

## ВПЛИВ ЛІНІЙНОГО ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА НА ГРАНИЧНУ РІВНОВАГУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНОЮ

*Задачу про граничну рівновагу ослабленої внутрішньою тріщиною замкнутої пружно-пластичної циліндричної оболонки, що знаходиться в пружному лінійному середовищі, зведено до розв'язання системи нелінійних сингулярних інтегральних рівнянь. Побудовано розв'язок отриманої системи сумісно з умовами пластичності тонких оболонок, умовами обмеженості напружень та умовами однозначності переміщень. Досліджено вплив пружного середовища, геометричних та пружних параметрів на розкриття тріщини і розміри пластичних зон.*

**Вступ.** Тонкостінні елементи конструкцій часто взаємодіють зі середовищем, в якому вони знаходяться. Їх моделюють оболонками, на які діє додаткове навантаження як реакція середовища. Якщо це навантаження містить три складові, одна з яких направлена по нормалі до серединної поверхні оболонки, а дві інші – по дотичних до координатних ліній і значення складових пропорціональне відповідним компонентам переміщень серединної поверхні, то таке середовище називають лінійним. Такі розрахункові моделі використовують, наприклад, під час дослідження різних цистерн та трубопроводів, вложений у ґрунт чи рідину, під час з'єднання оболонок пружними тілами тощо. Тому розробка методів розрахунку оболонок, що знаходяться в пружному середовищі та послаблені дефектами типу тріщин і конструктивними розрізами, має велике практичне значення. Досить повний огляд праць про тонкостінні елементи конструкцій, які знаходяться в пружному середовищі, зроблено раніше [1–4]. Але вони стосуються, як правило, оболонок без гострокінцевих концентраторів. Тут досліджено вплив реакції пружного середовища на розкриття берегів тріщини у пружно-пластичній замкнутій циліндричній оболонці.

**Формулювання задачі.** Нехай у такому середовищі знаходиться замкнута пружно-пластична ізотропна циліндрична оболонка завтовшки  $2h$ . Віднесемо її до триортогональної системи координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Нехай оболонка ослаблена поздовжньою внутрішньою тріщиною завдовжки  $2l_0$ , яка розміщена в перерізі  $\beta = 0$  і обмежена лініями, паралельними координатним. Відстань від межі тріщини до зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки  $2d_2$  і  $2d_1$  відповідно. Вважатимемо, що оболонка і береги тріщини завантажені лише симетричними відносно лінії тріщини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують, а її вершини знаходяться в однакових умовах. Обмежимося розглядом досить глибоких тріщин ( $d_3 = d_1 + d_2 \leq 0,6h$ ). Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що в околі тріщини по всій глибині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, згідно з аналогом  $\delta_c$ -моделі [5, 6], зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої і внутрішньої поверхонь оболонки, тобто в області  $x \in ]-x_0; x_0[$ ,  $\gamma \in [-h; -h + 2d_1] \cup [h - 2d_2; h]$ , діють постійні напруження  $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$ , де  $\sigma_B$  та  $\sigma_T$  – границя міцності та поріг текучості матеріалу. В пластичних

зонах на продовженні тріщини по довжині, тобто в областях  $\gamma \in [-h; h]$ ,  $\alpha \in ]-\alpha_p; \alpha_0[$ ;  $\alpha_0[ \mathbf{U} ]\alpha_0$ ;  $\alpha_p[$ ,  $\alpha_p = l_p / R$ ; ( $l_p$  – довжина пластичної зони на продовженні тріщини), діють невідомі нормальне зусилля  $N$  та згинний момент  $M$ , які для ідеально пружно-пластичного матеріалу задовольняють одну з умов пластичності Треска:

у вигляді умови пластичності поверхневого шару

$$\frac{N}{2h\sigma_T} + \frac{3|M|}{2h^2\sigma_T} = 1, \quad (1)$$

або умову пластичного шарніра [7]

$$\left( \frac{N}{2h\sigma_T} \right)^2 + \frac{|M|}{h^2\sigma_T} = 1. \quad (2)$$

А для матеріалу зі зміцненням умови пластичності мають вигляд

$$\begin{aligned} N(x) &= P \left[ (1 - m^*) (|x| - x_0) / (x_1 - x_0) + m^* \right], \\ M(x) &= H \left[ (1 - m^*) (|x| - x_0) / (x_1 - x_0) + m^* \right], \\ x_0 \leq |x| \leq x_1, \quad m^* &= \sigma_B / \sigma_T, \quad x_1 = x_0 + x_p, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $2x_0$  – довжина реальної тріщини, а  $2x_1$  – фіктивної;  $P$ ,  $H$  – невідомі сталі, які повинні задовольняти задану умову пластичності, наприклад, умову пластичного шарніра

$$\left[ P / (2h\sigma_T) \right]^2 + |H| / (h^2\sigma_T^*) = 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \left( \frac{N(x)}{2h\sigma^*(x)} \right)^2 + \frac{|M(x)|}{h^2\sigma^*(x)} &= 1, \quad x_0 \leq |x| \leq x_1, \\ \sigma^*(x) &= (\sigma_T - \sigma_B) (|x| - x_0) / (x_1 - x_0) + \sigma_B. \end{aligned}$$

Таким чином, у межах прийнятої моделі ненаскрізну тріщину завдовжки  $2x_0$  замінюємо наскрізною невідомої довжини  $2x_1$ , на берегах якої виконуються умови

$$\begin{aligned} N_s(x) &= \begin{cases} N_s^{(1)} + N' - N_s^0, & |x| < x_0, \\ N - N_s^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1, \end{cases} \\ M_s(x) &= \begin{cases} M_s^{(1)} + M' - M_s^0, & |x| < x_0, \\ M - M_s^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

де  $N'$ ,  $M'$  – нормальне зусилля та згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під тріщиною і які згідно з прийнятими припущеннями про напруження в цих зонах визначають за формулами

$$N' = 2d_3\sigma^0, \quad M' = 2\sigma^0(h - d_3)(d_2 - d_1),$$

$N_s^{(1)}$ ,  $M_s^{(1)}$  – зусилля та момент, прикладені до берегів тріщини;  $N^0$ ,  $M^0$  – ці ж параметри основного напруженого стану.

#### **Основні співвідношення, ослабленої тріщиною циліндричної оболонки в лінійному пружному середовищі.**

Розглянемо оболонку, навантажену симетрично відносно лінії тріщини. Напружений стан в оболонці без тріщини (основний) вважаємо відомим. Визначення збуреного напруженого стану, викликаного тріщиною, зводимо до розв'язання системи диференціальних рівнянь у переміщеннях:

$$L_{ij}u_j = q_i (\varepsilon_{22}^0, \kappa_{22}^0) - \frac{R^2}{B} k_i u_i \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (5)$$

Тут  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ ,  $k_i$  – коефіцієнти опору пружного середовища переміщенням оболонки; оператори  $L_{ij}$ ,  $q_i$  та функціонали  $\varepsilon_{22}^0$ ,  $\kappa_{22}^0$  описані в монографії [5].

Розв'язавши систему (5) операторним методом [5], визначимо компоненти переміщення серединної поверхні оболонки:

$$\begin{aligned} u_i &= R(L_{2u_i}^{(1)}\varphi_2 + P_{2u_i}^{(1)}\psi_2), \quad L_{2u_i}^{(1)} = L_{2u_i} + L_{2u_i}^*, \quad P_{2u_i}^{(1)} = P_{2u_i} + P_{2u_i}^* \quad (6) \\ L_{2u}^* &= 2\eta_2 / (1 - \nu) \nu \partial_1 \nabla^2 \nabla^2 + \eta_3 \nu / c_1^2 \partial_1^3 - \eta_3 / c_1^2 \partial_1^3 \partial_2^2 + \\ &\quad + 2\nu \eta_2 \eta_3 / (c_1^2 (1 - \nu)) \partial_1, \quad L_{2v}^* = 2\eta_1 / (1 - \nu) \partial_2 \nabla^2 \nabla^2 + \\ &\quad + \eta_3 / c_1^2 \partial_2^3 + \eta_3 (2 + \nu) / c_1^2 \partial_1^2 \partial_2 + 2\eta_1 \eta_3 / (c_1^2 (1 - \nu)) \partial_2, \\ L_{2w}^* &= \{[\eta_1 = 2\eta_2 (1 + \nu)] \partial_1^2 + \eta_2 \partial_2^2 + 2\eta_1 \eta_2 / (1 - \nu)\} / c_1^2, \\ P_{2u}^* &= 2\eta_2 \nu / (1 - \nu) (\nu \partial_1^3 + \partial_1 \partial_2^2), \quad P_{2v}^* = 2\eta_1 / (1 - \nu) (\nu \partial_1^2 \partial_2 + \partial_2^3), \\ P_{2w}^* &= -(\eta_1 + 2\eta_3 / (1 - \nu)) \nu \partial_1^4 - (1 + \nu) / (1 - \nu) [\eta_1 + (2 - \nu) \eta_2] \partial_1^2 \partial_2^2 - \\ &\quad - (\eta_3 + 2\eta_1 / (1 - \nu)) \partial_2^4 - 2\eta_1 \eta_2 / (1 - \nu) (\nu \partial_1^2 + \partial_2^2), \\ \eta_i &= R^2 k_i / B, \quad c_1^2 = h^2 / (3R^2). \end{aligned}$$

Оператори  $L_{u_i}$ ,  $P_{u_i}$  наведені в праці [6], а функції  $\varphi_2$  та  $\psi_2$  визначаємо із рівнянь

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^0, \quad D\psi_2 = R\kappa_{22}^0. \quad (7)$$

Оператор  $D$  має вигляд

$$\begin{aligned} D &= \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + c^{-2} \partial_1^4 + b_1 \partial_1^6 + b_2 \partial_1^4 \partial_2^2 + b_3 \partial_1^2 \partial_2^4 + \\ &\quad + b_4 \partial_2^6 + b_5 \partial_1^4 + b_6 \partial_1^2 \partial_2^2 + b_7 \partial_2^4 + b_8 \partial_1^2 + b_9 \partial_2^2 + b_{10}. \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} b_1 &= \eta_1 + 2\eta_2 / (1 - \nu), \quad b_2 = 2(\eta_1 (2 - \nu) + \eta_2 (5 - \nu)) / 2 / (1 - \nu), \\ b_3 &= \eta_2 + 2\eta_1 / (1 - \nu), \quad b_4 = 2(\eta_2 (2 - \nu) + \eta_1 (5 - \nu)) / 2 / (1 - \nu), \\ b_5 &= \eta_3 / c_1^2, \quad b_6 = 2b_5, \quad b_7 = b_5, \\ b_8 &= [2\eta_2 (1 - \nu + \eta_3) / (1 - \nu) + \eta_1 (1 + \eta_3)] / c_1^2, \quad c^2 = c_1^2 / (1 - \nu^2), \\ b_9 &= [2\eta_1 \eta_3 / (1 - \nu) + \eta_2 (1 + \eta_3)] / c_1^2, \quad b_{10} = 2\eta_1 \eta_2 (1 + \eta_3) / (c_1^2 (1 - \nu)). \end{aligned}$$

Поле несумісних деформацій  $\varepsilon_{22}^0$ ,  $\kappa_{22}^0$  в даному випадку набуде вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^0(\alpha, \beta) &= R^{-1} [\nu(\alpha)] \delta(\beta), \quad \kappa_{22}^0(\alpha, \beta) = -R^{-1} [\theta_2(\alpha)] \delta(\beta), \quad |\alpha| < \alpha_0, \\ \varepsilon_{22}^0(\alpha, \beta) &= \kappa_{22}^0(\alpha, \beta) = 0, \quad |\alpha| \geq \alpha_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Побудувавши  $2\pi$ -періодичний розв'язок рівнянь (8) з урахуванням (9), знаходимо зусилля та моменти в оболонці, викликані невідомою густиною стрибків переміщень  $[\nu]$  та кутів повороту  $[\theta_2]$  на лінії тріщини. Якщо до знайдених зусиль та моментів збуреного напруженого стану додати зусилля та моменти в оболонці без розрізу (основного напруженого стану) і вимагати, щоб сумарні величини задовольняли умови вільних берегів тріщини

$$N_2(\alpha, 0) + N_2^0(\alpha, 0) = 0, \quad M_2(\alpha, 0) + M_2^0(\alpha, 0) = 0, \quad |\alpha| \leq \alpha_0, \quad (10)$$

то для визначення похідних від функцій  $[v]$ ,  $[\theta_2]$  отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\int_{-x_1}^{x_1} \left\{ F_1(u) \left[ \frac{1}{u-s} + K_{11}(\alpha_0(s-u)) \right] + F_2(u) K_{12}(\alpha_0(s-u)) \right\} du = 2\pi f_1^0(s), \quad (11)$$

$$\int_{-x_1}^{x_1} \left\{ F_1(u) K_{21}(\alpha_0(s-u)) + F_2(u) \left[ K_{22}(\alpha_0(s-u)) + \frac{a_{22}}{u-s} \right] \right\} du = 2\pi f_2^0(s).$$

Тут

$$F_1(\alpha) = R^{-1} \frac{d}{d\alpha} [v(\alpha)]; \quad F_2(\alpha) = -c \frac{d}{d\alpha} [\theta_2(\alpha)]; \quad a_{22} = 3 - 2\nu - \nu^2;$$

$$f_1^0(\alpha) = -N_2^0(\alpha)/(Eh); \quad f_2^0(\alpha) = -M_2^0(\alpha)/(RcEh).$$

$$K_{11}(z) = \alpha_0 \left[ 1/z - 1/2 \operatorname{cth} z/2 - K_{11}^0(z) \right]; \quad K_{12}(\alpha) = -\alpha_0 K_{12}^0(z);$$

$$K_{21}(z) = -\alpha_0 K_{21}^0(z); \quad K_{22}(z) = \alpha_0 \left[ a_{22}(1/z - 1/2 \operatorname{cth} z/2) - K_{33}^0(z) \right].$$

Регулярні частини ядер  $K_{11}^0(z)$ ,  $K_{12}^0(z)$ ,  $K_{33}^0(z)$  наведені в праці [5]. Вони отримані під час розв'язування відповідної пружної задачі і виражені через  $a_{jn}, b_{jn}$  уявну та дійсну частини комплексних коренів характеристичного рівняння

$$S_n^8 + (4n^2 - b_1)S_n^6 + (6n^4 + c^{-2} - b_2n^2 + b_5)S_n^4 + (4n^6 - b_3n^4 + b_6n^2 - b_8)S_n^2 + (n^8 - b_4n^6 + b_7n^4 - b_9n^2 + b_{10}) = 0. \quad (12)$$

Зауважимо, що при  $n=0$  корені рівняння (12) мають вигляд

$$S_{1,2} = \pm ia_{10}, \quad S_{3,4} = \pm iC_{10}, \quad S_{5,6,7,8} = \pm b_{20} \pm ia_{20}.$$

Відмітимо, що в системі (11) невідомі межі інтегрування (невідомо довжина пластичної зони  $l_p$ ). Крім цього, в правих частинах невідомі зусилля  $N$  та момент  $M$ . Тому її розв'язуємо сумісно з умовами пластичності (1) чи (2) для ідеально пружно-пластичного матеріалу, або з умовами (3) для матеріалу зі зміцненням. Вимагаємо, щоб виконувалась умова обмеженості напружень у кінці пластичних зон. Для цього достатньо, щоб коефіцієнти інтенсивності зусилля та моменту в кінці фіктивної тріщини дорівнювали нулю, тобто  $K_N(x_1) = K_M(x_1) = 0$ . Алгоритм числового розв'язування таких систем з додатковими умовами подано в праці [6].

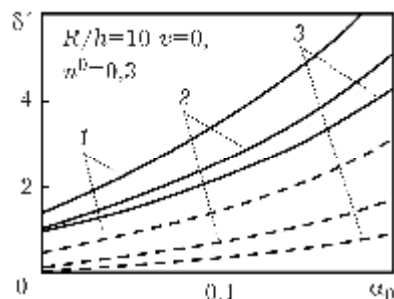
Проінтегрувавши розв'язок системи (11), формулу для знаходження розкриття тріщини в довільній її точці подамо у вигляді

$$\delta(x, \gamma) = [v(\alpha)] + \gamma[\theta_2(\alpha)]. \quad (13)$$

Якщо в формулі (13) замінити  $\delta(x, \gamma)$  на  $\delta_c$ , то отримаємо критеріальне співвідношення, яке пов'язує критичне навантаження, довжину тріщини, геометричні параметри оболонки та коефіцієнти опору лінійного середовища.

**Числовий аналіз задач.** Для оболонки, навантаженої так, що на лінії реальної тріщини  $N_2(\alpha, 0) = N_2^0 = \text{const}$ ,  $M_2^0 = 0$ , виконали числовий аналіз задачі. Розкриття фронту тріщини обчислювали при  $R = 150 \text{ см}$ ,  $2h = 3 \text{ см}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $d_1/h = 0,2$ ,  $d_2/h = 0,4$ ,  $\sigma_T/\sigma_B = 0,8$ ,  $n^0 = N_2^0/(2h\sigma_T)$ . Побудували (див. рисунок) графіки зміни відносного розкриття тріщини у її вершині  $\delta^* = \delta(l_0/R, 0)E(\alpha_0\sigma_T)$  залежно від довжини реальної тріщини  $\alpha_0$  та коефіцієнтів опору пружного середовища переміщенням оболонки  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Криві 1–3 відповідають випадкам  $\eta_2 = \eta_3 = 0$ ;  $\eta_1 = \eta_3 = 0$  та  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ . Суцільні

криві отримали при  $\eta_i = 0,01$ , а штрихові – при  $\eta_i = 0,1$ . Як бачимо, зі збільшенням реакції пружного середовища розкриття тріщини зменшується. Найбільше впливає на розкриття, а отже, на напружений стан оболонки в околі тріщини нормальна складова реакції пружного середовища. Детальніше досліджено розкриття тріщини в ізотропній циліндричній оболонці зі системою поздовжніх тріщин, яка знаходиться в пружному середовищі, для якого  $\eta_2 = \eta_3 = 0$ ,  $\eta_1 \neq 0$ , тобто справедлива гіпотеза Вінклера [1], в праці [6].



Залежність відносного розкриття тріщини від її реальної довжини.

**Висновки.** За врахування реакції лінійного середовища можна збільшити несучу здатність оболонки, тобто зменшити розкриття тріщини та розміри зон пластичності. Вибір умов пластичності мало впливає на міцнісні характеристики оболонки. Беручи до уваги зміцнення, можна зменшити розкриття тріщини та довжину пластичної зони  $Z$ , зі збільшенням глибини тріщини зростають її розкриття та довжини пластичних зон.

1. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
2. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 412 с.
3. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1973. – 228 с.
4. Клейн Г. К. Расчет подземных трубопроводов. – М.: Стройиздат, 1969. – 326 с.
5. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
6. Николишин М. М. Влияние упругой среды на напряженное состояние цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью, ослабленной системой разрезом // Прикл. механика. – 1985. – №3. – С. 56–61.
7. Осадчук В. А., Николишин М. М. Цилиндрическая оболочка с разрезом, находящаяся в упругой среде // Теорет. и прикл. механика. – 1985. – № 16. – С. 87–91.
8. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. – К.: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
9. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1958. – 136 с.
10. Erdogan F. E., Ratwani M. A circumferential crack in a cylindrical shell under tension // Int. J. Fract. Mech. – 1972. – 8, № 1.– P. 27–96.

#### ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ

Упругопластическая задача о предельном равновесии ослабленной внутренней трещиной замкнутой цилиндрической оболочки, находящейся в упругой среде, с помощью аналога  $\delta_c$ -модели сведена к упругой задаче для такой же оболочки со сквозной трещиной неизвестной длины, а последняя – к системе нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Построено численное решение полученной системы совместно с условиями пластичности тонких оболочек, условиями

*ограничений напряжений и условиями однозначности перемещений. Исследовано влияние упругой среды, геометрических и упругих параметров на раскрытие трещины и размеры пластических зон.*

**THE INFLUENCE OF LINEAR ELASTIC MEDIUM ON LIMIT EQUILIBRIUM OF ELASTICO-PLASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH A CRACK**

*The problem on limit equilibrium of a closed elastico-plastic cylindrical shell, weakened by internal crack, the shell being in elastic linear medium, is reduced to solution of a system of nonlinear singular integral equation. The solution of obtained system is constructed jointly with plasticity conditions of thin shells, conditions of stress limitedness, and conditions of displacement uniqueness. The influence of elastic medium, geometric and elastic parameters on the crack opening and the size of plastic zones is studied.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
23.10.18