

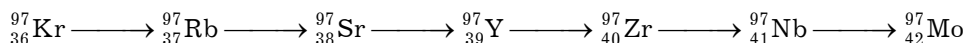
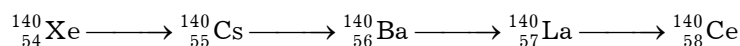
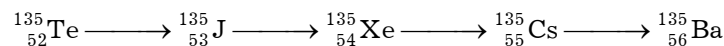
## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕВЗАЄМОДІЙНИХ ПОТОКІВ ДЛЯ ОПИСУ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ ДВОМА ШЛЯХАМИ ЗА КАСКАДНОГО РОЗПАДУ ЧАСТИНОК

*Досліджено дифузію домішок за їх каскадного розпаду в тілі з двома шляхами міграції на основі математичної моделі невзаємодійних потоків. Для конкретної схеми розпаду сформульовані зв'язані крайові задачі дифузії каскадного типу. Розв'язки задач отримані з використанням функцій Гріна. Створено програмні модулі та числово проаналізовано функції концентрацій розпадних частинок, що мігрують двома шляхами в шарі.*

Основними забруднювачами ґрунтів є промисловість (наприклад, радіоактивні відходи, промислові стічні води, промислові викиди в атмосферу), транспорт (залишки змащувальних масел та інших нафтопродуктів, втрати хімічних речовин під час транспортування), сільське господарство (мінеральні добрива, біоциди, отрутохімікати, пестициди, а також стічні води і тверді залишки тваринницьких комплексів) [7, 12], людське житло (димові гази, побутові стічні води, екзогенні хімічні речовини, що використовують у побуті) [7, 8]. Прогнозування поширення розпадних домішкових субстанцій у ґрунтах та оцінка захищеності ґрунтових вод від поверхневих техногенних забруднень базується на певних модельних уявленнях про їх локальний і просторовий перерозподіли у приповерхневих шарах Землі [3]. Перенос частинок домішкових субстанцій особливо інтенсивний у зволжених приповерхневих шарах, коли пори середовища практично повністю насичені водою [9]. Тоді домішкові частинки знаходяться в різних фізичних станах, перебуваючи в області гравітаційно рухомого водного порового розчину, адсорбції і зв'язних зі скелетом шарів води та області самого скелету. У цих станах частинки мають різну рухливість. У результаті просторове перенесення техногенних субстанцій відбувається декількома шляхами і супроводжується локальними переходами з одного шляху дифузії на інший (процеси типу сорбції-десорбції). Важливою особливістю процесів гетеродифузії техногенних субстанцій є їх натуральний розпад (деградація), який протікає з однаковою інтенсивністю у кожному зі згаданих станів.

Нижче за моделлю невзаємодійних потоків [14] сформульовано крайові задачі дифузії двома шляхами частинок за їх каскадного розпаду, в яких розв'язок задачі на одному етапі є джерелом на наступному. При цьому знехтувано процесами типу сорбції-десорбції.

**Об'єкт дослідження. Формулювання задачі.** Нехай частинки одного хімічного сорту, які розпадаються, мігрують у тілі з двома шляхами міграції (дрібнодисперсне середовище, монокристали тощо) [1, 2, 4, 16, 17]. При цьому речовини, які утворилися внаслідок розпаду, також можуть розпадатися. Як приклад можна навести радіонукліди [6] з їх радіоактивним розпадом



або різні хімічні сполуки (пестициди, нітрати, нітрити тощо), які розпадаються внаслідок хімічних реакцій [6].

Масоперенесення речовини двома шляхами з різними коефіцієнтами дифузії за відсутності масообміну між ними, тобто без урахування процесів

типу сорбції-десорбції, описує математична модель не взаємодійних потоків, яка містить сукупність двох незв'язаних рівнянь дифузії [14]. Для цього випадку схема каскадного розпаду мігрувальних речовин  $\mathbf{K}_j^{(i)}$  подана на рис. 1, де частинки речовини  $\mathbf{K}_j^{(N)}$  – нерозпадні (тут  $i$  – номер етапу розпаду,  $j$  – шлях міграції).

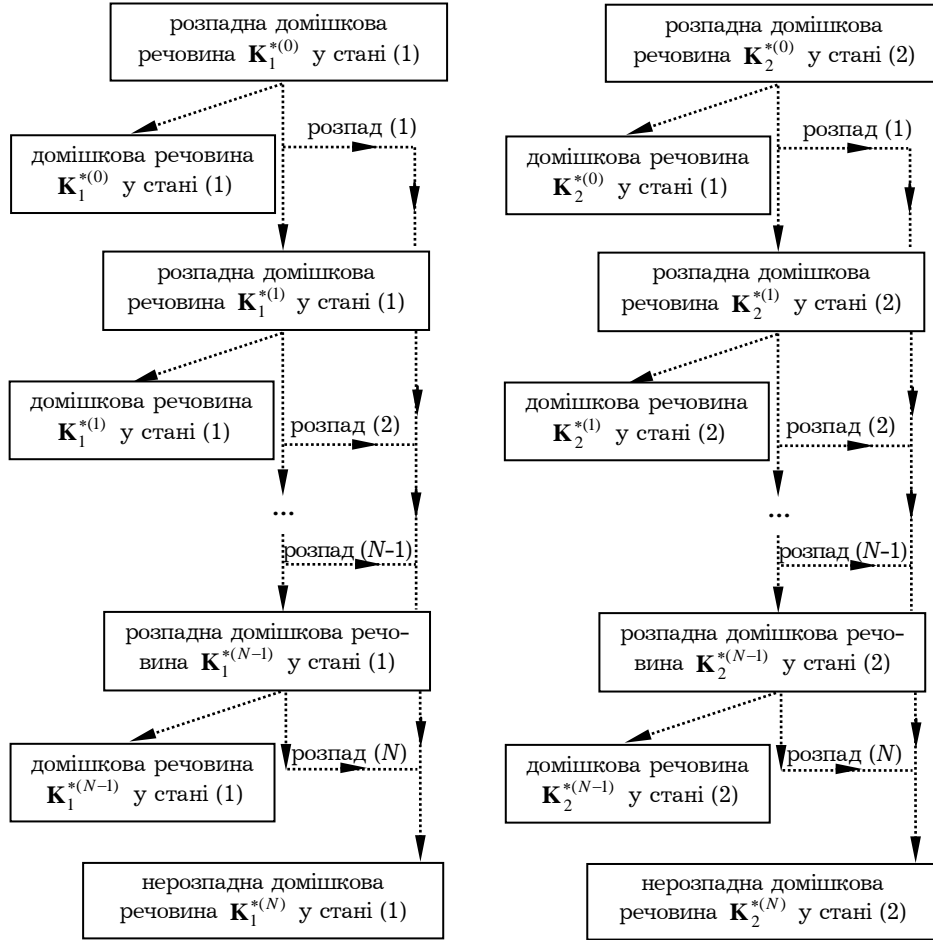


Рис. 1. Схема розпаду дифундувальної домішкової речовини за моделлю не взаємодійних потоків.

Для одновимірного за просторовою координатою випадку у безрозмірних змінних  $\tau = \bar{k}_2^{(0)} t$ ;  $\xi^{(\alpha)} = (\bar{k}_2^{(0)} / \bar{D}_{11}^{(0)})^{1/2} x^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = \bar{1}, \bar{3}$ , де  $t$  – час,  $x^{(\alpha)}$  – просторові декартові координати, маємо таку послідовність рівнянь [15]:

для кроку розпаду  $i = 0$

$$\frac{\partial c_1^{(0)}}{\partial \tau} = d_1^{(0)} \frac{\partial^2 c_1^{(0)}}{\partial \xi^2} - a_1^{(0)} c_1^{(0)}, \quad \frac{\partial c_2^{(0)}}{\partial \tau} = d_2^{(0)} \frac{\partial^2 c_2^{(0)}}{\partial \xi^2} - a_2^{(0)} c_2^{(0)}, \quad (1)$$

для кроку розпаду  $i = \bar{1}, \bar{N} - 1$

$$\frac{\partial c_1^{(i)}}{\partial \tau} = d_1^{(i)} \frac{\partial^2 c_1^{(i)}}{\partial \xi^2} + a_{\lambda 1}^{(i-1)} c_1^{(i-1)} - a_1^{(i)} c_1^{(i)}, \quad \frac{\partial c_2^{(i)}}{\partial \tau} = d_2^{(i)} \frac{\partial^2 c_2^{(i)}}{\partial \xi^2} + a_{\lambda 2}^{(i-1)} c_2^{(i-1)} - a_2^{(i)} c_2^{(i)}, \quad (2)$$

для кроку розпаду  $i = N$

$$\frac{\partial c_1^{(N)}}{\partial \tau} = d_1^{(N)} \frac{\partial^2 c_1^{(N)}}{\partial \xi^2} + \sum_{i=0}^{N-1} a_{\lambda_1}^{(iN)} c_1^{(i)}, \quad \frac{\partial c_2^{(N)}}{\partial \tau} = d_2^{(N)} \frac{\partial^2 c_2^{(N)}}{\partial \xi^2} + \sum_{i=0}^{N-1} a_{\lambda_2}^{(iN)} c_2^{(i)}, \quad (3)$$

де  $c_j^{(i)}$  – концентрація домішкових частинок  $\mathbf{K}_j^{(i)}$  на  $j$ -му шляху міграції для  $i$ -го кроку розпаду ( $i = \overline{0, N}$ ),  $d_j^{(i)}$  – коефіцієнт дифузії речовини  $\mathbf{K}_j^{(i)}$  ( $i = \overline{0, N}$ ) на  $i$ -му кроці розпаду та  $j$ -му шляху дифузії,  $j = \overline{1, 2}$ ,  $a_{\lambda_j}^{(i-1)}$  – коефіцієнт інтенсивності розпаду речовини  $\mathbf{K}_j^{(i-1)}$  ( $i = \overline{1, N}$ ),  $a_{\lambda_1}^{(iN)}$  – коефіцієнт, який визначає частку нерозпадної (або нешкідливої) речовини, що утворилася внаслідок розпаду на  $i$ -му кроці  $\mathbf{K}_j^{(i)}$  ( $i = \overline{0, N-1}$ ,  $j = 1; 2$ ) за таких початкових

$$c_1^{(i)}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad c_2^{(i)}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad i = \overline{0; N} \quad (4)$$

і граничних умов

$$c_1^{(0)}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = \alpha c_0, \quad c_2^{(0)}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = (1 - \alpha)c_0; \quad (5)$$

$$c_1^{(i)}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = c_2^{(i)}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 0, \quad i = \overline{1; N}. \quad (6)$$

Тут  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) – параметр, який визначає частину домішки, що з поверхні тіла потрапила на швидкий шлях дифузії (стан 1), тобто  $d_1^{(0)} > d_2^{(0)}$ .

**Побудова розв'язків крайових задач каскадного типу.** Рівняння дифузії розпадної речовини (1)–(3) і крайові умови (4)–(6) є незв'язаними. Тому розв'язок крайової задачі (1), (4), (5) для  $i = 0$ , знайдений з допомогою інтегральних перетворень Лапласа за часом і  $\sin$ -перетворення Фур'є за просторовою координатою [11], можемо подати у вигляді

$$c_j^{(0)}(\xi, \tau) \frac{1}{c_0} = |j - 1 - \alpha| \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} + \frac{a_j^{(0)}}{d_j^{(0)}} \left[ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh } \bar{\eta}_j^{(0)}(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } \bar{\eta}_j^{(0)}\xi_0} \right] - \frac{2}{\xi_0} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{\sin y_k \xi}{y_k^2 + \bar{\eta}_j^{(0)2}} e^{-\beta_{jk}^{(0)}\tau} \right\}, \quad j = \overline{1; 2}, \quad (7)$$

де  $y_k = k\pi/\xi_0$ ,  $\bar{\eta}_j^{(0)} = \sqrt{a_j^{(0)}/d_j^{(0)}}$ ,  $\beta_{jk}^{(0)} = d_j^{(0)}y_k^2 + a_j^{(0)}$ .

Для  $i = 0$  сумарну концентрацію  $c^{(0)}(\xi, \tau) = c_1^{(0)}(\xi, \tau) + c_2^{(0)}(\xi, \tau)$  домішки в тілі, яка мігрує двома шляхами, визначимо так:

$$c^{(0)}(\xi, \tau) \frac{1}{c_0} = A_d^{(0)} \left( 1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) - \alpha \frac{a_1^{(0)}}{d_1^{(0)}} \frac{\text{sh } \bar{\eta}_1^{(0)}(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } \bar{\eta}_1^{(0)}\xi_0} - (1 - \alpha) \frac{a_2^{(0)}}{d_2^{(0)}} \times \times \frac{\text{sh } \bar{\eta}_2^{(0)}(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } \bar{\eta}_2^{(0)}\xi_0} - \frac{2}{\xi_0} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin y_k \xi \left[ \frac{\alpha}{y_k^2 + \bar{\eta}_1^{(0)2}} e^{-\beta_{1k}^{(0)}\tau} + \frac{(1 - \alpha)}{y_k^2 + \bar{\eta}_2^{(0)2}} e^{-\beta_{2k}^{(0)}\tau} \right]. \quad (8)$$

Знайдемо розв'язок крайової задачі (2), (4), (6) для  $i = 1$ . Оскільки рівняння (2) містять функції  $c_j^{(0)}(\xi, \tau)$ , подамо їх у вигляді розкладу в ряд за  $\sin y_k \xi$ :

$$c_j^{(0)}(\xi, \tau) = 2c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sin y_k \xi \left[ \frac{1}{k\pi} - \frac{a_{ef}^{(0)}}{k\pi(d_{ef}^{(0)}y_k^2 + a_{ef}^{(0)})} - \frac{y_k^2 e^{-(d_{ef}^{(0)}y_k^2 + a_{ef}^{(0)})\tau}}{y_k^2 + \bar{\eta}_j^{(0)2}} \right], \quad j = \overline{1; 2}.$$

Застосувавши до отриманої задачі інтегральне перетворення Лапласа і використавши відомі формули для сумування рядів [10], отримуємо вираз для концентрації частинок на кроці  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{c_j^{(1)}(\xi, \tau)}{c_0} = & |j-1-\alpha| a_1^{(1)} \left[ \bar{a}_1 \left\{ \frac{\text{sh } \eta_1^{(0)}(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } \eta_1^{(0)} \xi_0} - \frac{\text{sh } \eta_1^{(1)}(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } \eta_1^{(0)} \xi_0} \right\} - \right. \\ & - \eta_1^{(1)2} \left\{ 1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh } \eta_1^{(1)}(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } \eta_1^{(0)} \xi_0} \right\} - \frac{2}{\xi_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sin y_k \xi \left\{ \left( 1 + \frac{a_1^{(0)}}{\beta_{1k}^{(0)}} \right) \frac{1 - e^{-\beta_{1k}^{(1)} \tau}}{y_k \beta_{1k}^{(1)}} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{y_k}{y_k^2 + \eta_1^{(0)2}} \frac{e^{-\beta_{1k}^{(1)} \tau} - e^{-\beta_{1k}^{(0)} \tau}}{\beta_{1k}^{(0)} - \beta_{1k}^{(1)}} \right\} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\bar{\eta}_j^{(i)} = \sqrt{a_j^{(i)}/d_j^{(i)}}$ ,  $\beta_{jk}^{(i)} = d_j^{(i)} y_k^2 + a_j^{(i)}$ ,  $j = 1; 2$ ,  $i = \overline{0, N}$ ;

$$A_d^{(i)} = 1 + \alpha \frac{a_1^{(i)}}{d_1^{(i)}} + (1 - \alpha) \frac{a_2^{(i)}}{d_2^{(i)}}; \quad \bar{a}_j = \frac{a_j^{(0)}}{2d_j^{(0)} d_j^{(1)} (\eta_j^{(0)2} - \eta_j^{(1)2})}, \quad a_{\lambda_j}^{(iN)} = a_j^{(i)} - a_{\lambda_j}^{(i-1)}.$$

У загальному випадку для  $i = 2, \dots, N-1$  розв'язок крайової задачі (2), (4), (6) подамо через функцію Гріна [13]:

$$c_j^{(i)}(\xi, \tau) = a_{\lambda_j}^{(i-1)} \int_0^{\tau} \int_0^{\xi_0} G_j^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') c_j^{(i-1)}(\xi', \tau') d\xi' d\tau', \quad j = \overline{1; 2}, \quad (10)$$

де  $G_j^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau')$  – функція Гріна задачі (2), (4), (6) при  $i = 2, \dots, N-1$ , тобто є розв'язком відповідної задачі дифузії з точкового джерела на  $i$ -му кроці розпаду за нульових крайових умов:

$$\frac{\partial G_j^{(i)}}{\partial \tau} - d_j^{(i)} \frac{\partial^2 G_j^{(i)}}{\partial \xi^2} + a_j^{(i)} G_j^{(i)} = \delta(\tau - \tau') (\xi - \xi'), \quad j = \overline{1; 2}; \quad (11)$$

$$G_j^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') \Big|_{\tau=0} = G_j^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') \Big|_{\xi=0} = G_j^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') \Big|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (12)$$

Тут  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака [5].

Розв'язок задачі (11), (12) отримали за допомогою інтегральних перетворень у вигляді

$$G_j^{(i)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') = \theta(\tau - \tau') \sum_{n=1}^{\infty} \sin(y_n \xi) \sin(y_n \xi') e^{-(d_j^{(i)} y_n^2 + a_j^{(i)})(\tau - \tau')} \quad (i = 2, \dots, N-1), \quad (13)$$

де  $y_n = n\pi/\xi_0$ .

Отже, знайшовши функцію Гріна за формулою (13) і визначивши концентрацію розпадних домішкових частинок на кроці  $i-1$ , за співвідношенням (10) знайдемо концентрацію розпадної речовини на  $i$ -му кроці.

Для  $i = N$  (нерозпадні або нешкідливі домішки) масоперенесення описує крайова задача (3), (4), (6). Її розв'язок також подамо через відповідну функцію Гріна аналогічно до (10):

$$c_j^{(N)}(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} \int_0^{\xi_0} G^{(N)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') \sum_{i=0}^{N-1} a_{\lambda_j}^{(iN)} c_j^{(i)}(\xi', \tau') d\xi' d\tau', \quad (14)$$

де  $G_j^{(N)}(\xi, \xi'; \tau, \tau')$  – функція Гріна задачі (3), (4), (6), яка задовольняє відповідну крайову з точковим джерелом

$$\frac{\partial G_j^{(N)}}{\partial \tau} - d_j^{(N)} \frac{\partial^2 G_j^{(N)}}{\partial \xi^2} = \delta(\tau - \tau')(\xi - \xi'); \quad (15)$$

$$G_j^{(N)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') \Big|_{\tau=0} = G_j^{(N)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') \Big|_{\xi=0} = G_j^{(N)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') \Big|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (16)$$

Розв'язок крайової задачі (15), (16) має вигляд

$$G_j^{(N)}(\xi, \xi'; \tau, \tau') = \theta(\tau - \tau') \sum_{n=1}^{\infty} \sin(y_n \xi) \sin(y_n \xi') e^{-d_j^{(N)} y_n^2 (\tau - \tau')}. \quad (17)$$

Тепер, послідовно визначивши концентрації  $c_j^{(0)}(\xi, \tau)$ ,  $c_j^{(1)}(\xi, \tau)$ , ...,  $c_j^{(N-1)}(\xi, \tau)$ , за формулою (14) з урахуванням виразу (17) знайдемо концентрацію нерозпадних або нешкідливих домішкових частинок у тілі.

**Схема модуля пакета програми. Числовий аналіз.** На основі формул (6), (7), (11), а також розв'язків крайових задач (8), (9) і (12), (13) розроблений пакет програм для комп'ютерного моделювання процесів дифузії двома шляхами за каскадного розпаду мігрувальних частинок. Схему алгоритму модуля пакета для розрахунку концентрацій розпадних мігрувальних частинок для всіх  $i = 0, N$  наведено на рис. 2.

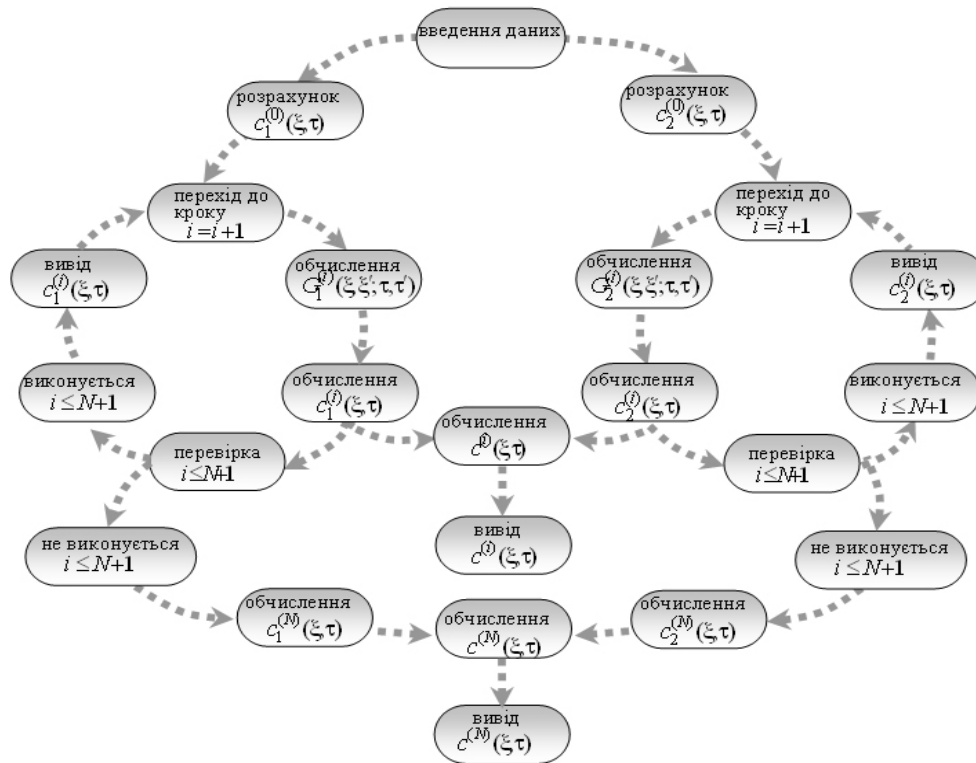


Рис. 2. Схема алгоритму модуля пакета для розрахунку концентрацій домішкових речовин за каскадного розпаду частинок двома шляхами за моделлю не взаємодійних потоків.

На рис. 3 побудовано залежності сумарної концентрації  $c^{(0)}/c_0$  від параметра поверхневого розподілу домішки між станами  $\alpha = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$  (криві 1-5) в моменти часу  $\tau = 0,125$  (рис. 3а) та  $\tau = 10$  (рис. 3б) для  $d_1^{(0)} = 1$ , та  $d_2^{(0)} = 0,125$ . Тут і надалі прийнято, що  $\xi_0 = 10$ .

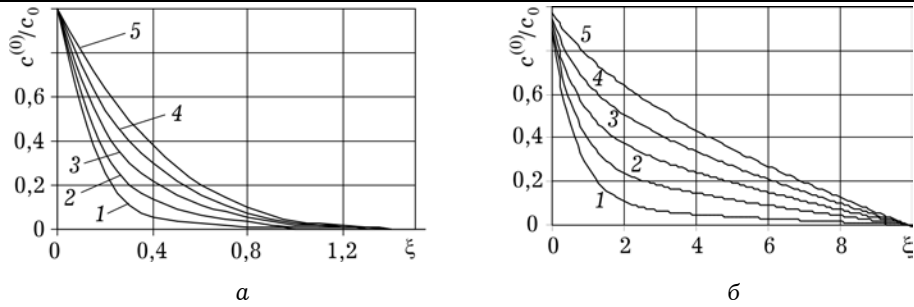


Рис. 3. Розподіли концентрації  $c^{(0)}/c_0$  для різних значень  $\alpha$  в моменти часу  $\tau = 0,125$  (а) та  $10$  (б).

Зазначимо, що функція  $c^{(0)}(\xi, \tau)$  є монотонно спадною для всіх фізично обґрунтованих параметрів задачі. При цьому, що більше розпадної речовини з поверхні потрапило на швидкий шлях дифузії, то більшими є значення сумарної концентрації в тілі (рис. 3) і швидше вона виходить на ustalений режим.

Рис. 4–6 ілюструють розподіли сумарної концентрації в шарі на кроці розпаду  $i = 1$ . На рис. 4а–6а – для  $\tau = 0,125$ , на рис. 4б–6б для  $\tau = 10$  за  $d_1^{(1)} = 10$  та  $d_2^{(1)} = 0,125$ , якщо  $a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = 0,2$ . На рис. 4 зображено розподіли сумарної концентрації  $c^{(1)}/c_0$  залежно від значення параметра  $\alpha = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$  (криві 1–5) для  $a_\lambda^{(0)} = 0,8$ .

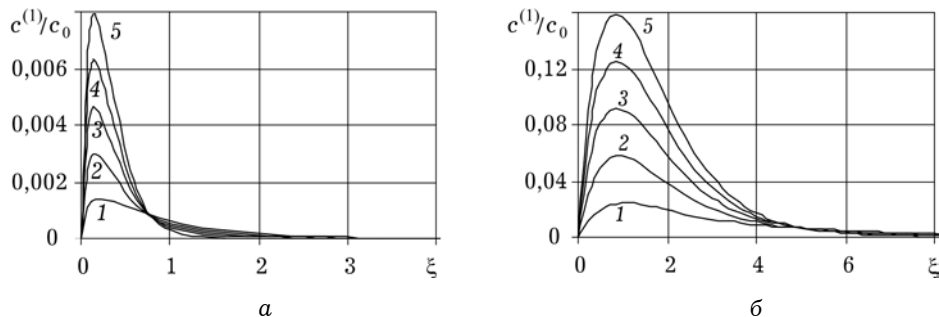


Рис. 4. Розподіли концентрації  $c^{(1)}/c_0$  для різних значень  $\alpha$  в моменти часу  $\tau = 0,125$  (а) та  $10$  (б).

На рис. 5 і 6 побудовані залежності функції  $c^{(1)}/c_0$  від параметра  $a_\lambda^{(0)} = 0,25; 0,4; 0,6; 0,8; 0,95$  (криві 1–5) для  $\alpha = 0,9$  (рис. 5) і  $\alpha = 0,1$  (рис. 6).

Зауважимо, що для сумарної концентрації домішкової речовини  $\mathbf{K}^{(1)}$ , що утворилась внаслідок розпаду речовини  $\mathbf{K}^{(0)}$ , характерне її приповерхневе зростання в околі межі шару, де діє джерело маси речовини  $\mathbf{K}^{(0)}$  (рис. 4–6). Причому з часом максимум концентрації  $c^{(1)}(\xi, \tau)$  підвищується на порядки і дещо зсувається вглиб шару (рис. 4а–6а і 4б–6б). Зі збільшенням частини речовини  $\mathbf{K}^{(0)}$ , яка з поверхні потрапляє на швидкий шлях міграції, тобто з ростом коефіцієнта  $\alpha$ , в декілька разів збільшується функція  $c^{(1)}(\xi, \tau)$  у приповерхневій області (рис. 4). Зміна коефіцієнтів інтенсивності розпаду

$a_j^{(0)}$ ,  $a_j^{(1)}$  впливає тільки на сумарну концентрацію на кроці розпаду  $i = 1$ , не змінюючи її поведінку. Збільшення коефіцієнта  $a_\lambda^{(0)}$ , який визначає частку речовини  $\mathbf{K}^{(0)}$ , яка внаслідок розпаду є джерелом маси для речовини  $\mathbf{K}^{(1)}$ , спричиняє зростання сумарної концентрації на всьому проміжку (рис. 5 і 6). Зазначимо, що зі зменшенням коефіцієнтів дифузії як на швидкому, так і повільному шляхах міграції на етапі розпаду  $i = 1$  знижується концентрація речовини  $\mathbf{K}^{(1)}$  у приповерхневій області і посилюється проникання вглиб шару.

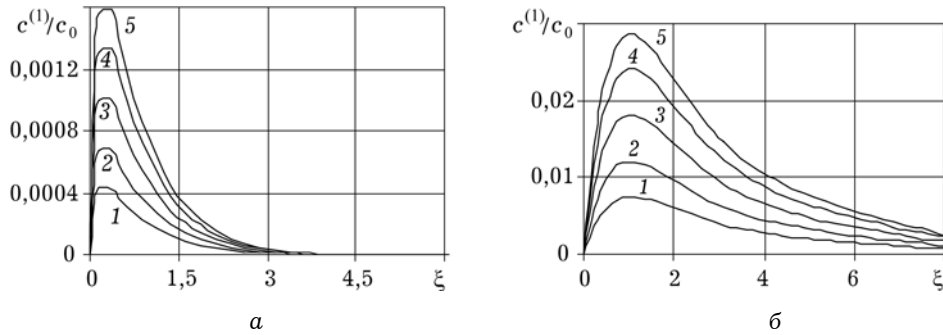


Рис. 5. Розподіли концентрації  $c^{(1)}/c_0$  для різних значень  $a_\lambda^{(0)}$  при  $\alpha = 0,9$  у моменти часу  $\tau = 0,125$  (а) та  $\tau = 10$  (б).

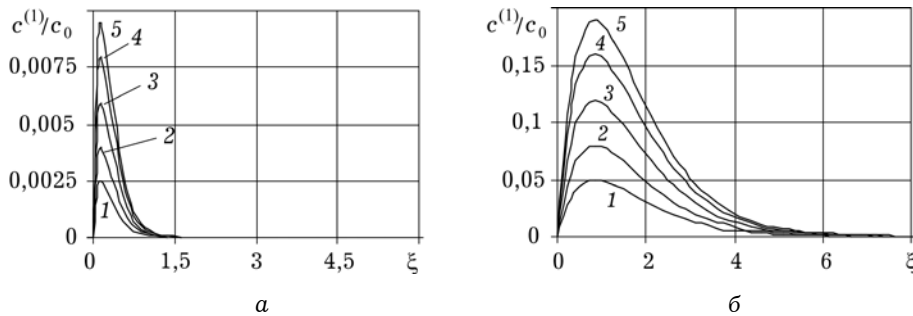


Рис. 6. Розподіли концентрації  $c^{(1)}/c_0$  залежно від значень  $a_\lambda^{(0)}$  при  $\alpha = 0,1$  у моменти часу  $\tau = 0,125$  (а) та  $\tau = 10$  (б).

На рис. 7 зображено 3D-розподіли концентрації за швидкого  $c_1^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  (рис. 7а) та повільного  $c_2^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  (рис. 7б) шляхів міграції, а також їхньої суми  $c^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  (рис. 7в) на площині  $O\xi\tau$  для коефіцієнта інтенсивності розпаду речовини  $a_\lambda^{(0)} = 0,95$  та параметра поверхневого розподілу речовини між станами  $\alpha = 0,9$  при  $d_1^{(1)} = 10$ , та  $d_2^{(1)} = 0,125$ ,  $a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = 0,2$ .

Зауважимо, що поведінка функцій концентрацій на швидкому  $c_1^{(1)}(\xi, \tau)$  і повільному  $c_2^{(1)}(\xi, \tau)$  шляхах міграції на етапі  $i = 1$  відрізняється суттєвим накопиченням речовини  $\mathbf{K}^{(1)}$  в околі поверхні  $\xi = 0$  на повільному шляху

$j = 2$  (рис. 7б) і значним її поширенням вглиб шару швидким шляхом  $j = 1$  (рис. 7а). Причому і концентрації  $c_1^{(1)}(\xi, \tau)$  і  $c_2^{(1)}(\xi, \tau)$  є значимими для сумарної концентрації  $c^{(1)}(\xi, \tau)$  (рис. 7в).

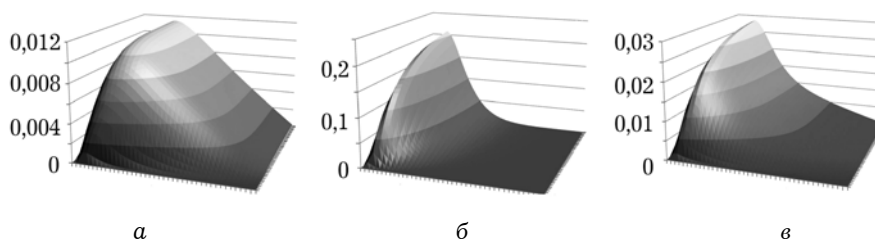


Рис. 7. Поверхні розподілів концентрації  $c_1^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  (а),  $c_2^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  (б) та  $c^{(1)}(\xi, \tau)/c_0$  (в).

На кроці  $i = 2$  і подальших кроках каскадного розпаду функції сумарних концентрацій домішок  $c^{(i)}(\xi, \tau)$  набувають дедалі менші значення. Поведінка цих функцій така сама, як і  $c^{(1)}(\xi, \tau)$ , що проілюстровано на рис. 4–7.

**Висновки.** Таким чином, для опису масоперенесення двома шляхами домішкових речовин за їх каскадного розпаду в межах моделі невзаємодійних потоків сформульовані зв'язані крайові задачі дифузії двома шляхами, в яких концентрація частинок на певному кроці розпаду є джерелом маси розпадної речовини на наступному. Розв'язки відповідних крайових задач каскадного типу побудовані за ітераційною процедурою з використанням функцій Гріна, що дає можливість не тільки виконувати кількісний та якісний аналізи концентрацій розпадних домішок на швидкому і повільному шляхах міграції та їхньої суми, а й знайти їх потоки маси та визначити кількість відповідних речовин, що за певний проміжок часу пройшли через одиницю площі деякої поверхні, наприклад, через нижню межу шару. На основі отриманих формул розроблений пакет програм для комп'ютерного моделювання дифузії двома шляхами за каскадного розпаду домішкових речовин. Встановлено вплив вхідних даних моделі на поведінку і значення концентрацій розпадних частинок на швидкому і повільному шляхах міграції та їхньої суми.

1. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Чапля Е. Я. Деформация электропроводных тел с учетом гетеродиффузии заряженных примесных частиц // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – №5. – С. 8–14.
2. Бурак Я. И., Галапац Б. П., Чапля Е. Я. Исходные уравнения процессов деформации электропроводных твердых растворов с учетом различных путей диффузии примесных частиц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 11. – С. 60–66.
3. Бурак Я. Й., Чапля Є. Я. Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі // Доп. НАН України. – 1993. – № 10. – С. 59–63.
4. Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – К.: Наук. думка, 2006. – 272 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
6. Колобашкин В. М., Рубцов П. М., Ружанский П. А., Сидоренко В. Д. Радиационные характеристики облученного ядерного топлива: Справ. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 384 с.



7. Корсак К. В., Плахотнік О. В. Основи сучасної екології. – К.: Міжрег. Академія управління персоналом, 2004. – 340 с.
8. Мельников Н. Н. Пестициды. Химия, технология и применение. – М.: Химия, 1987. – 712 с.
9. Прохоров В. М. Миграция радиоактивных загрязнений в почвах. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 106 с.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
11. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
12. Ступин Д. Ю. Загрязнение почв и новейшие технологии их восстановления. – М.; Краснодар: Лань, 2009. – 428 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
14. Чапля Е. Я., Чернуха О. Ю. Кінетика переносу домішок при локальній зміні стану частинок (1. Модельні представлення, гетеродифузія двома шляхами). – Львів: 1993. – 44 с. – (Препр. / НАН України. Центр мат. моделювання ШПММ; № 3–93).
15. Чапля Е. Я., Чернуха О. Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
16. Aifantis E. C. Continuum basis for diffusion in regions with multiple diffusivity // J. Appl. Phys. – 1979. – 50, № 3. – P. 1334–1338.
17. Aifantis E. C., Hill J. M. On the theory of diffusion in media with double diffusivity. I. Basic mathematical results // Q. J. Mech. appl. Math. – 1980. – 33, Pt.1. – P. 1–21.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОТОКОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА ДВУМЯ ПУТЯМИ ПРИ КАСКАДНОМ РАСПАДЕ ЧАСТИЦ

*Исследованы процессы диффузии примесей при их каскадном распаде в теле с двумя путями миграции на основе математической модели не взаимодействующих потоков. Для конкретной схемы распада сформулированы связанные краевые задачи диффузии каскадного типа. Решения задач получены с использованием функций Грина. Созданы программные модули и проведен численный анализ функций концентраций распадающихся частиц, мигрирующих двумя путями в слое.*

#### THE MATHEMATICAL MODEL OF NON-INTERACTIVE FLOWS FOR DESCRIPTION OF MASS TRANSFER PROCESSES BY TWO WAYS WITH CASCADE DECAY OF PARTICLES

*The admixture diffusion processes with its cascade decay in a body with two migration ways are investigated on the basis of the mathematical model of non-interactive flows. For the specific scheme of decay, associated initial-boundary value diffusion problems by cascade kind are formulated. Solutions of the problems are obtained with using Green functions. Program modules are designed and numerical analysis of concentrations of decaying particles migrating by two ways in a layer is carried out.*

<sup>1</sup>Центр математичного моделювання  
Ин-ту прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

<sup>2</sup>Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів