

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВІДНОВЛЕННЯ ХОДИ ЛЮДИНИ З ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИМ ЕКСОСКЕЛЕТОМ

*Побудовано математичну модель для динамічного аналізу та відновлення ходи людини за допомогою електромеханічного екзоскелета. Опорно-руховий апарат людини змодельовано плоскою системою дев'яти твердих тіл, екзоскелет – парою триланкових шарнірних важелів, закріплених на нижніх кінцівках. Керування екзоскелетом відбувається за допомогою електромеханічних приводів: електрична напруга, яку подано на вхід електродвигунів, забезпечує формування необхідних зусиль у шарнірах системи. За припущення, що рівень м'язових сил в основних суглобах (тазостегновому, колінному, гомілково-стопному) ніг людини є малим і недостатнім для виконання локомоторних функцій, сформульовано задачу пошуку таких керувань екзоскелета, які забезпечать антропоморфність руху біотехнічної системи. Розроблено алгоритм наближеного розв'язання задачі, який ґрунтується на процедурах параметризації узагальнених координат механічної системи сімейством кубічних згладжувальних сплайнів, концепції обернених задач динаміки та числових методах нелінійного програмування.*

**Ключові слова:** хода людини, електромеханічний екзоскелет, математичне моделювання, оптимальне керування, сплайн-апроксимація, параметрична оптимізація, нелінійне програмування.

Екзоскелет – це біомеханічний пристрій, призначений для відновлення локомоторних функцій людини та підсилення дії її м'язів [13, 14]. Схематично він складається із корсета та пари зв'язаних з ним триланкових шарнірних важелів. Корсет закріплюють на корпусі людини, ланки важелів послідовно фіксують (за допомогою спеціальних лямок) на стегні, гомілці та стопі. За принципом керування екзоскелети поділяють на пасивно та активно керовані. Перші з них керуються тільки зусиллями, що генерують м'язи людини. Також такі екзоскелети можуть містити пасивні накопичувачі енергії (наприклад, пружинно-демпферні блоки), які в певні моменти часу підсилюють дію м'язів людини. Активно керовані екзоскелети обладнані пневмо-, гідро-, електромеханічними приводами зі зовнішніми джерелами енергії. Вони забезпечують керований механічний вплив на опорно-руховий апарат людини. На сьогодні у клінічній практиці використовують переважно електромеханічні екзоскелети з автономним живленням [23]. У разі, коли скелетно-м'язова система ніг людини має понижений тонус (наприклад, за паропарезу нижніх кінцівок), забезпечити ходу таких пацієнтів можна лише активно керованими екзоскелетами [13]. Завдяки їм людина може ходити, спираючись на палки для підтримання рівноваги. Також при пошкоджених суглобах такі екзоскелети можуть бути альтернативою хірургічному ендопроезуванню, яке часто протипоказане людям з ослабленим здоров'ям. Ще одне важливе їх застосування – фізична реабілітація людей із наслідками інсульту чи спинальної травми. Ефективним тут є сумісне використання екзоскелетів та електричної стимуляції відповідних м'язів людини, що суттєво розширює можливості рухового відновлення локомоторики людини [1, 32].

На сьогодні у світі відомі такі екзоскелети: Hybrid Assistive Limb /HAL (Cyberdyne, Японія), Ekso GT (Ekso Bionics, США), Indego (Parker Hannifin Corp., США), ReWalk (ARGO Medical Technologies, Ізраїль), EchoAtlet (Полісія), REX (REX Bionics, Нова Зеландія) [14]. Серед вітчизняних аналогів можна виділити пасивний «Апарат зовнішнього розвантаження і фіксації «Екзоскелетон»» [1, 25] та активно керований екзоскелет UniExo [33].

---

✉ m\_demydyuk@ukr.net

Отже, дослідження ходи людини з екзоскелетом є актуальним, а розробка математичних моделей таких біомеханічних систем та побудова на їх основі ефективних алгоритмів для динамічного аналізу та керування є важливими задачами сучасної біомехатроніки.

В останні десятиліття зацікавленість дослідників процесом ходи людини з різноманітними ортопедичними пристроями, зокрема з екзоскелетом, постійно зростає, про що свідчить значна кількість відповідних публікацій. Науковий аналіз такої ходи важливий для розробки сучасних екзоскелетів з високими експлуатаційними характеристиками.

Відмітимо деякі з них, присвячені задачам динаміки та керування рухом екзоскелетів. У серії статей [8–10] запропоновано оригінальний підхід до моделювання динаміки екзоскелета, де його представляють як систему стрижнів змінної довжини. Маса кожного стрижня зосереджена у трьох точках: дві – на кінцях стрижня, третя – між ними. Рухом середньої точки моделюють змінну довжину відповідної ланки екзоскелета. Розроблено ефективний автоматизований метод побудови рівнянь руху такої стрижневої системи, який ґрунтується на використанні спеціальних (узагальнених) матриць коефіцієнтів механічної системи та відповідних рекурентних співвідношень для їх обчислення. Описано два підходи до керування рухом екзоскелета: а) емпіричне визначення моментів сил, що діють у суглобах опорно-рухового апарату людини, та їх реалізація в приводах системи; б) синтез керувань у вигляді відповідних аналітичних функцій, які забезпечують антропоморфний періодичний рух екзоскелета. У праці [11] побудовано математичну модель гідравлічного приводу для активно керованого екзоскелета (нижніх та верхніх кінцівок людини). Екзоскелет керується десятима гідравлічними приводами з електрогідравлічними підсилювачами. Система керування побудована на принципі оберненого зв'язку: сигнали з сенсорів поверхневої електроміограми (закріплених на тілі людини) порівнюють зі сигналами про реальне положення елементів екзоскелета, різницю сигналів підсилюють і подають на вхід відповідного приводу. Описано результати математичного моделювання гідравлічної системи для двох режимів функціонування екзоскелета, що відповідають таким рухам людини, як вставання з напівсидячого положення та хода. Ходу людини з пасивно керованим екзоскелетом розглядали раніше [16], де привід подано у вигляді невагомої пружини з кусково-постійною жорсткістю. Ходу досліджено на проміжку подвійного кроку, на якому враховано всі основні “природні” фази руху стоп. Запропоновано алгоритм розрахунку таких параметрів пружин, які за накладених кінематичних та динамічних обмежень на рух біомеханічної системи мінімізують (у сенсі квадратичного функціоналу) м'язові зусилля в основних суглобах нижніх кінцівок.

Цикл праць [18–22] присвячено розв'язанню різноманітних задач динаміки та синтезу керувань екзоскелета нижніх кінцівок людини. Екзоскелет кріплять на тілі людини за допомогою лямок. Динаміку біомеханічної системи досліджено у сагітальній площині впродовж одного кроку. У праці [18] ходу розглядають у межах одноопорних фаз, для моделювання руху використано плоску систему п'яти твердих тіл: вагомий корпус і пара невагомих дволанкових ніг. Керують системою за допомогою моментів сил, які генеруються м'язами людини у тазостегнових, колінних та гомілковостопних суглобах. Також у певні моменти часу активний елемент екзоскелета може стопорити (або відновляти) відносний рух у колінному шарнірі екзоскелета. Досліджено вплив такої взаємодії на енерговитрати біомеханічної системи: для заданого закону руху таза розв'язана задача пошуку моменту часу активізації екзоскелета за умови мінімізації енерговитрат. Також тут вивчено вплив ударних ефектів (у момент зміни кроків) на динамічні та енергетичні характеристики системи. У статті [19] ходу змодельовано плоскою семиланковою системою твердих тіл: вагомий корпус, стегна та гомілки, невагомий одноланковий стопи. Розглядають режим комфортабельної ходи із урахуванням

як одно-, так й двоопорних фаз руху стоп. Керують екзоскелетом за допомогою чотирьох ідеальних моментних приводів у тазобедренних та колінних шарнірах, у стопах встановлюють крутильні пружини. В аналітичному вигляді синтезовано керування екзоскелетом, які забезпечують його заданий рух. У межах одноопорної ходи та двох варіантів кріплення екзоскелета до тіла людини, зокрема в'язко-пружного та жорсткого, досліджено [20] можливість керування екзоскелетом за допомогою електромеханічних приводів. Розглянуто два варіанти розміщення приводів у шарнірах екзоскелета: а) у колінних; б) одночасно у колінних та тазостегнових. Побудовано закон керування (в аналітичному вигляді), який забезпечує заданий рух колін і таза. Також зроблено висновок, що жорстке кріплення екзоскелета економніше (у сенсі енерговитрат). У праці [21] у межах семиланкової системи твердих тіл (стопа невагомі) та комфортабельного переміщення з одноопорними фазами досліджено взаємодію екзоскелета з опорно-руховим апаратом людини. Тут лямки екзоскелета моделюють невагомими лінійними пружинами та демпферами. Числово вивчено вплив такого кріплення на динамічні характеристики ходи. Виявлено, що раціональним вибором параметрів пружин та демпферів можна суттєво зменшити енерговитрати біомеханічної системи. Розпочаті тут дослідження розвинуто у праці [22], де розглянуто екзоскелет з активно керованими гідравлічними приводами у колінних шарнірах. Побудовано (у вигляді синтезу) керування приводами, які реалізують заданий закон руху колінних шарнірів екзоскелета.

У праці [23] запропоновано модульний підхід до проектування екзоскелетів з електромеханічними приводами, подано рекомендації щодо вибору електродвигунів. Для колінного модуля екзоскелета зі синхронним електродвигуном розроблено математичну модель (у середовищі MatLab-Simulink) та запропоновано відповідний варіант системи керування. За допомогою числових експериментів встановлено, що векторний принцип керування двигуном дає можливість відтворити кінематику колінного суглоба людини. Досліджено [24] низку задач динамічного аналізу та оптимального керування рухом біомехатронної системи (з чотирма ступенями вільності), що моделює ходу людини з екзоскелетом нижньої кінцівки. Керують екзоскелетом за допомогою електромеханічних приводів. Сформульована задача розрахунку електричної напруги приводів керування, які забезпечують заданий рух системи. Також досліджена задача пошуку таких керувань, які забезпечують оптимальне (у сенсі мінімізації сумарної електричної потужності приводів) переміщення системи із заданого початкового стану у заданий кінцевий. Задача розв'язана методом параметричної оптимізації (у просторі узагальнених координат) з використанням сімейства заданих функцій часу (поліномів) з невідомими коефіцієнтами та рівномірної дискретизації часового проміжку руху системи.

Пневматичні системи керування екзоскелетом описано у працях [34, 35]. У публікації [34] екзоскелет має десять ступенів вільності і керується чотирма пневматичними приводами (по два на кожен ногу), які забезпечують рух у тазостегновому та колінному суглобах. Для регулювання довжини штоків приводів використовують адаптивний контролер (з нечіткою логікою). Стратегія керування орієнтована на забезпечення належного контролю траєкторії ніг людини. У статті [35] екзоскелет (нижніх та верхніх кінцівок) має 29 ступенів вільності. Для його розробки використано систему автоматизованого проектування SolidWorks (SolidWorks Corp.). Технологія керування пневматичними приводами ґрунтується на інформації зворотного зв'язку від відповідних сенсорів, встановлених у кожному шарнірі екзоскелета. Розроблено комплекс програм «ExoInterface» для зв'язку екзоскелета з віртуальною реальністю та його калібрування.

Ґрунтовний огляд екзоскелетів з активними та пасивними приводами зроблено також у праці [28], а в [36] описано історію розробки екзоскелетів нижніх кінцівок людини, їх призначення та роль у системах реабілітації

людей, наведено приклади реальних систем.

Запропонована стаття продовжує дослідження, описані раніше [16]. Тут розглядаємо ходу людини (на проміжку подвійного кроку) з активно керованим екзоскелетом нижніх кінцівок. Опорно-руховий апарат людини моделюємо плоскою системою дев'яти твердих тіл, екзоскелет – парою триланкових шарнірних важелів, жорстко закріплених на нижніх кінцівках. Припускаємо, що рівень м'язових сил у тазобедерних, колінних та гомілковостопних суглобах є малим і недостатнім для ходи. Для переміщення біомеханічної системи використовуємо електромеханічні приводи, які формують необхідні зусилля у відповідних шарнірах екзоскелета. Формулюємо задачу пошуку таких керувань приводів екзоскелета, за яких переміщення біотехнічної системи буде антропоморфним. Побудовано числовий алгоритм наближеного розв'язання задачі, який складається із двох етапів. На першому для заданих масоінерційних параметрів біомеханічної системи та параметрів подвійного кроку розраховуємо кінематичні та динамічні характеристики віртуальної ходи в “нормі”, вважаючи, що м'язи в основних суглобах ніг можуть забезпечити необхідні зусилля. Для цього використовуємо енергетично-оптимізаційний підхід та методику параметричної оптимізації [5–7]. На другому етапі для побудованих “еталонних” характеристик ходи людини обчислюємо необхідні керування приводів екзоскелета. Алгоритм реалізовано у вигляді програмного комплексу, виконані числові експерименти підтвердили його ефективність.

Мета досліджень – розробити математичну модель ходи людини з керованим електромеханічним екзоскелетом, побудувати алгоритм та програму для розрахунку керувань приводів екзоскелета, за яких рух біомеханічної системи буде антропоморфним, та розвинуто енергетично-оптимізаційний підхід та методику параметричної оптимізації у задачах моделювання ходи людини [5–7, 15–17, 30, 31].

### 1. Моделювання ходи людини з електромеханічним екзоскелетом.

Розглядаємо ходу людини (по нерухомій горизонтальній поверхні) з активно керованим екзоскелетом нижніх кінцівок. Обмежимося моделюванням динаміки руху системи у сагітальній площині  $OXY$  (рис. 1). Опорно-руховий апарат людини моделюємо плоскою системою дев'яти твердих тіл: тіло  $NG$  являє собою корпус, тіла  $NK_i$ ,  $K_iA_i$ ,  $A_iH_iM_i$ ,  $M_iS_i$  – відповідно стегно, гомілку та дволанкову стопу  $i$ -ї ноги. Тіла зв'язані між собою циліндричними шарнірами  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $M_i$ , осі яких ортогональні площині  $OXY$ ,  $i = 1, 2$ . Екзоскелет схематично подамо у вигляді двох триланкових шарнірних важелів, зв'язаних з корпусом  $NG$  за допомогою шарніра  $N$ .

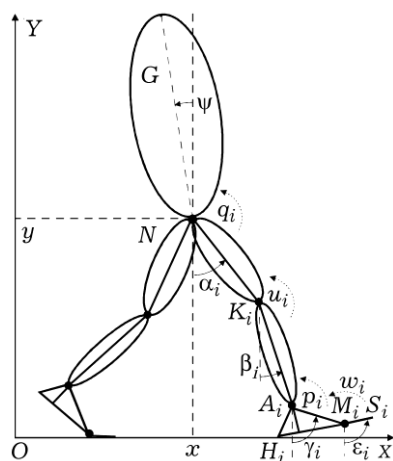


Рис. 1

Ланки екзоскелета послідовно закріплені на стегні, гомілці та стопі. Осі шарнірів екзоскелета збігаються з осями відповідних суглобів нижніх кінцівок людини. Екзоскелет та опорно-руховий апарат людини жорстко зв'язані між собою і їх переміщення повністю збігаються. Всі шарніри біомеханічної системи вважаємо ідеальними, стопи – безінерційними, а їх маси – зосередженими у гомілковостопних шарнірах. Масоінерційні властивості ланок екзоскелета враховуємо у характеристиках відповідних сегментів ніг людини.

Припустимо, що рівень м'язових сил в основних суглобах нижніх кінцівок людини (шарніри  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ ) є малим і недостатнім для виконання локомоторних функцій. Відповідно для забезпечення ходи

людини використовуємо керовані електромеханічні приводи  $P_k$ ,  $k = 1, 6$ , розміщені біля відповідних шарнірів екзоскелета. Приводи  $P_1, P_2$  відповідають шарніру  $N$ , приводи  $P_{i+2}, P_{i+4}$  – шарнірам  $K_i, A_i$ ,  $i = 1, 2$ . Кожен привід складається із електродвигуна постійного струму (з незалежним збудженням), редуктора та мікроконтролера. Електрична напруга, яку подають на вхід двигуна, генерує необхідне зусилля у відповідному шарнірі екзоскелета.

Рухається біомеханічна система внаслідок взаємодії моментів сил  $q_i, u_i, p_i, w_i$ , прикладених у шарнірах  $N, K_i, A_i, M_i$  відповідно (рис. 1), сил реакцій опорної поверхні  $\mathbf{R}_i$  та сили тяжіння,  $i = 1, 2$ . Моменти  $q_i, u_i, p_i$  генеруються електродвигунами приводів  $P_i, P_{i+2}, P_{i+4}$ , момент у плеснофаланговому суглобі  $w_i$  – м'язами стопи людини,  $i = 1, 2$ .

Рівняння руху моделі подамо у вигляді системи диференціальних та алгебричних співвідношень:

$$\mathbf{A}(\xi)\ddot{\xi} + \mathbf{B}(\xi)\dot{\xi} + \mathbf{g}(\xi) = \mathbf{C}(\xi)\mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\mathbf{S}(\xi, x_{R1}, x_{R2})\mathbf{f} = 0, \quad (2)$$

де  $\xi = (x, y, \psi, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  – вектор узагальнених координат біомеханічної системи;  $(x, y)$  – координати шарніра  $N$  у системі відліку  $OXY$ ;  $\psi, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i$  – кути відхилення тіл  $NG, NK_i, K_iA_i, A_iH_iM_i, M_iS_i$  від вертикалі,  $i = 1, 2$ ;  $\mathbf{f} = (q_1, q_2, u_1, u_2, p_1, p_2, w_1, w_2, R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y})$  – вектор прикладених сил;  $R_{ix}, R_{iy}, x_{Ri}$  – координати вектора  $\mathbf{R}_i$  у системі відліку  $OXY$  та абсциса точки його прикладання;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{S}$  – матриці розмірностей  $7 \times 11, 7 \times 11, 7 \times 12, 4 \times 12$ , відповідно;  $\mathbf{b} = (\dot{\xi}_1^2, \dot{\xi}_2^2, \dots, \dot{\xi}_{11}^2)$ ;  $\mathbf{g}$  – вектор розмірності 7. Компоненти матриць  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{S}$  та вектора  $\mathbf{g}$  можна одержати із розгорнутого запису співвідношень (1), (2) у праці [6]. Крапкою над величиною позначено диференціювання за часом  $t$ . Диференціальні співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду, що описують динаміку біомеханічної системи без урахування стоп, алгебричні співвідношення (2) описують умови кінетостатичної рівноваги безінерційних стоп.

Для отримання повної математичної моделі динаміки досліджуваної електромеханічної системи формули (1), (2) доповнимо рівняннями балансу сил у приводах екзоскелета та співвідношеннями, що описують електромагнітні процеси у двигунах [4]:

$$\begin{aligned} J_k^e \dot{\omega}_k^e(t) &= f_k^e(t) - f_k(t), \quad f_k^e = \mu_k^e z_k^e(t), \\ L_k^e \dot{z}_k^e(t) + R_k^e z_k^e(t) + \mu_k^e \omega_k^e(t) &= u_k^e(t), \quad k = \overline{1, 6}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $J_k^e$  – момент інерції ротора (відносно осі власного обертання),  $f_k^e$  – момент електромагнітних сил, прикладених до ротора,  $f_k$  – момент сил навантаження ротора (від біомеханічної системи),  $z_k^e, u_k^e$  – електричний струм та напруга в обмотці ротора,  $R_k^e, \mu_k^e, L_k^e$  – омичний опір обмотки ротора і коефіцієнти пропорційності та індуктивності,  $\omega_k^e$  – кутова швидкість ротора,  $k = \overline{1, 6}$ . Моменти сил навантаження ротора та кутові швидкості визначають співвідношення

$$\begin{aligned} f_i &= q_i/n_i, \quad f_{i+2} = u_i/n_{i+2}, \quad f_{i+4} = p_i/n_{i+4}, \\ \omega_i^e &= n_i \dot{\eta}_{N_i}, \quad \omega_{i+2}^e = n_{i+2} \dot{\eta}_{K_i}, \quad \omega_{i+4}^e = n_{i+4} \dot{\eta}_{A_i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $n_k$  – передатне число редуктора привода  $P_k$ ,  $k = \overline{1, 6}$ ,  $\eta_{N_i} = \alpha_i - \psi$ ,  $\eta_{K_i} = \alpha_i - \beta_i$ ,  $\eta_{A_i} = \gamma_i - \beta_i - \bar{\gamma}_i$  – міжланкові кути у шарнірах  $N$ ,  $K_i$ ,  $A_i$ ,  $\bar{\gamma}_i = 90^\circ - \varphi_{M_i}$ ,  $\varphi_{M_i} = \angle A_i M_i H_i$ ,  $i = 1, 2$ . Зауважимо, що кут  $\eta_{N_i}$  описує відхилення стегна  $NK_i$  відносно корпусу  $NG$ , кут  $\eta_{K_i}$  – відхилення гомілки  $K_i A_i$  відносно стегна  $NK_i$ , кут  $\eta_{A_i}$  – відхилення нормалі (до основи стопи  $H_i M_i$ ) відносно гомілки  $A_i K_i$ .

За співвідношеннями (3), (4) можна розрахувати електричну напругу  $u_k^e(t)$ ,  $k = \overline{1, 6}$ , необхідну для заданого руху біомеханічної системи. Надалі вважаємо, що приводи екзоскелета можуть забезпечити формування потрібних електричних напруг. Тертя рухомих вузлів приводів не враховуємо. Відомо, що хода людини (в усталеному режимі) є періодичним процесом з періодом, рівним тривалості подвійного кроку. Також локомоторний цикл характеризується стійкою послідовністю ритмічних фаз руху стоп: перекочування через п'ятку, опора на всю ступню, плеснофалангове перекочування (опора на фаланги пальців), перекочування через носок, перенесення ступні над поверхнею опори [12, 26]. На кожній із таких фаз відбуваються різні біомеханічні процеси з відповідними кінематичними та динамічними характеристиками.

Тому ходу досліджуємо на проміжку подвійного кроку  $[0, T]$ , де враховуємо “природну” послідовність фаз руху стоп. Позначимо через  $T_1$  тривалість першого кроку та задамо фази руху першої стопи:  $t \in [0, \tau_{h1})$  – перекочування через п'ятку,  $t \in [\tau_{h1}, \tau_{m1})$  – опора на всю стопу,  $t \in [\tau_{m1}, T_1]$  – плеснофалангове перекочування,  $t \in (T_1, \tau_{s1})$  – перекочування через носок,  $t \in [\tau_{s1}, T)$  – перенесення стопи. Аналогічно визначимо фази руху другої стопи:  $t \in (0, \tau_{s2})$  – перекочування через носок,  $t \in [\tau_{s2}, T_1]$  – перенесення стопи,  $t \in [T_1, \tau_{h2})$  – перекочування через п'ятку,  $t \in [\tau_{h2}, \tau_{m2})$  – опора на всю стопу,  $t \in [\tau_{m2}, T]$  – плеснофалангове перекочування.

Із антропоморфності руху механічної системи впливають:

а) ритмічні умови на часові параметри введених фаз [26]

$$0 < \tau_{s2} < \tau_{m1} < T_1 < \tau_{s1} < \tau_{m2} < T; \quad (5)$$

б) геометричні в'язі, що виражають умови контактування точок стопи  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  з опорною поверхнею

$$\begin{aligned} x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^0, y_{hi}(t) \equiv 0, y_{si} > y_{mi} > 0, \eta_{M_i}(t) \equiv 0, t \in [\tau_i, \tau_{hi}), \\ x_{hi}(t) &\equiv x_{hi}^0, y_{hi}(t) \equiv y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, t \in [\tau_{hi}, \tau_{mi}), \\ x_{mi}(t) &\equiv x_{mi}^0, y_{hi} > 0, y_{mi}(t) \equiv y_{si}(t) \equiv 0, t \in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}], \\ x_{si}(t) &\equiv x_{si}^0, y_{hi} > y_{mi} > 0, y_{si}(t) \equiv 0, \eta_{M_i}(t) \geq 0, t \in (\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ y_{hi} &> 0, y_{mi} > 0, y_{si} > 0, \eta_{M_i}(t) \geq 0, t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $(x_{hi}, y_{hi})$ ,  $(x_{mi}, y_{mi})$ ,  $(x_{si}, y_{si})$  – координати точок  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  у системі відліку  $OXY$ ,  $\eta_{M_i}(t) \equiv \varepsilon_i(t) - \gamma_i(t) - \varphi_{M_i}$  – кут у шарнірі  $M_i$  між прямими  $H_i M_i$  та  $M_i S_i$ ,  $\varphi_{M_i} = \angle A_i M_i H_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_1$ ,  $\tau_3 = T$ ; верхнім індексом «0» позначено абсцису відповідної точки стопи у разі, коли ця точка лежить на поверхні опори (на осі  $OX$ ),  $x_{mi}^0 = x_{hi}^0 + \ell_1$ ,  $x_{si}^0 = x_{mi}^0 + \ell_2$ ,

$x_{h2}^0 = x_{h1}^0 + L_1$ ,  $\ell_1 = |H_1 M_1| = |H_2 M_2|$ ,  $\ell_2 = |M_1 S_1| = |M_2 S_2|$ ,  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = T_1$ ,  $\tau_3 = T$ ; параметр  $x_{h1}^0$  задає абсцису п'ятки першої ноги на початку подвійного кроку;

в) обмеження динамічного характеру [3]

$$\begin{aligned} R_{iy} > 0, \quad |R_{ix}| \leq \mu R_{iy}, \quad t \in \Lambda_i = [\tau_i, \tau_{i+1}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ R_{iy}(t) \equiv R_{ix}(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau_{si}, \tau_{4-i}), \\ x_{hi}^0 \leq x_{Ri} \leq x_{mi}^0, \quad t \in [\tau_i, \tau_{mi}), \\ x_{mi}^0 \leq x_{Ri} \leq x_{si}^0, \quad t \in [\tau_{mi}, \tau_{1+i}) \cup [\tau_{3-i}, \tau_{si}), \\ \dot{x}_{Ri} \geq 0, \quad t \in \Lambda_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт тертя між стопою та опорною поверхнею. Співвідношення (5) виражають вільне упирання стоп на поверхню крокування та їх непроковзування, а також задають межі розміщення точки прикладання головного вектора опорних реакцій. Як свідчать експериментальні дослідження ходи людини [26], під час опори на стопу  $i$ -ї ноги точка  $x_{Ri}$  монотонно переміщається від п'ятки  $H_i$  до носка  $S_i$ . Зауважимо, що обмеження (3)–(5) притаманні ході людини в «нормі» (в усталеному режимі). Також у формулах (4) декартові координати точок  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $S_i$  (в інерційній системі відліку  $OXY$ ) можна виразити через узагальнені координати системи та розміри сегментів нижніх кінцівок.

Задамо умови періодичності (за кутами та ординатою  $y$ ) руху механічної системи на проміжку  $[0, T]$ , а також положення (на опорній поверхні) окремих точок стоп у початковий  $t = 0$  та кінцевий  $t = T$  моменти часу:

$$\begin{aligned} \xi(T) = \xi(0) + \mathbf{L}, \quad \dot{\xi}(T) = \dot{\xi}(0), \\ x_{h1}(0) = x_{h1}^0, \quad y_{h1}(0) = 0, \quad x_{m2}(0) = x_{h1}^0 + l_{1,1} - L_1, \quad y_{m2}(0) = 0, \\ x_{h1}(T) = x_{h1}(0) + L, \quad y_{h1}(T) = 0, \quad x_{m2}(T) = x_{m2}(0) + L, \quad y_{m2}(T) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\mathbf{L} = (L, 0, \dots, 0)$  – вектор розмірності 11,  $L = L_1 + L_2$  – довжина подвійного кроку. У співвідношеннях (4), (6) для визначеності покладаємо  $x_{h1}^0 = 0$ .

**2. Алгоритм розрахунку керувань екзоскелета.** Нехай задано параметри подвійного кроку (довжини та тривалості одинарних кроків) біомеханічної системи, а також двосторонні обмеження на міжланкові кути

$$\eta_v^{(0)}(t) \leq \eta_v(t) \leq \eta_v^{(1)}(t), \quad t \in [0, T], \quad v \in \{N, K_i, A_i\}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

та реакції опорної поверхні

$$\begin{aligned} R_{ix}^{(0)}(t) \leq R_{ix}(t) \leq R_{ix}^{(1)}(t), \\ R_{iy}^{(0)}(t) \leq R_{iy}(t) \leq R_{iy}^{(1)}(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут  $\eta_{Ni, Ki, Ai}^{(0,1)}$ ,  $R_{ix, iy}^{(0,1)}$  – задані на проміжку  $[0, T]$  функції, які визначають області допустимих значень міжланкових кутів та опорних реакцій,  $R_{iy}^{(0)} \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ . Ці функції побудовані [37] на основі усереднення (для групи пацієнтів) результатів експериментальних досліджень ходи людини. Також їх можна побудувати за методикою, наведеною у праці [15].

Для досліджуваної біомеханічної системи приймемо таке означення: переміщення системи називатимемо антропоморфним, якщо закон руху системи  $\xi = \xi(t)$  задовольняє умови (5)–(10).

Сформуємо таку **задачу**: знайти керування електромеханічних приводів екзоскелета  $u_k^e(t)$ ,  $k = \overline{1, 6}$ , які забезпечать антропоморфне переміщення біомеханічної системи.

Аналогічно [16] шукані керування розраховуємо у два етапи. На першому для заданих значень масоінерційних параметрів опорно-рухового апарату людини та параметрів екзоскелета моделюємо її ходу в „нормі”, вважаючи, що м’язи в основних суглобах нижніх кінцівок можуть розвивати зусилля, необхідні для антропоморфного переміщення. Як свідчать результати числового моделювання ходи людини в „нормі” [15], антропоморфну ходу можна побудувати, мінімізуючи функціонал

$$E = \frac{1}{L} \int_0^T \sum_{i=1}^2 [ |q_i \dot{\eta}_{Ni}| + |u_i \dot{\eta}_{Ki}| + |p_i \dot{\eta}_{Ai}| + |w_i (\dot{\gamma}_i - \dot{\epsilon}_i)| ] dt, \quad (11)$$

який оцінює питомі (на одиницю довжини) механічні енерговитрати системи на подвійному кроці. Як зазначено в монографії [2], людина під час ходи намагається організувати свій рух так, щоб переміщення було комфортним (рух її центра маси мінімально відхилявся від рівномірного та прямолінійного) і водночас витрати енергії були мінімальними. Згідно з результатами статті [15], динамічні характеристики ходи людини, розраховані під час мінімізації функціонала (11), добре узгоджуються із загальноприйнятими результатами біомеханічних вимірювань ходи [37]. Це свідчить про коректність енергетично-оптимізаційного підходу у задачах математичного моделювання ходи людини. Відмітимо, що функціонал енерговитрат (типу (11)) часто використовують у задачах оптимізації керованого руху локомотивних систем [2, 3, 5–7, 18, 27, 29–31]. Також зауважимо, що наведені у виразі (11) абсолютні величини механічних потужностей свідчать про відсутність рекуперативної енергії у системі, тобто під час ходи м’язи енергію не накопичують, а тільки витрачають.

Згідно з наведеними вище міркуваннями для розрахунку ходи людини в “нормі” (еталонної ходи) формулюємо та розв’язуємо допоміжну задачу: знайти такий рух системи  $\xi^*(t)$  та відповідні зусилля  $f^*(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , які з огляду на рівняння (1), (2) та умови (5)–(10) мінімізують функціонал (11).

Для розв’язання цієї допоміжної задачі використовуємо методику параметричної оптимізації (у просторі узагальнених координат), в якій за апроксимувальні функції візьмемо кубічні згладжувальні сплайни (з невідомими параметрами). У результаті допоміжну задачу оптимального керування зведемо до задачі нелінійного програмування. Детальніше ця методика описана у працях [5–7, 31].

На другому етапі для побудованого еталонного субоптимального процесу  $\{\xi^*(t), f^*(t)\}$  за допомогою співвідношень (3), (4) обчислюємо відповідні моменти електромагнітних сил  $f_k^e(t)$  та шукані керування  $u_k^e(t)$ ,  $k = \overline{1, 6}$ .

Описаний двоетапний алгоритм розрахунку кінематичних та динамічних характеристик ходи людини з електромеханічним екзоскелетом реалізовано у вигляді комплексу програм (у середовищі Inprise Delphi 7). Числові експерименти підтвердили ефективність запропонованого підходу до моделювання ходи людини з активно керованим екзоскелетом.

**3. Числове моделювання.** Моделювали ходу людини у нормальному темпі при  $T = 1.14$  с і рівними за довжиною та тривалістю одинарними кроками  $L_1 = L_2 = 0.755$  м. Параметри біомеханічної системи набували значень:  $m = 46.7$  кг,  $r = 0.39$  м,  $J = 7.1$  Нм<sup>2</sup>,  $a_1 = a_2 = 0.47$  м,  $m_{a1} = m_{a2} = 8.82$  кг,  $r_{a1} = r_{a2} = 0.257$  м,  $J_{a1} = J_{a2} = 0.279$  Нм<sup>2</sup>,  $b_1 = b_2 = 0.53$  м,  $m_{b1} = m_{b2} = 3.88$  кг,  $r_{b1} = r_{b2} = 0.219$  м,  $J_{b1} = J_{b2} = 0.253$  Нм<sup>2</sup>,  $m_{f1} = m_{f2} = 1.2$  кг,  $\ell_1 = 0.19$  м,  $\ell_2 = 0.1$  м,  $A_1 M_1 = A_2 M_2 = 0.17$  м. Тут  $m$ ,  $r$ ,  $J$  – маса корпусу NG, віддаль



від його центра маси до точки  $N$  та його момент інерції відносно  $N$ ;  $a_i = |NK_i|$ ,  $m_{ai}$ ,  $r_{ai}$ ,  $J_{ai}$  – довжина та маса стегна  $NK_i$ , віддаль від його центра маси до точки  $N$  та його момент інерції відносно  $N$ ;  $b_i = |K_iA_i|$ ,  $m_{bi}$ ,  $r_{bi}$ ,  $J_{bi}$  – довжина та маса гомілки  $NK_i$ , віддаль від її центра маси до точки  $K_i$  та її момент інерції відносно  $K_i$ ;  $m_{fi}$  – зосереджена у точці  $A_i$  сумарна маса стопи  $i$ -ї ноги,  $i = 1, 2$ . Кут у стопі  $\varphi_{M1} = \varphi_{M2} = 38^\circ$ , коефіцієнт тертя  $\mu = 0.9$ . Ланки екзоскелетона вважали сталевими трубами зі зовнішнім 0.016 м і внутрішнім 0.014 м діаметрами та масою 1.39 кг. Параметри приводів задавали рівними:  $n_k = 163$ ,  $J_k^e = 0.00027 \text{ кгм}^2$ ,  $R_k^e = 3.6 \text{ Ом}$ ,  $\mu_k^e = 0.216 \text{ Нм/А}$ ,  $L_k^e = 0.03 \text{ Гн}$ ,  $k = \overline{1, 6}$ .

Межі  $\eta_{Ni, Ki, Ai}^{(0,1)}$ ,  $R_{ix, iy}^{(0,1)}$  ( $i = 1, 2$ ) областей допустимих значень міжланкових кутів та опорних реакцій задавали згідно з даними праці [37]. Обчислювали на комп'ютері з процесором Intel Core I7-3610M (2.3 ГГц, 8 Гб). Параметри числової схеми алгоритму (на етапі побудови еталонних характеристик біомеханічної системи) набували таких самих значень, як у статті [16].

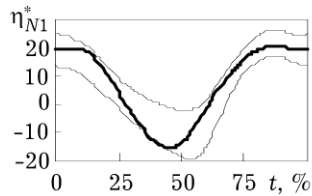


Рис. 2

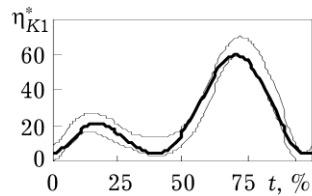


Рис. 3

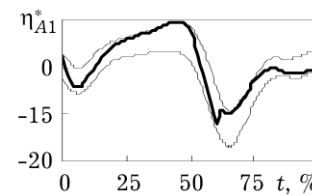


Рис. 4

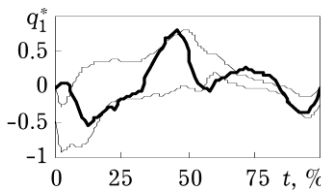


Рис. 5

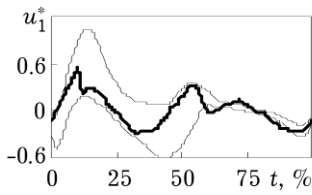


Рис. 6

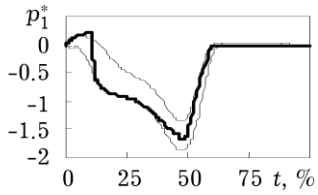


Рис. 7

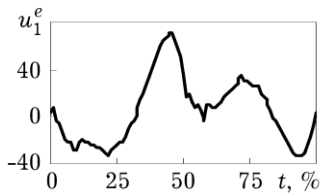


Рис. 8

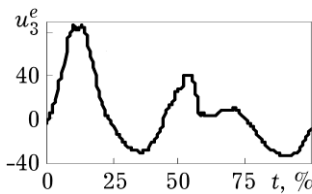


Рис. 9

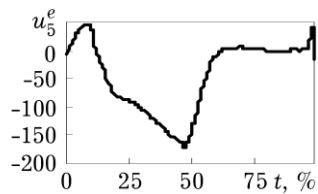


Рис. 10

Побудований (на першому етапі) субоптимальний закон руху біотехнічної системи  $\xi^*(t)$  характеризується енерговитратами  $E^* = 145 \text{ Дж/м}$ . Графіки відповідних кінематичних та динамічних характеристик зображено на рис. 2–7 (потовщені лінії). Тут час  $t$  виражено у відсотках щодо тривалості подвійного кроку  $T$ , кути – в градусах, моменти сил віднесено до сумарної маси системи та виражено в Нм/кг. Тонкими лініями вказано межі областей допустимих значень відповідних характеристик, побудовані за результатами праці [37]. На рис. 8–10 наведені графіки відповідних керувань (елек-

тричної напруги)  $u_1^e(t)$ ,  $u_3^e(t)$ ,  $u_5^e(t)$  приводів екзоскелета у шарнірах  $N$ ,  $K_1$ ,  $A_1$ . Максимальні абсолютні значення напруг відповідно рівні 71, 89 та 171 В. Проміжки часу з від'ємними значеннями напруги відповідають реверсному режиму роботи відповідного електродвигуна.

**Висновки.** Розроблено математичну модель ходи людини з активно керованим електромеханічним екзоскелетом нижніх кінцівок. У межах моделі побудовано алгоритм розрахунку керувань (електричної напруги) приводів екзоскелета, які забезпечують антропоморфну ходу людини за відсутніх м'язових зусиль у тазостегновому, колінному та гомілковостопному суглобах. Отримані керування характеризуються допустимим рівнем порогових значень (для людини з середньостатистичними параметрами). Алгоритм реалізовано у вигляді відповідного програмного комплексу, за допомогою якого виконано серію числових експериментів з моделювання руху досліджуваної біомехатронної системи. Аналіз одержаних результати свідчить, що такий екзоскелет (зі шістьма електромеханічними приводами) може забезпечити антропоморфну ходу людини з пониженим рівнем м'язових зусиль в основних суглобах нижніх кінцівок.

Розроблене алгоритмічно-програмне забезпечення можна використати у програмно-апаратних системах реабілітаційних технологій нижніх кінцівок людини. Також воно може поповнити теоретико-розрахункову базу даних кінематичного та динамічного аналізів ходи.

1. Барчина Ю. М., Горбунов О. А., Осадчий Е. А. Перспективы программируемой биомеханики в воспроизведении опорно-двигательных функций больных и инвалидов // Медична інформатика та інженерія. – 2013. – № 3. – С. 46–47.  
– <https://doi.org/10.11603/mie.1996-1960.2013.3.1744>
2. Белецкий В. В. Двухногая ходьба: Модельные задачи динамики и управления. – Москва: Наука, 1984. – 288 с.
3. Бербюк В. Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 188 с.
4. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Ивах Г. Ф. Задачи оптимизации конструкций и законов управления движением электромеханических манипуляторов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1987. – № 3. – С. 113–123.
5. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини на підставі експериментальних даних // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 3. – С. 86–91.
6. Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование и оптимизация ходьбы человека с протезированной голенью // Проблемы управления и информатики. – 2005. – № 3. – С. 128–144.  
Te same: Berbyuk V. E., Demidyuk M. V., Lytvyn B. A. Mathematical modeling and optimization of walking of human being with prosthesis of crus // J. Autom. Inform. Sci. – 2005. – **37**, No. 6. – P. 46–60.  
– <https://doi.org/10.1615/J Automat Inf Scien.v37.i6.60>
7. Бербюк В. Е., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини на основі оптимізації керованих процесів біодинамічних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 3. – С. 153–161.
8. Борисов А. В. Автоматизация разработки трехмерных моделей экзоскелетов со звеньями переменной длины // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – **16**, № 12. – С. 828–835. – <https://doi.org/10.17587/mau.16.828-835>
9. Борисов А. В. Эмпирический и теоретический подходы к управлению движением экзоскелета // Вестник Балтийск. фед. ун-та им. И. Канта. Сер.: Физ.-мат. и техн. науки. – 2017. – № 3. – С. 33–47.
10. Борисов А. В., Розенблат Г. М. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им // Прикл. математика и механика. – 2017. – **81**, № 5. – С. 511–522.  
Te same: Borisov A. V., Rozenblat G. M. Matrix method of constructing the differential equations of motion of an exoskeleton and its control // J. Appl. Math. Mech. – 2017. – **81**, No. 5. – P. 351–359.  
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2018.03.002>

11. Боровин Г. К., Костюк А. В., Сит Дж., Ястребов В. В. Моделирование гидравлической системы экзоскелетона // Матем. моделирование. – 2006. – **18**, № 10. – С. 39–54.
12. Витензон А. С., Петрушанская К. А. К фазовому анализу ходьбы и некоторых ритмических движений человека // Росс. журн. биомеханики. – 2005. – **9**, № 1. – С. 19–35.
13. Воробьев А. А., Петрухин А. В., Засыпкина О. А., Кривоножкина П. С., Поздняков А. М. Экзоскелет как новое средство в абилитации и реабилитации инвалидов (обзор) // Совр. технологии в медицине. – 2015. – **7**, № 2 – С. 185–197.  
– <http://doi.org/10.17691/stm2015.7.2.22>
14. Даминов В. Д., Ткаченко П. В. Экзоскелеты в медицине: мировой опыт и клиническая практика Пироговского центра // Вест. Нац. мед-хирург. центра им. Н. И. Пирогова. – 2017. – **12**, № 4 (ч. 2). – С. 17–22.
15. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Задачі математичного моделювання ходи людини з урахуванням біомеханічних експериментальних даних // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 123–134.
16. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математичне моделювання ходи людини з екзоскелетом // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 120–129.
17. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математическое моделирование ходьбы человека с голеностопным шарнирным ортезом // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 2. – С. 46–57.  
Te same: Demidyuk M. V., Lytvyn B. A. The mathematical modeling of the human gait with ankle hinged orthosis // J. Autom. Inform. Sci. – 2015. – **47**, No. 4. – P. 64–77. – <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i4.70>
18. Лавровский Э. К. Об энергетике походок человека-оператора, осуществляемых при помощи аппарата “пассивный” экзоскелетон // Механика твердого тела. – 2015. – № 1. – С. 9–24.  
Te same: Lavrovskii E. K. On the energetics of the walking gait of a human operator using a passive exoskeleton apparatus // Mech. Solids. – 2015. – **50**, No. 1. – P. 6–18. – <https://doi.org/10.3103/S0025654415010021>
19. Лавровский Э. К., Письменная Е. В. О регулярной ходьбе экзоскелетона нижних конечностей при дефиците управляющих воздействий // Росс. журн. биомеханики. – 2014. – **18**, № 2. – С. 208–225.
20. Лавровский Э. К., Письменная Е. В. Об управлении процессом регулярной ходьбы экзоскелета нижних конечностей с помощью электроприводов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2018. – **19**, № 3. – С. 160–168.
21. Лавровский Э. К., Письменная Е. В., Комаров П. А. Управление ходьбой экзоскелетона нижних конечностей при вязкоупругой связи его с телом человека-оператора // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – **16**, № 2. – С. 96–101.
22. Лавровский Э. К., Письменная Е. В., Комаров П. А. О задаче организации ходьбы экзоскелетона нижних конечностей при помощи управления в коленных шарнирах // Росс. журн. биомеханики. – 2015. – **19**, № 2. – С. 158–176.  
– <http://doi.org/10.15593/rzhbiomeh/2015.2.03>
23. Николенко М. Н., Котин Д. А. Активный модуль медицинского экзоскелета с синхронным электроприводом и системой векторного управления // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2017. – № 4(24). – С. 155–167.
24. Мелконян С. Т., Саргсян С. А., Арутюнян М. Г., Степанян К. Г., Саркисян Ю. Л. Динамический анализ и оптимальное управление биомехатронных систем реабилитационных устройств конечностей человека // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. Техн. науки. – 2011. – **64**, № 1. – С. 3–14.
25. Сташкевич А. Т., Осадчий Е. А., Вовк Н. Н., Горбунов О. А. Концепция построения и опыт медицинского применения аппарата “Экзоскелетон” // Літопис травматології та ортопедії. – 2011. – **21–22**, № 1–2. – С. 306.
26. Скворцов Д. В. Клинический анализ движений. Анализ походки. – Иваново: Изд-во НПП “Стимул”, 1996. – 344 с.
27. Формальский А. М. Перемещение антропоморфных механизмов. – Москва: Наука, 1982. – 368 с.
28. del-Ama A. J., Koutsou A. D., Moreno J. C., de-los-Reyes A., Gil-Agudo A., Pons J. L. Review of hybrid exoskeletons to restore gait following spinal cord injury // J. Rehabil. Res. Dev. – 2012. – **49**, No. 4. – P. 497–514.

- <http://doi.org/10.1682/jrrd.2011.03.0043>
29. Beckett R., Chang K. An evaluation of the kinematics of gait by minimum energy // *J. Biomech.* – 1968. – **1**, No. 2. – P. 147–159.  
– [http://doi.org/10.1016/0021-9290\(68\)90017-1](http://doi.org/10.1016/0021-9290(68)90017-1)
30. Berbyuk V. Multibody Systems Modeling and Optimization Problems of Lower Limb Prostheses // In: *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems* / D. Bestle, W. Schiehlen (Eds) – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. – P. 25–32. – [https://doi.org/10.1007/978-94-009-0153-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-94-009-0153-7_4)
31. Berbyuk V., Boström A. E., Lytwyn B., Peterson Bo. Energy-Optimal Control of Bipedal Locomotion Systems // *J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA)*. – 2002. – **4**, No. 2. – P. 74–89.
32. del-Ama A. J., Koutsou A. D., Moreno J. C., de-los-Reyes A., Gil-Agudo A., Pons J. L. Review of hybrid exoskeletons to restore gait following spinal cord injury // *J. Rehabil. Res. Dev.* – 2012. – **49**, No. 4. – P. 497–514.  
– <https://doi.org/10.1682/jrrd.2011.03.0043>
33. Koceska N., Koceski S., Durante F., Zobel P. B., Raparelli T. Control Architecture of a 10 DOF Lower Limbs Exoskeleton for Gait Rehabilitation // *Int. J. Adv. Robotic Syst.* – 2013. – **10**, No. 1. – P. 68–78. – <https://doi.org/10.5772/55032>
34. Veneva I., Chakarov D., Venev P., Zlatanov E., Tsveov M., Trifonov D., Navaro X. Exoskeleton for rehabilitation // *Probl. Eng. Cybern. Robotics.* – 2018. – **69**. – P. 30–39.
35. Vukobratovic M. K., Jovanovic M. D. Active exoskeletons, beginning, present state and the future // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* – 2007. – № 4. – С. 7–16.
36. Winter D. A. *Biomechanics and motor control of human movement.* – New York: Wiley, 2009. – 370 p.

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХОДЬБЫ ЧЕЛОВЕКА С ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ ЭКЗОСКЕЛЕТОМ

Построена математическая модель для динамического анализа и восстановления ходьбы человека при помощи электромеханического экзоскелета. Опорно-двигательный аппарат человека смоделирован плоской системой девяти твердых тел, экзоскелет – парой трехзвенных шарнирных рычагов, закрепленных на нижних конечностях. Управление экзоскелетом происходит при помощи электромеханических приводов: электрическое напряжение, подаваемое на вход электродвигателей, обеспечивает формирование необходимых усилий в шарнирах системы. В предположении, что уровень мышечных усилий в основных суставах (тазобедренном, коленном, голеностопном) ног человека мал и недостаточен для осуществления локомоторных функций, сформулирована задача поиска таких управлений экзоскелета, которые обеспечат антропоморфное движение биотехнической системы. Разработан алгоритм приближенного решения задачи, который базируется на процедурах параметризации обобщенных координат механической системы с помощью кубических сплайнов, концепции обратных задач динамики и численных методах нелинейного программирования.

**Ключевые слова:** ходьба человека, электромеханический экзоскелет, математическое моделирование, оптимальное управление, сплайн-аппроксимация, параметрическая оптимизация, нелинейное программирование.

#### MATHEMATICAL MODELING AND HUMAN GAIT RECOVERING WITH ELECTROMECHANICAL EXOSKELETON

The mathematical model for dynamical analysis and recovering of the human gait by the electromechanical exoskeleton is built. Human locomotor apparatus is modeled by planar system of nine rigid bodies, and exoskeleton by pair of three-link hinge levers, connected to the lower extremities. The exoskeleton is controlled by electromechanical devices: the electrical power, which is supplied to the electric motor input, provides generating of the necessary torques in the system's joints. Assuming, that the level of the muscle forces in the primary human legs joints (hip, knee and ankle) is small and not sufficient for performing locomotor functions, the problem for determining exoskeleton control, which provide for biotechnical system anthropomorphic movement

*is formulated. The algorithm for construction of approximate solution, based on a procedure of parameterization of generalized coordinates of the mechanical system by a set of cubic smoothing splines, conception of reverse dynamic problems and numerical methods of nonlinear programming is built.*

**Key words:** *human gait, electromechanical exoskeleton, mathematical modeling, optimal control, spline approximation, parametric optimization, nonlinear programming.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
26.09.19