2 g_m}{1 - g_m}, \quad (27)$$

де $g_k = \max_{i(k) \in I_k} \left\{ g_{i(k)} \right\}$, $k = 2, 3, \dots$, $[x]$ – *ціла частина числа* x. *Для абсолютних похибок підхідних дробів справджуються оцінки*

$$|\Delta f_1| \le \Delta N,$$

$$|\Delta f_s| \le \Delta N \left(1 + \frac{g_0}{2} \sum_{k=2}^{s} \frac{3 + (-1)^{k+1}}{1 - g_{[k/2]+1}} \prod_{m=2}^{[k/2]} \frac{2 g_m}{1 - g_m} \right), s = 2, 3, \dots. \quad (28)$$

Д о в е д е н н я. Із формули (22) для абсолютної похибки s-го підхідного дробу випливає оцінка

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \le \Delta \left(\sum_{i_1=1}^{N} \left|\widehat{Q}_{i(1)}^{(s)}\right|^{-1} + \sum_{k=2}^{s} \sum_{i_1=1}^{N} \left|a_{i(1)}\right| \left|Q_{i(1)}^{(s)}\right|^{-1} \sum_{i_2,i_3,\dots,i_k=1}^{N} \prod_{m=2}^{k-1} \left|q_{i(m)}^{(s)}\right| \left(\left|\tilde{Q}_{i(k-1)}^{(s)}\right| \left|\tilde{Q}_{i(k)}^{(s)}\right| \right)^{-1} \right).$$

Використовуючи метод математичної індукції, покажемо, що за виконання умов, які визначають множини (24)–(26) для залишків s-го підхідного дробу ГЛД (1), справджуються оцінки

$$0 < 1 - g_{i(k+1)} \le Q_{i(2k)}^{(s)} \le 1 + g_{i(k+1)},\ Q_{i(2k-1)}^{(s)} \le -1, \quad (29)$$

$i(2k-1) \in I_{2k-1}$, $i(2k) \in I_{2k}$, $k = \overline{1,[s/2]}$, $s = 2, 3, \dots$. При $k = [s/2]$, $s = 2p$, $p \ge 1$, маємо:

$$0 < 1 - g_{i(p+1)} \le Q^{(2p)}_{i(2p)} \le 1 + g_{i(p+1)},$$

$$-Q^{(2p)}_{i(2p-1)} \ge \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{|a_{i(2p)}|}{1+g_{i(p+1)}} - 1 \ge 1.$$

При $k = [s/2]$, $s = 2p+1$, $p \ge 1$,

$$Q^{(2p+1)}_{i(2p)} \le 1 + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} |a_{i(2p+1)}| \le 1 + g_{i(p+1)},$$

$$Q^{(2p+1)}_{i(2p)} \ge 1 - \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} |a_{i(2p+1)}| \ge 1 - g_{i(p+1)} > 0,$$

$$-Q^{(2p+1)}_{i(2p-1)} = \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{|a_{i(2p)}|}{Q^{(2p+1)}_{i(2p)}} - 1 \ge \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{|a_{i(2p)}|}{1+g_{i(p+1)}} - 1 \ge 1.$$

Припустивши, що нерівності (29) справджуються для деякого $k = m+1$, $1 \le m \le [s/2]-1$, доведемо їх, якщо $k = m$:

$$Q^{(s)}_{i(2m)} \le 1 + \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(2m+1)}|}{|Q^{(s)}_{i(2m+1)}|} \le 1 + \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} |a_{i(2m+1)}| \le 1 + g_{i(m+1)},$$

$$Q^{(s)}_{i(2m)} \ge 1 - \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(2m+1)}|}{|Q^{(s)}_{i(2m+1)}|} \ge 1 - \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} |a_{i(2m+1)}| \ge 1 - g_{i(m+1)} > 0,$$

$$-Q^{(s)}_{i(2m-1)} = \sum_{i_{2m}=1}^{N} \frac{|a_{i(2m)}|}{Q^{(s)}_{i(2m)}} - 1 \ge \sum_{i_{2m}=1}^{N} \frac{a_{i(2m)}}{1+g_{i(m+1)}} - 1 \ge 1.$$

Оскільки $\hat{a}_{i(k)} \in E_{i(k)}$, де множини $E_{i(k)}$ визначають згідно з (23)–(26), то для залишків ГЛД (21) виконуються нерівності: $\widehat{Q}^{(s)}_{i(2k-1)} \le -1$, $0 < 1 - g_{i(k+1)} \le \widehat{Q}^{(s)}_{i(2k)} \le 1 + g_{i(k+1)}$, $i(2k-1) \in I_{2k-1}$, $i(2k) \in I_{2k}$, $k = \overline{1,[s/2]}$.

Оцінимо величини $\sum_{i_k=1}^{N} |q^{(s)}_{i(k)}|$, $i(k-1) \in I_{k-1}$, $k = \overline{2, s-1}$, $s = 3,4,\ldots$, $\sum_{i_k=1}^{N} \left(|\tilde{Q}^{(s)}_{i(k-1)}||\tilde{Q}^{(s)}_{i(k)}|\right)^{-1}$, $i(k-1) \in I_{k-1}$, $k = \overline{2,s}$, $s = 2,3,\ldots$, з урахуванням парності числа k. При $k = 2m$ маємо:

$$\sum_{i_{2m}=1}^{N} |q^{(s)}_{i(2m)}| = \sum_{i_{2m}=1}^{N} \frac{|\hat{a}_{i(2m)}|}{|\widehat{Q}^{(s)}_{i(2m-1)}||\widehat{Q}^{(s)}_{i(2m)}|} = \left(\sum_{i_{2m}=1}^{N} \frac{|\hat{a}_{i(2m)}|}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(2m)}} - 1\right)^{-1} \sum_{i_{2m}=1}^{N} \frac{|\hat{a}_{i(2m)}|}{|\widehat{Q}^{(s)}_{i(2m)}|} =$$

$$= 1 + |\widehat{Q}^{(s)}_{i(2m-1)}|^{-1} \le 2, \; i(2m-1) \in I_{2m-1}, \; m = \overline{1,[(s-1)/2]}, \; s = 3,4,\ldots,$$

$$\sum_{i_{2m}=1}^{N} \left(|\tilde{Q}^{(s)}_{i(2m-1)}||\tilde{Q}^{(s)}_{i(2m)}|\right)^{-1} = \sum_{i_{2m}=1}^{N} \left(|\widehat{Q}^{(s)}_{i(2m-1)}||Q^{(s)}_{i(2m)}|\right)^{-1} \le \sum_{i_{2m}=1}^{N} |Q^{(s)}_{i(2m)}|^{-1} \le$$

$$\le \frac{N}{1-g_{i(m+1)}} \le \frac{N}{1-g_{m+1}}, \; i(2m-1) \in I_{2m-1}, \; m = \overline{1,[s/2]}, \; s = 2,3,\ldots .$$

При $k = 2m+1$ одержимо:

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{N} |q^{(s)}_{i(2m+1)}| = \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(2m+1)}|}{|Q^{(s)}_{i(2m)}||Q^{(s)}_{i(2m+1)}|} \le \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(2m+1)}|}{|Q^{(s)}_{i(2m)}|} \le$$

$$\le \frac{g_{i(m+1)}}{1-g_{i(m+1)}} \le \frac{g_{m+1}}{1-g_{m+1}}\,,\ \ i(2m)\in I_{2m}\,,\ \ m=\overline{1,[s/2]-1}\,,\ \ s=4,5,\ldots .$$

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{N}\left(\left|\tilde{Q}^{(s)}_{i(2m)}\right|\left|\tilde{Q}^{(s)}_{i(2m+1)}\right|\right)^{-1} = \sum_{i_{2m}=1}^{N}\left(\left|Q^{(s)}_{i(2m)}\right|\left|\hat{Q}^{(s)}_{i(2m+1)}\right|\right)^{1} \le N\left|Q^{(s)}_{i(2m)}\right|^{-1} \le$$

$$\le \frac{N}{1-g_{i(m+1)}} \le \frac{N}{1-g_{m+1}}\,,\ \ i(2m)\in I_{2m}\,,\ \ m=\overline{1,[(s-1)/2]}\,,\ \ s=3,4,\ldots .$$

Використовуючи оцінки величин $\sum_{i_k=1}^{N}\left|q^{(s)}_{i(k)}\right|$, $\sum_{i_k=1}^{N}\left(\left|\tilde{Q}^{(s)}_{i(k-1)}\right|\left|\tilde{Q}^{(s)}_{i(k)}\right|\right)^{-1}$ і те, що $\sum_{i_1=1}^{N}\left|\hat{Q}^{(s)}_{i(1)}\right|^{-1} \le N$, $\sum_{i_1=1}^{N}\left|a_{i(1)}\right|\left|Q^{(s)}_{i(1)}\right|^{-1} \le \sum_{i_1=1}^{N}\left|a_{i(1)}\right| \le g_0$, $s=1,2,\ldots$, отримуємо оцінку (28), з якої випливає, що збіжність ряду (27) забезпечує виконання умов означення послідовності множин абсолютної стійкості до збурень ГЛД (1). Окрім того, $\left|\Delta f_1\right| = \left|\sum_{i_1=1}^{N}\Delta a_{i(1)}\right| \le \Delta N$. Теорему доведено.

Зауважимо, що нерівності, які визначають множини (24)–(26), забезпечують виконання умов (2), (4), (17) при $\alpha_k=1$, $k=2,3,\ldots$. Окрім того, зі збіжності ряду (27) випливає розбіжність до нуля нескінченного добутку $\prod_{k=2}^{\infty}2g_k\left(1-g_k\right)^{-1}$, тобто виконуються умови (18), де $\alpha_k=1$, $\rho_k = 2g_k\left(1-g_k\right)^{-1}$, $k=2,3,\ldots$. Отже, послідовність множин (23)–(26) є послідовністю множин збіжності ГЛД (1).

1. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 11–15.
2. *Антонова Т. М., Гладун В. Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Там само.– 2004. – **47**, № 4. – С. 27–35.
3. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку двовимірних неперервних дробів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 4–9.
4. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості послідовностей фігурних наближень двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами // Мат. вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 5–16.
5. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
6. *Гладун В. Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 16–26.
7. *Гладун В. Р.* Множини абсолютної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з дійсними елементами // Вісник НУ «Львівська політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки.– 2013. – № 768. – С. 63–70.
8. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
9. *Кучминская Х. И., Боднар Д. И.* Вычислительная устойчивость разложений функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби // Однород. цифровые вычисл. и интегр. структуры. – Таганрог, 1977. – Вып. 8. – С. 145–151.
10. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики, 2010. – 218 с.
11. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
12. *Cuyt A., Petersen V. B., Verdonk B. etc.* Handbook of Continued Fractions for Special Functions. – Berlin: Springer, 2008. – 432 p.
13. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: Noth Holland, 1992. – 606p.

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ И АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Установлены условия знакопоочередности остатков подходящих дробей ветвящихся цепных дробей с действительными частными числителями и знаменателями, равными единице. С помощью метода фундаментальных неравенств доказаны признаки сходимости таких ветвящихся цепных дробей и некоторых последовательностей их подходящих дробей, найдены оценки скорости сходимости. Построены и исследованы многомерные множества абсолютной устойчивости к возмущениям такого класса ветвящихся цепных дробей. Получены оценки абсолютных погрешностей подходящих дробей, возникающих при возмущении их элементов.

SOME SUFFICIENT CONDITIONS FOR CONVERGENCE AND ABSOLUTE STABILITY TO PERTURBATIONS OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH REAL ELEMENTS

We establish sufficient conditions for alternativeness of tails of branched continued fractions with real partial numerators and denominators equal to one. We prove criteria of convergence for such branched continued fractions and some sequences of their approximants, by means of the method of fundamental inequalities. We found the estimations of approximation errors for fraction approximants. Also we construct and investigate the multidimensional sets of absolute stability to perturbations for such class of branched continued fractions. Besides, we establish estimates errors of approximants, which appear as a result of perturbation of their elements.

Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
01.04.14