УДК 512.64

В. П. Щедрик

НАЙБІЛЬШІ СПІЛЬНІ ДІЛЬНИКИ ТА НАЙМЕНШІ СПІЛЬНІ КРАТНІ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМИ ОБЛАСТЯМИ БЕЗУ

Для матриць над комутативними областями Безу досліджено властивості рівності Безу: $AU + BV = D$, де D – лівий найбільший спільний дільник матриць A та B. Описано множину всіх пар U, V та встановлено взаємозв'язок між ануляторами матриць V та D. Запропоновано новий метод знаходження найменшого спільного правого кратного матриць A та B.

Поняття найбільшого спільного дільника (н.с.д.) є одним із основних інструментів дослідження властивостей елементів як комутативних, так і некомутативних кілець. Широким є і спектр його застосування до розв'язання прикладних задач, зокрема, до пошуку розв'язків систем односторонніх матричних рівнянь над полями. Розглянемо систему односторонніх матричних рівнянь

$$\begin{cases} X^m A_m + X^{m-1} A_{m-1} + \cdots + A_0 = 0, \\ X^k B_k + X^{k-1} B_{k-1} + \cdots + B_0 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де всі A_i та B_j – $n \times n$ матриці над полем. Згідно з узагальненою теоремою Безу матриця K є розв'язком системи (1) тоді і тільки тоді, коли матриця $Ix - K$, де I – одинична матриця, є лівим спільним дільником поліноміальних матриць $A(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_0$ та $B(x) = B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + {} + \cdots + B_0$. Тобто

$$A(x) = (Ix - K) A_1(x), \quad B(x) = (Ix - K) B_1(x).$$

На підставі результатів праці [6] матриці $A(x)$, $B(x)$ мають лівий н.с.д. $D(x)$. Тому $Ix - K$ також є лівим дільником матриці $D(x)$. Це означає, що пошук розв'язків системи (1) можна звести до пошуку лівих унітальних дільників першого степеня матриці $D(x)$. Отже, для розв'язку системи (1) можна використати такий алгоритм.

1. Для поліноміальних матриць $A(x)$ та $B(x)$ знаходимо їхній лівий н.с.д. $D(x)$. Для цього можна застосувати методи, запропоновані раніше [3, 6].

2. Поліноміальну матрицю $D(x)$ записуємо у вигляді $D(x) = (Ix - K) D_1(x)$. Для цього можна скористатись результатами праць [1, 4, 7].

3. Матриця K буде шуканим розв'язком системи рівнянь (1).

Очевидно, що достатньою умовою несумісності системи (1) є те, що $D(x) = I$. Однак невиконання цієї умови не гарантує її сумісності. Для цього потрібні додаткові дослідження матриці $D(x)$. Вже з цього конкретного прикладу стає зрозумілою необхідність вивчення н.с.д. як поліноміальних матриць, так і матриць над ширшими класами кілець.

Мета цієї статті – дослідити властивості н.с.д. матриць, а також тісно пов'язаного із ним поняттям найменшого спільного кратного (н.с.к.). Властивості н.с.д. та н.с.к. достатньо ґрунтовно вивчено для евклідових кілець та кілець головних ідеалів. Проте для кілець матриць такі дослідження лише фрагментарні.

Під правим (лівим) кільцем Безу R розумітимемо кільце, в якому кожний правий (лівий) ідеал є скінченно породженим. Це рівносильно тому, що для кожної пари елементів a, b із R існують такі u, v (u_1, v_1) із R, що

$$au + bv = d, \quad (u_1 a + v_1 bv = \Delta), \tag{2}$$

причому

$$a = da_1, \quad b = db_1 \qquad (a = a_2\Delta, \quad b = b_2\Delta).$$

Співвідношення (2) називатимемо рівністю Безу. Якщо кільце R є одночасно правим і лівим кільцем Безу, то його просто називатимемо кільцем Безу. З виписаних умов випливає, що елемент d (Δ) є лівим (правим) н.с.д. елементів a, b. Тобто із того, що

$$a = ma'_1, \quad b = mb'_1 \qquad (a = a'_2 n, \quad b = b'_2 n)$$

маємо $d = md_1$ $(\Delta = \Delta_1 n)$. З теорем 3 із [8] та 3.8 із [5] випливає, що лівий (правий) н.с.д. елементів правого (лівого) кільця Безу визначений однозначно з точністю до правої (лівої) асоційовності. Тобто кожний лівий (правий) н.с.д. відрізняється один від одного оборотним множником справа (зліва).

Нехай R − комутативна область Безу і $M_n(R)$ − кільце $n \times n$ матриць над R. Розглянемо матрицю $\| A \quad B \|$, де $A, B \in M_n(R)$. Відомо [6], що для неї існує така оборотна $2n \times 2n$ матриця $\begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix}$, що

$$\| A \quad B \| \begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix} = \| D \quad \mathbf{0} \|.$$

Звідси випливає, що $M_n(R)$ є правим кільцем Безу. При цьому матриця D є лівим н.с.д. матриць A та B (у позначеннях $(A, B)_l$).

Розглянувши матрицю $\begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}$, аналогічно покажемо, що $M_n(R)$ є лівим кільцем Безу. Таким чином, $M_n(R)$ є кільцем Безу.

Нехай a, b − елементи із R. Для них існують такі $u, v \in R$, що $au + bv = d$, де $d = (a, b)$ − н.с.д. елементів a, b. При цьому стовпець $\begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix}$ доповнюється до оборотної матриці: $\begin{Vmatrix} u & -\frac{b}{d} \\ v & \frac{a}{d} \end{Vmatrix}$. Для кілець Безу таке твердження хибне.

Приклад 1. Нехай

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

де $\alpha u + \beta v = 1$. Тоді матриця

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} v & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

є лівим н.с.д. матриць A, B, проте матриця

$$\left\| \begin{array}{cc} u & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline v & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|$$

не доповнюється до оборотної матриці четвертого порядку.

Говоритимемо, що пара U, V зводить матриці A, B до $(A, B)_l$, якщо

$$AU + BV = (A, B)_l.$$

Множину всіх таких пар позначимо через $\mathbf{U}^r_{A,B}$.

Якщо $a, b \in R$ і $au + bv = (a, b)$, то будь-яка інша пара u_1, v_1, таких, що
$$au_1 + bv_1 = (a, b),$$
має вигляд $u_1 = u + br$, $v_1 = v - ar$, де $r \in R$. Тобто $\mathbf{U}^r_{a,b} = \{u + br,\ v - ar\}$, де $r \in R$.

Наступний результат стосується опису множини $\mathbf{U}^r_{A,B}$.

Позначимо через $Ann^r(D)$ множину правих ануляторів матриці D:
$$Ann^r(D) = \{Q \in M_n(R) \mid DQ = \mathbf{0}\}.$$

Теорема 1. *Нехай*
$$\| A \quad B \| \begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Vmatrix} = \| D \quad \mathbf{0} \|,$$
де $\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Vmatrix}$ – $2n \times 2n$ *оборотна матриця. Множина* $\mathbf{U}^r_{A,B}$ *складається з усіх пар вигляду*
$$K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P, \;\; K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P,$$
де Q *пробігає множину* $Ann^r(D)$, *а матриця* P – *кільце* $M_n(R)$.

Д о в е д е н н я . Позначимо через $\mathbf{V}^r_{A,B}$ множину
$$\{K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P,\ K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P\},$$
де Q пробігає множину $Ann^r(D)$, а матриця P – кільце $M_n(R)$. Тоді
$$A(K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P) + B(K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P) =$$
$$= (AK_{11} + BK_{21}) + (AK_{11} + BK_{21})Q + (AK_{12} + BK_{22})P = D + DQ + \mathbf{0}P = D.$$
Отже, $\mathbf{V}^r_{A,B} \subseteq \mathbf{U}^r_{A,B}$.

Нехай $U, V \in \mathbf{U}^r_{A,B}$ і
$$\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{Vmatrix}.$$
Тоді
$$\| A \quad B \| = \| D \quad \mathbf{0} \| \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{Vmatrix}.$$
Таким чином, $A = DL_{11}$, $B = DL_{12}$. Розглянемо добуток
$$\begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U & K_{12} \\ V & K_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} T & \mathbf{0} \\ P & I \end{Vmatrix}. \tag{3}$$
Отже,
$$T = L_{11}U + L_{12}V,\ P = L_{21}U + L_{22}V.$$
Тоді
$$DT = (DL_{11})U + (DL_{12})V = AU + BV = D.$$
Тобто
$$DT = D \Rightarrow D(T - I) = \mathbf{0}.$$
Це означає, що $T - I = Q \in Ann^r(D)$. Отже, $T = I + Q$. З рівності (3) випливає, що
$$\begin{Vmatrix} U & K_{12} \\ V & K_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I + Q & \mathbf{0} \\ P & I \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P & K_{12} \\ K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P & K_{22} \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$U = K_{11} + K_{11}Q + K_{12}P,\ V = K_{21} + K_{21}Q + K_{22}P.$$

Таким чином, $\mathbf{U}^r_{A,B} \subseteq \mathbf{V}^r_{A,B}$. Тому $\mathbf{U}^r_{A,B} = \mathbf{V}^r_{A,B}$.

Теорема 2. *Нехай* $A, B \in M_n(R)$. *Тоді існує така оборотна* $2n \times 2n$ *матриця* $\begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix}$, *що*

$$\| A \quad B \| \begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix} = \| D \quad \mathbf{0} \|,$$

причому

$$Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V). \tag{4}$$

Доведення. Якщо матриця $D = (A, B)_l$ є неособливою, то $Ann^r(D) = \{\mathbf{0}\}$ і очевидно, що включення (4) є правильним.

Нехай $(A, B)_l$ – особлива матриця. Це означає, що і матриці A, B особливі. Нехай $\operatorname{rang} B = k < n$. (З означенням рангу матриці можна ознайомитись у праці [2].) Тоді існують такі оборотні матриці P_B, Q_B, що

$$P_B B Q_B = \begin{Vmatrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

де B_{11} – $k \times k$ неособлива матриця.

Нехай $\operatorname{rang} A = r < n$. Отже, і $\operatorname{rang} P_B A = r$. Тоді існує така оборотна матриця Q_A, що

$$(P_B A) Q_A = \begin{Vmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

де

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{Vmatrix} = r$$

і A_{11} – $k \times r$ матриця.

Нехай $\operatorname{rang} A_{21} = t \le r$. Тоді існує така оборотна матриця P_{21}, що

$$P_{21} A_{21} = \begin{Vmatrix} A'_{21} \\ \mathbf{0} \end{Vmatrix},$$

де A'_{21} – $t \times r$ матриця і $\operatorname{rang} A'_{21} = t$. Тоді

$$\| A \quad B \| = P_B^{-1} \begin{Vmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{21}^{-1} \end{Vmatrix} \underbrace{\left\| \begin{array}{cc:cc} A_{11} & \mathbf{0} & B_{11} & \mathbf{0} \\ A'_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|}_{F} \begin{Vmatrix} Q_A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Оскільки матриця B_{11} неособлива і н.с.д. мінорів максимального t-го порядку матриці A'_{21} відмінний від нуля, то

$$\operatorname{rang} \| A \quad B \| = \operatorname{rang} B_{11} + \operatorname{rang} A'_{21}.$$

Тобто

$$\operatorname{rang} \| A \quad B \| = k + t.$$

Доповнимо матриці $\begin{Vmatrix} A_{11} \\ A'_{21} \end{Vmatrix}$, B_{11} нульовими блоками до матриць порядку $k + t$ вигляду

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A'_{21} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = A', \quad \left\| \begin{matrix} B_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = B'.$$

Нехай $(A', B')_l = D'$. Оскільки

$$\operatorname{rang} \| A' \quad B' \| = \operatorname{rang} \| A \quad B \| = k + t,$$

то матриця D' є неособливою. Тоді існує така оборотна матриця $\left\| \begin{matrix} U' & M' \\ V' & N' \end{matrix} \right\|$, що

$$\| A' \quad B' \| \left\| \begin{matrix} U' & M' \\ V' & N' \end{matrix} \right\| = \| D' \quad \mathbf{0} \|.$$

Запишемо матрицю F у вигляді

$$F = \left\| \begin{array}{cc|cc} A' & \mathbf{0} & B' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Тоді

$$F \underbrace{\left\| \begin{array}{cc|cc} U' & \mathbf{0} & M' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline V' & \mathbf{0} & N' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{array} \right\|}_{G} = \left\| \begin{array}{cc|cc} D' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|,$$

де I_{n-k-t} – одинична матриця порядку $n-k-t$. Очевидно, що матриця G є оборотною. Позначимо:

$$P = P_B^{-1} \left\| \begin{matrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{21}^{-1} \end{matrix} \right\|.$$

Тоді

$$\| A \quad B \| \left(\left\| \begin{matrix} Q_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B \end{matrix} \right\| \left\| \begin{array}{cc|cc} U' & \mathbf{0} & M' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline V' & \mathbf{0} & N' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{array} \right\| \right) = P \left\| \begin{array}{cc|cc} D' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\|. \quad (5)$$

Отже,

$$(A, B)_l = P \left\| \begin{matrix} D' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| = D.$$

Оскільки матриця D' неособлива, то $Ann^r(D)$ складається з усіх матриць вигляду $\left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ T \end{matrix} \right\|$, де T – $(n-k-t) \times n$ матриця.

Із рівності (5) випливає, що

$$A \underbrace{\left(Q_A \left\| \begin{matrix} U' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-k-t} \end{matrix} \right\| \right)}_{U} + B \underbrace{\left(Q_B \left\| \begin{matrix} V' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix} \right\| \right)}_{V} = D.$$

Якщо матриця V' неособлива, то з вигляду матриці V отримуємо:

$$Ann^r(D) = Ann^r(V).$$

Якщо ж вона особлива, то

$$Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V).$$

Доведення завершене.

Якщо $M = AP = BQ$, то матрицю M називатимемо правим спільним кратним матриць A та B. Якщо ж матриця M є лівим дільником кожного правого спільного кратного матриць A та B, то називатимемо її **правим н.с.к.** матриць A та B (у позначеннях $[A, B]_r$). Як і у випадку лівого н.с.д., праве н.с.к. визначене однозначно з точністю до правої асоційовності. Застосуємо отриманий результат для знаходження лівого н.с.д. та правого н.с.к. матриць.

Теорема 3. *Нехай* $A, B \in M_n(R)$. *Тоді матриця* $\begin{Vmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix}$ *асоційована справа до матриці* $\begin{Vmatrix} (A, B)_l & \mathbf{0} \\ * & [A, B]_r \end{Vmatrix}$.

Д о в е д е н н я . Нехай $(A, B)_l = D$. На підставі теореми 2 існує така оборотна матриця $\begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix}$, що

$$\| A \quad B \| \begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix} = \| D \quad \mathbf{0} \|, \tag{6}$$

причому $Ann^r(D) \subseteq Ann^r(V)$. З рівності (6) випливає, що матриця $S = BN = -AM$ є правим спільним кратним матриць A, B. Нехай $S_1 = AA_1 = BB_1$ − будь-яке інше праве спільне кратне матриць A, B. Покажемо, що S_1 є лівим дільником матриці S.

Розглянемо пару матриць $U - A_1, V + B_1$. Тоді

$$A(U - A_1) + B(V + B_1) = (AU + BV) + (BB_1 - AA_1) = D.$$

Це означає, що $U - A_1, V + B_1 \in \mathbf{U}^r_{A,B}$. Згідно з теоремою 1 існують такі $Q \in Ann^r(D)$ і $P \in M_n(R)$, що

$$U - A_1 = U + UQ + MP, \qquad V + B_1 = V + VQ + NP. \tag{7}$$

Оскільки $VQ = \mathbf{0}$, то з рівності (7) отримуємо, що $B_1 = NP$. Тоді

$$S_1 = BB_1 = B(NP) = (BN)P = SP.$$

Отже, $S = BN = [A, B]_r$. Із рівності (6) одержимо:

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D & \mathbf{0} \\ BV & BN \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (A, B)_l & \mathbf{0} \\ BV & [A, B]_r \end{Vmatrix},$$

що і потрібно довести.

Таким чином, теорема 3 вказує на взаємозв'язок між матрицями A, B та $(A, B)_l$, $[A, B]_r$. Окрім того, з методу її доведення легко отримати спосіб побудови правого н.с.к. матриць. Інші методи знаходження такої матриці можна почерпнути у працях Б. Стюарта [8] та Р. Томпсона [9].

Наслідок 1. *Добуток ненульових діагональних елементів правої форми Ерміта матриць* A, B *збігається з добутком ненульових діагональних елементів правих форм Ерміта матриць* $(A, B)_l$, $[A, B]_r$.

Д о в е д е н н я випливає зі самого методу побудови нормальної форми Ерміта.

Наслідок 2.

$$\det(AB) = \det(A, B)_l \det[A, B]_r.$$

Цей наслідок узагальнює результат Р. Томпсона [9], отриманий для неособливих матриць над комутативними областями головних ідеалів.

На завершення зауважимо, що з рівності

$$\| A \quad B \| \begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix} = \| D \quad \mathbf{0} \|,$$

де матриця $\begin{Vmatrix} U & M \\ V & N \end{Vmatrix}$ є оборотною, не випливає, що матриця $S = BN$ є правим н.с.к. A, B.

Приклад 2. Нехай

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

де $\alpha u + \beta v = 1$. Тоді

$$\left\| \begin{array}{cc:cc} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc:cc} u & -\beta & -\beta r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline v & \alpha & \alpha r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

де r може набувати довільне значення з кільця R. У цьому випадку матриця

$$S = BN = \begin{Vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha\beta r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

буде правим н.с.к. A, B тоді і тільки тоді, коли r є оборотним елементом кільця R.

1. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.
2. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975. – 422 с.
3. *Романів А. М., Щедрик В. П.* Найбільший спільний дільник матриць, одна з яких має один відмінний від одиниці інваріантний множник // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 425–430.
4. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Academic Press, 1982. – 410 p.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
6. *MacDuffee C. C.* Matrices with elements in a principal ideal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**. – P. 564–584.
7. *Romaniv A. M.* Monic divisors of polynomial matrices over infinite field // Algebra and Discrete Mathematics. – 2011. – **12**, № 2. – P. 94–101.
8. *Stewart B. M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**, № 6. – P. 587–591.
9. *Thompson R. C.* Left multiples and right divisors of integral matrices // Linear Multilinear Algebra. – 1986. – **19**, № 3. – P. 287–295.

НАИБОЛЬШИЕ ОБЩИЕ ДЕЛИТЕЛИ И НАИМЕНЬШИЕ ОБЩИЕ КРАТНЫЕ МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНЫМИ ОБЛАСТЯМИ БЕЗУ

Для матриц над коммутативными областями Безу исследованы свойства равенства Безу: $AU + BV = D$, где D – левый наибольший общий делитель матриц A и B. Описано множество всех пар U, V и установлена взаимосвязь между аннуляторами матриц V и D. Предложен новый метод нахождения наименьшего общего правого кратного матриц A и B.

THE GREATEST COMMON DIVISORS AND LEAST COMMON MULTIPLES OF MATRICES OVER COMMUTATIVE BEZOUT DOMAINS

We investigate the Bezout identity for matrices: $AU + BV = D$, where D is the left g.c.d. of matrices A and B. The set of all pairs U, V is described and it is established a relationship between the annihilators of matrices V and D. As a consequence we obtain a new method for finding the least common multiple of matrices A, B.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
06.09.14