УДК 517.958

Н. В. Мазуряк✉

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ АДВЕКЦІЇ–ДИФУЗІЇ–РЕАКЦІЇ В НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ТОНКИМ КРИВОЛІНІЙНИМ КАНАЛОМ

Розглянуто математичну модель задачі адвекції-дифузії−реакції в неоднорідному середовищі з тонким криволінійним каналом. Отримано варіаційне формулювання задачі у безрозмірних змінних. Досліджено та знайдено умови існування та єдиності розв'язку сформульованої задачі.

Ключові слова: *адвекція−дифузія−реакція, неоднорідне середовище, тонкий криволінійний канал, існування та єдиність розв'язку.*

Вступ. Під час математичного моделювання явищ у науці та технологіях часто необхідно досліджувати процеси адвекції−дифузії−реакції в середовищах зі складною неоднорідною структурою, які можуть містити однорідні тонкі канали. У праці [5] розглянуто задачу адвекції-дифузії в однорідному середовищі з тонким криволінійним каналом, а в [4, 5] задачу в каналі зведено до одновимірної. В праці [1] доведено властивості лінійних та білінійних форм для задачі реакції-дифузії в неоднорідному середовищі.

Нижче вперше розглянуто випадок поєднання двох видів неоднорідності середовища − за наявності тонкого криволінійного каналу та коефіцієнтів неоднорідності, які не є сталими. Побудовано математичну модель адвекції−дифузії−реакції для цього середовища, отримано варіаційне формулювання та досліджено існування і єдиність розв'язку задачі.

1. Формулювання задачі. Розглянемо неоднорідне середовище з тонким криволінійним каналом (рис. 1).

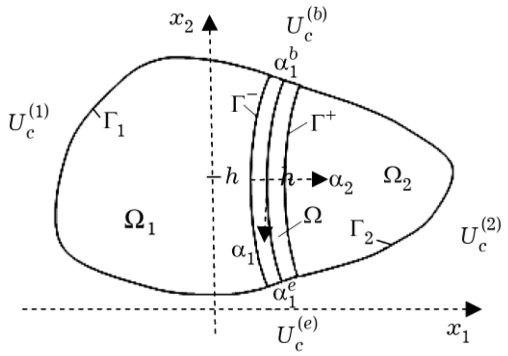

Рис. 1. Середовище з тонким криволінійним каналом.

У каналі введемо криволінійну систему координат α_1, α_2, пов'язану з серединною кривою каналу так, що координата α_1 відповідає напряму дотичної до кривої, координата α_2 − напряму нормалі. Вважатимемо, що серединна крива каналу є гладкою та визначається параметричними рівняннями $x_1 = x_1(\alpha_1),\ x_2 = x_2(\alpha_1)$. Позначимо через $A = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}$ коефіцієнт Ляме серединної кривої каналу, через $K = \dfrac{x_2'' x_1' - x_1'' x_2'}{A^3}$ − кривизну цієї кривої, де x_i', x_i'', $i = 1, 2$, − похідні функцій x_i по α_1. Таким чином, криволінійний канал у введеній системі координат матиме вигляд

✉ nata-ww@ukr.net

$$\Omega = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2): \ \alpha_1^b \le \alpha_1 \le \alpha_1^e, \ -h \le \alpha_2 \le h \right\},$$

а його товщина становитиме $2h$. Позначимо через Ω_1 область, розміщену ліворуч від каналу, через Ω_2 – область, розташовану праворуч від каналу. Тоді $\partial\Omega_1 = \{\Gamma_1 \cup \Gamma^-\}$, $\partial\Omega_2 = \{\Gamma^+ \cup \Gamma_2\}$, $\partial\Omega = \{\Gamma^- \cup \alpha_1^b \cup \Gamma^+ \cup \alpha_1^e\}$ – границі областей Ω_1, Ω_2 та Ω, що задовольняють умову Ліпшиця.

Математичну модель адвекції–дифузії–реакції для цього середовища описують рівняння (1)–(3), крайові умови (4),(5) та умови спряження (6),(7):

$$-\frac{d}{H}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{D_c}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha_1}\right) - \frac{d}{H}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(D_c H\frac{\partial U}{\partial\alpha_2}\right) + \frac{w}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha_1} = q, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega, \tag{1}$$

$$-d_1\,\mathrm{div}(\mathbf{D}_1 \mathrm{grad} U_1) + \mathbf{W}_1 \mathrm{grad} U_1 + r_1 U_1 = q_1, \quad x_1, x_2 \in \Omega_1, \tag{2}$$

$$-d_2\,\mathrm{div}(\mathbf{D}_2 \mathrm{grad} U_2) + \mathbf{W}_2 \mathrm{grad} U_2 + r_2 U_2 = q_2, \quad x_1, x_2 \in \Omega_2, \tag{3}$$

$$U = U_c^{(b)} \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^b, \ U = U_c^{(e)} \text{ на } \alpha_1 = \alpha_1^e, \tag{4}$$

$$U_i = U_c^{(i)} \text{ на } \Gamma_i, \ i = 1, 2, \tag{5}$$

$$U_1 = U, \ D_c\frac{\partial U}{\partial\alpha_2} = q^-(\alpha_1, -h) \text{ на } \alpha_2 = -h, \tag{6}$$

$$U_2 = U, \ -D_c\frac{\partial U}{\partial\alpha_2} = q^+(\alpha_1, h) \text{ на } \alpha_2 = h. \tag{7}$$

Тут $U(\alpha_1, \alpha_2)$, $U_i(x_1, x_2)$, – шукані невідомі функції в Ω, Ω_i відповідно; U_c^b, U_c^e, U_c^i – задані значення на границях α_1^b, α_1^e, Γ_i відповідно; $d = \mathrm{const} > 0$, $d_i = \mathrm{const} > 0$, $D_c = \mathrm{const} > 0$, D_i^{kp}, $k, p = 1, 2$, – задані коефіцієнти дифузії, $\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} D_i^{11} & D_i^{12} \\ D_i^{21} & D_i^{22} \end{pmatrix}$; $\mathbf{W} = (w, 0)$, $\mathbf{W}_i = (w_{i1}, w_{i2})$ – задані вектори, які характеризують швидкість адвективного перенесення, $w = \mathrm{const}$, $w_{ij} = \mathrm{const}$ – задані коефіцієнти адвекції; $r_i = \mathrm{const} \ge 0$ – задані коефіцієнти реакції; $q(\alpha_1, \alpha_2)$, $q_i(x_1, x_2)$ – задані функції, які характеризують інтенсивність внутрішніх джерел; $q^-(\alpha_1, -h)$, $q^+(\alpha_1, h)$ – задані значення потоків на спільних границях Γ^-, Γ^+ відповідно; $i, j = 1, 2$; $H = A(1 + \alpha_2 K)$. Для задачі теплопровідності функції $U(\alpha_1, \alpha_2)$, $U_i(x_1, x_2)$ будуть функціями розподілу температури, а для задачі масопереносу – функціями розподілу концентрації забруднень.

Вважатимемо, що вектори $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}_i$ задовольняють рівняння нерозривності, тобто $\mathrm{div}\mathbf{W} = 0$, $\mathrm{div}\mathbf{W}_i = 0$. Також приймемо, що середовище в каналі є однорідним ($D_c = \mathrm{const} > 0$), а в областях Ω_i – неоднорідним, тобто функції $D_k^{ij}(x_1, x_2)$, $i, j, k = 1, 2$, залежать від x_1, x_2. Для виконання умов спряження вважатимемо, що на границях Γ^- та Γ^+ матриця коефіцієнтів дифузії $\mathbf{D}_i$ має вигляд $\mathbf{D}_i = D_i^c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $D_i^c = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, 2$. Приймемо, що канал Ω є тонким, тобто $hK << 1$.

2. Варіаційне формулювання. Перейдемо до безрозмірних величин для сформульованої задачі. Позначимо довжину криволінійного каналу як $\ell = \int\limits_{\alpha_1^b}^{\alpha_1^e} A\, d\alpha_1$ та введемо безрозмірні змінні так: $\chi_1 = \alpha_1$, $\chi_2 = \dfrac{\alpha_2}{\ell}$, $X_1 = \dfrac{x_1}{\ell}$,

$X_2 = \dfrac{x_2}{\ell}$, $A^* = \dfrac{A}{\ell}$, $K^* = \ell K$. Тоді границі Γ^-, Γ^+ та Γ_i, $i = 1,2$, у безрозмірних змінних матимуть вигляд

$$\Gamma^{*-} = \left\{(\chi_1, \chi_2) : \ (\chi_1, \chi_2 \ell) \in \Gamma^-\right\},$$

$$\Gamma^{*+} = \left\{(\chi_1, \chi_2) : \ \chi_1, \chi_2 \ell) \in \Gamma^+\right\},$$

$$\Gamma_i^* = \{(X_1, X_2) : \ (X_1 \ell, X_2 \ell) \in \Gamma_i\}, \quad i = 1,2 .$$

Запишемо функції D_k^{ij}, U, U_k, $i,j,k = 1,2$, у вигляді $D_k^{ij} = D_k^c D^{*ij}_{\ k}$, $U = U^{(0)} U^*$, $U_k = U_k^{(0)} U_k^*$, де $D_k^c = \mathrm{const}$, $U^{(0)} = \mathrm{const}$, $U_k^{(0)} = \mathrm{const}$, $k = 1,2$, – сталі коефіцієнти; $D^{*ij}_{\ k}$, U^*, U_k^*, $i,j,k = 1,2$, – безрозмірні функції. Величини $\mathrm{Pe} = \dfrac{w\ell}{dD_c}$, $\mathrm{Pe}_{11} = \dfrac{w_{11}\ell}{d_1 D_1^c}$, $\mathrm{Pe}_{12} = \dfrac{w_{12}\ell}{d_1 D_1^c}$, $\mathrm{Pe}_{21} = \dfrac{w_{21}\ell}{d_2 D_2^c}$, $\mathrm{Pe}_{22} = \dfrac{w_{22}\ell}{d_2 D_2^c}$ називатимемо числами Пекле, величини $\mathrm{Os} = \dfrac{q\ell^2}{dD_c U^{(0)}}$, $\mathrm{Os}_1 = \dfrac{q_1 \ell^2}{d_1 D_1^c U_1^{(0)}}$, $\mathrm{Os}_2 = \dfrac{q_2 \ell^2}{d_2 D_2^c U_2^{(0)}}$ – числами Остроградського. За аналогією введемо такі позначення: $R_1 = \dfrac{r_1 \ell^2}{d_1 D_1^c}$, $R_2 = \dfrac{r_2 \ell^2}{d_2 D_2^c}$.

Враховуючи той факт, що канал є тонким, розподіл U^* подамо у вигляді лінійного закону за змінною χ_2 [4, 5]:

$$U^* = u_1 + \frac{\chi_2}{\mu} u_2 .$$

де $\mu = \dfrac{h}{\ell}$; $u_1(\chi_1)$, $u_2(\chi_1)$ – невідомі функції. Після зведення задачі в каналі до одновимірної [4, 5], використання формул Гріна, врахування крайових умов, умов спряження та вигляду коефіцієнтів $D^{*ij}_{\ k}$, $i,j,k = 1,2$, на границях Γ^{*-} та Γ^{*+} отримаємо таке варіаційне формулювання задачі у безрозмірних змінних.

Знайти вектор-функцію $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$ та функції U_j^*, де $u_j \in V$, $U_j^* \in V_j$, $j = 1,2$, такі, що

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \tag{8}$$

$$a_1(U_1^*, \tilde{U}_1) + b_1(U_1^*, \tilde{U}_1) + c_1(U_1^*, \tilde{U}_1) = \ell_1(\tilde{U}_1), \tag{9}$$

$$a_2(U_2^*, \tilde{U}_2) + b_2(U_2^*, \tilde{U}_2) + c_2(U_2^*, \tilde{U}_2) = \ell_2(\tilde{U}_2), \tag{10}$$

$$u_1 - u_2 = U_1^* \text{ на } \Gamma^{*-}, \ u_1 + u_2 = U_2^* \text{ на } \Gamma^{*+},$$

$$\forall v_j \in V \quad \forall \tilde{U}_j \in V_j, \ j = 1,2, \ \mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top,$$

$$v_1 - v_2 = \tilde{U}_1 \text{ на } \Gamma^{*-}, \ v_1 + v_2 = \tilde{U}_2 \text{ на } \Gamma^{*+},$$

де

$$V = \left\{v(\chi_1) : \ v(\chi_1) \in W_2^{(1)}\left((\chi_1^b, \chi_1^e)\right), \ v\,|_{\chi_1^b} = 0, \ v\,|_{\chi_1^e} = 0\right\},$$

$$V_1 = \left\{v(X_1, X_2) : \ v(X_1, X_2) \in W_2^{(1)}(\Omega_1), \ v\,|_{\Gamma_1^*} = 0\right\},$$

$$V_2 = \left\{v(X_1, X_2) : \ v(X_1, X_2) \in W_2^{(1)}(\Omega_2), \ v\,|_{\Gamma_2^*} = 0\right\}$$

– гільбертові простори, а $a(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $b(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $c(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $\ell(\mathbf{v})$, $a_i(U_i^*,\tilde{U}_i)$, $b_i(U_i^*,\tilde{U}_i)$, $c_i(U_i^*,\tilde{U}_i)$, $\ell_i(\tilde{U}_i)$, $i=1,2$, – такі білінійні і лінійні форми:

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a^{11}(u_1,v_1) + a^{12}(u_1,v_2) + a^{21}(u_2,v_1) + a^{22}(u_2,v_2),$$

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v}) = b^{11}(u_1,v_1) + b^{22}(u_2,v_2), \quad c(\mathbf{u},\mathbf{v}) = c^{22}(u_2,v_2),$$

$$\ell(\mathbf{v}) = \ell^1(v_1) + \ell^2(v_2),$$

$$a^{11}(u_1,v_1) = \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{1}{A^*}\frac{\partial u_1}{\partial \chi_1}\frac{\partial v_1}{\partial \chi_1}\,d\chi_1, \quad a^{12}(u_1,v_2) = -\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{\mu K^*}{3}\frac{1}{A^*}\frac{\partial u_1}{\partial \chi_1}\frac{\partial v_2}{\partial \chi_1}\,d\chi_1,$$

$$a^{21}(u_2,v_1) = a^{12}(u_2,v_1) = -\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{\mu K^*}{3}\frac{1}{A^*}\frac{\partial u_2}{\partial \chi_1}\frac{\partial v_1}{\partial \chi_1}\,d\chi_1,$$

$$a^{22}(u_2,v_2) = \frac{1}{3}a^{11}(u_2,v_2) = \frac{1}{3}\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{1}{A^*}\frac{\partial u_2}{\partial \chi_1}\frac{\partial v_2}{\partial \chi_1}\,d\chi_1,$$

$$b^{11}(u_1,v_1) = \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \mathrm{Pe}\,\frac{\partial u_1}{\partial \chi_1}\,v_1\,d\chi_1,$$

$$b^{22}(u_2,v_2) = \frac{1}{3}b^{11}(u_2,v_2) = \frac{1}{3}\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \mathrm{Pe}\,\frac{\partial u_2}{\partial \chi_1}\,v_2\,d\chi_1,$$

$$c^{22}(u_2,v_2) = \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{1}{\mu^2}\,u_2 v_2 A^* d\chi_1,$$

$$\ell^1(v_1) = \frac{1}{2\mu}\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\int_{-\mu}^{\mu} \mathrm{Os}\,(1+\chi_2 K^*)v_1 A^*\,d\chi_1\,d\chi_2,$$

$$\ell^2(v_2) = \frac{1}{2\mu^2}\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\int_{-\mu}^{\mu} \mathrm{Os}\,\chi_2(1+\chi_2 K^*)v_2 A^*\,d\chi_1\,d\chi_2,$$

$$a_1(U_1^*,\tilde{U}_1) = \iint_{\Omega_1}\left(D_1^{*11}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1} + D_1^{*12}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\right)\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_1}\,dX_1 dX_2 + \\ + \iint_{\Omega_1}\left(D_1^{*21}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1} + D_1^{*22}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\right)\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_2}\,dX_1 dX_2,$$

$$a_2(U_2^*,\tilde{U}_2) = \iint_{\Omega_2}\left(D_2^{*11}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1} + D_2^{*12}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\right)\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_1}\,dX_1 dX_2 + \\ + \iint_{\Omega_2}\left(D_2^{*21}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1} + D_2^{*22}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\right)\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_2}\,dX_1 dX_2,$$

$$b_1(U_1^*,\tilde{U}_1) = \iint_{\Omega_1}\left(\mathrm{Pe}_{11}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1} + \mathrm{Pe}_{12}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\right)\tilde{U}_1 dX_1 dX_2,$$

$$b_2(U_2^*,\tilde{U}_2) = \iint_{\Omega_2}\left(\mathrm{Pe}_{21}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1} + \mathrm{Pe}_{22}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\right)\tilde{U}_2 dX_1 dX_2,$$

$$c_1(U_1^*,\tilde U_1)=\iint\limits_{\Omega_1} R_1U_1^*\tilde U_1 dX_1dX_2,\quad c_2(U_2^*,\tilde U_2)=\iint\limits_{\Omega_2} R_2U_2^*\tilde U_2 dX_1dX_2\,,$$

$$\ell_1(\tilde U_1)=\iint\limits_{\Omega_1}\mathrm{Os}_1\,\tilde U_1 dX_1dX_2,\quad \ell_2(\tilde U_2)=\iint\limits_{\Omega_2}\mathrm{Os}_2\,\tilde U_2 dX_1dX_2\,.$$

3. Дослідження існування і єдиності розв'язку. Для задачі (8)–(10) тут достатньо переконатись у тому, що виконуються умови теореми Лакса–Мільграма [2, 3]. Покажемо неперервність лінійних форм та неперервність і V -еліптичність білінійних форм задачі (8)–(10).

Лема 1. Нехай $\mathbf u=(u_1,u_2)^\top$, $\mathbf v=(v_1,v_2)^\top$, $u_j,v_j\in V$, $U_j^*,\tilde U_j\in V_j$, $j=1,2$, $K^*(\chi_1)$, $D_k^{*ij}(X_1,X_2)$, $i,j,k=1,2$, – неперервні та обмежені функції, а границі областей Ω, Ω_i, $i=1,2$, задовольняють умову Ліпшиця. Тоді лінійні та білінійні форми $\ell(\mathbf v)$, $\ell_j(\tilde U_j)$, $g(\mathbf u,\mathbf v)=a(\mathbf u,\mathbf v)+b(\mathbf u,\mathbf v)+c(\mathbf u,\mathbf v)$, $g_j(U_j^*,\tilde U_j)=a_j(U_j^*,\tilde U_j)+b_j(U_j^*,\tilde U_j)+c_j(U_j^*,\tilde U_j)$, $j=1,2$, є неперервними.

Д о в е д е н н я. Застосуємо нерівність Коші–Буняковського до наведених лінійних та білінійних форм, піднесених до квадрата. Застосувавши очевидну нерівність

$$\left(x_1+\ldots+x_n\right)^2\le n\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right),$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf u,\mathbf v)+b(\mathbf u,\mathbf v)+c(\mathbf u,\mathbf v)|^2 \le 7\Big[&(a^{11}(u_1,v_1))^2+(a^{12}(u_1,v_2))^2+\\
&+(a^{21}(u_2,v_1))^2+(a^{22}(u_2,v_2))^2+(b^{11}(u_1,v_1))^2+\\
&+(b^{22}(u_2,v_2))^2+(c^{22}(u_2,v_2))^2\Big]\le\\
\le 7C^2\Bigg[&\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2 d\chi_1\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\chi_1}\right)^2+v_1^2A^*\right)d\chi_1+\\
&+\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2 d\chi_1\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_2}{\partial\chi_1}\right)^2 d\chi_1+\\
&+\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\chi_1}\right)^2 d\chi_1\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\chi_1}\right)^2 d\chi_1+\\
&+\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\chi_1}\right)^2 d\chi_1\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_2}{\partial\chi_1}\right)^2+v_2^2A^*\right)d\chi_1+\\
&+\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}u_2^2A^*d\chi_1\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}v_2^2A^*d\chi_1\Bigg],
\end{aligned}$$

$$|\ell(\mathbf v)|^2\le 2\left((\ell^1(v_1))^2+(\ell^2(v_2))^2\right)\le 2C_\ell^2\left(\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}v_1^2A^*d\chi_1+\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}v_2^2A^*d\chi_1\right),$$

$$\begin{aligned}
&\left|a_1\left(U_1^*,\tilde U_1\right)+b_1\left(U_1^*,\tilde U_1\right)+c_1\left(U_1^*,\tilde U_1\right)\right|^2\le\\
&\qquad\le 7C_1^2\left[\left(\iint\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1}\right)^2 dX_1dX_2+\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\right)^2 dX_1dX_2\Bigg)\Bigg(\iint\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_1}\right)^2 dX_1dX_2 +$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_2}\right)^2 dX_1dX_2 + \iint\limits_{\Omega_1}\left(\tilde{U}_1\right)^2 dX_1dX_2\Bigg)+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1}\left(U_1^*\right)^2 dX_1dX_2 \iint\limits_{\Omega_1}\left(\tilde{U}_1\right)^2 dX_1dX_2\Bigg],$$

$$\left|a_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right)+b_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right)+c_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right)\right|^2 \le$$

$$\le 7C_2^2\Bigg[\Bigg(\iint\limits_{\Omega_2}\left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1}\right)^2 dX_1dX_2 +$$

$$+\iint\limits_{\Omega_2}\left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\right)^2 dX_1dX_2\Bigg)\Bigg(\iint\limits_{\Omega_2}\left(\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_1}\right)^2 dX_1dX_2 +$$

$$+\iint\limits_{\Omega_2}\left(\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_2}\right)^2 dX_1dX_2 + \iint\limits_{\Omega_2}\left(\tilde{U}_2\right)^2 dX_1dX_2\Bigg)+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_2}\left(U_2^*\right)^2 dX_1dX_2 \iint\limits_{\Omega_2}\left(\tilde{U}_2\right)^2 dX_1dX_2\Bigg],$$

$$\left|\ell_1(\tilde{U}_1)\right|^2 \le C_{1\ell}^2\iint\limits_{\Omega_1}\left(\tilde{U}_1\right)^2 dX_1dX_2,\quad \left|\ell_2(\tilde{U}_2)\right|^2 \le C_{2\ell}^2\iint\limits_{\Omega_2}\left(\tilde{U}_2\right)^2 dX_1dX_2\,,$$

де

$$C=\text{const}\ge\max\left\{1,\ \max_{\chi_1\in\left[\chi_1^b,\chi_1^e\right]}\left|\frac{\mu K^*(\chi_1)}{3}\right|,\left|\text{Pe}\right|,\left|\frac{1}{\mu^2}\right|\right\},$$

$$C_l=\text{const}\ge\max\left\{\frac{1}{2\mu}\sqrt{\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\int\limits_{-\mu}^{\mu}\text{Os}\,(1+\chi_2K^*)d\chi_2\right)^2 A^*d\chi_1}\,,\right.$$

$$\left.\frac{1}{2\mu^2}\sqrt{\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\int\limits_{-\mu}^{\mu}\text{Os}\,\chi_2(1+\chi_2K^*)d\chi_2\right)^2 A^*d\chi_1}\right\},$$

$$C_1=\text{const}\ge\max\left\{\max_{(X_1,X_2)\in\Omega_1}\left|D_1^{*ij}(X_1,X_2)\right|,\left|\text{Pe}_{11}\right|,\left|\text{Pe}_{12}\right|,\left|R_1\right|\right\},\ i,j=1,2\,,$$

$$C_2=\text{const}\ge\max\left\{\max_{(X_1,X_2)\in\Omega_2}\left|D_2^{*ij}(X_1,X_2)\right|,\left|\text{Pe}_{21}\right|,\left|\text{Pe}_{22}\right|,\left|R_2\right|\right\},\ i,j=1,2\,,$$

$$C_{1\ell}=\text{const}\ge\sqrt{\iint\limits_{\Omega_1}(\text{Os}_1)^2dX_1dX_2}\,,\quad C_{2\ell}=\text{const}\ge\sqrt{\iint\limits_{\Omega_2}(\text{Os}_2)^2dX_1dX_2}\,.$$

Підсилимо отримані нерівності, додавши у праві частини невід'ємні доданки:

$$7C^2\left[\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}u_1^2A^*d\chi_1\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\chi_1}\right)^2+v_1^2A^*\right)d\chi_1+\right.$$

$$+\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} u_2^2 A^* d\chi_1 \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi_1}\right)^2 d\chi_1 +$$

$$+\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \chi_1}\right)^2 d\chi_1 \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} v_2^2 A^* d\chi_1 +$$

$$+\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} u_1^2 A^* d\chi_1 \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \left(\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi_1}\right)^2 + v_2^2 A^*\right) d\chi_1 +$$

$$+\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \chi_1}\right)^2 d\chi_1 \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} v_1^2 A^* d\chi_1 +$$

$$+\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} u_2^2 A^* d\chi_1 \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \left(\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi_1}\right)^2 + v_1^2 A^*\right) d\chi_1 \Bigg],$$

$$7C_1^2\left(\iint_{\Omega_1}\left(U_1^*\right)^2 dX_1 dX_2\left(\iint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_1}\right)^2 dX_1 dX_2 + \iint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_2}\right)^2 dX_1 dX_2\right)\right),$$

$$7C_2^2\left(\iint_{\Omega_2}\left(U_2^*\right)^2 dX_1 dX_2\left(\iint_{\Omega_2}\left(\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_1}\right)^2 dX_1 dX_2 + \iint_{\Omega_2}\left(\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_2}\right)^2 dX_1 dX_2\right)\right),$$

$$2C_\ell^2\left(\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \chi_1}\right)^2 d\chi_1 + \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} \frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \chi_1}\right)^2 d\chi_1\right),$$

$$C_{1\ell}^2\left(\iint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_1}\right)^2 dX_1 dX_2 + \iint_{\Omega_1}\left(\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_2}\right)^2 dX_1 dX_2\right),$$

$$C_{2\ell}^2\left(\iint_{\Omega_2}\left(\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_1}\right)^2 dX_1 dX_2 + \iint_{\Omega_2}\left(\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_2}\right)^2 dX_1 dX_2\right).$$

Взявши корінь з обох частин нерівностей, одержимо умови неперервності:

$$|a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{u},\mathbf{v}) + c(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le \sqrt{7}C\|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \quad |\ell(\mathbf{v})| \le \sqrt{2}C_\ell \|\mathbf{v}\|_V,$$

$$\left|a_1\left(U_1^*,\tilde{U}_1\right) + b_1\left(U_1^*,\tilde{U}_1\right) + c_1\left(U_1^*,\tilde{U}_1\right)\right| \le \sqrt{7}C_1 \left\|U_1^*\right\|_{V_1} \left\|\tilde{U}_1\right\|_{V_1},$$

$$\left|a_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right) + b_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right) + c_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right)\right| \le \sqrt{7}C_2 \left\|U_2^*\right\|_{V_2} \left\|\tilde{U}_2\right\|_{V_2},$$

$$\left|\ell_1(\tilde{U}_1)\right| \le C_{1\ell}\left\|\tilde{U}_1\right\|_{V_1}, \quad \left|\ell_2(\tilde{U}_2)\right| \le C_{2\ell}\left\|\tilde{U}_2\right\|_{V_2}. \qquad \blacklozenge$$

Перейдемо до дослідження V -еліптичності білінійних форм.

Лема 2. Нехай $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top$, $u_j, v_j \in V$, $U_j^*, \tilde{U}_j \in V_j$, $j = 1,2$, функції $A^*(\chi_1)$, $K^*(\chi_1)$, $D_k^{*ij}(X_1, X_2)$, $i,j,k = 1,2$, − неперервні та обмежені, такі, що $\mu K^* < 1$, а для матриць $\mathbf{D}_1^* = \begin{pmatrix} D_1^{*11} & D_1^{*12} \\ D_1^{*21} & D_1^{*22} \end{pmatrix}$ і $\mathbf{D}_2^* = \begin{pmatrix} D_2^{*11} & D_2^{*12} \\ D_2^{*21} & D_2^{*22} \end{pmatrix}$ виконуються умови

$$D^{*ii}_{i} > \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_i}\left\{D^{*ij}_{i}(X_1,X_2), D^{*ji}_{i}(X_1,X_2)\right\},$$

$$D^{*jj}_{i} > \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_i}\left\{D^{*ij}_{i}(X_1,X_2), D^{*ji}_{i}(X_1,X_2)\right\},$$

де $i,j=1,2$. Крім цього, нехай границі областей Ω, Ω_i, $i=1,2$, задовольняють умову Ліпшиця. Тоді білінійні форми $a(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{u},\mathbf{v})+c(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $a_j(U_j^*,\tilde{U}_j)+b_j(U_j^*,\tilde{U}_j)+c_j(U_j^*,\tilde{U}_j)$, $j=1,2$, є V -еліптичними.

Д о в е д е н н я. Перетворимо білінійні форми $b(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $b_1\left(U_1^*,\tilde{U}_1\right)$, $b_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right)$ так:

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e} Pe\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}v_1 d\chi_1 + \frac{1}{3}\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\mathrm{Pe}\frac{\partial u_2}{\partial\chi_1}v_2 d\chi_1 =$$

$$= -\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\mathrm{Pe}\frac{\partial v_1}{\partial\chi_1}u_1 d\chi_1 - \frac{1}{3}\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\mathrm{Pe}\frac{\partial v_2}{\partial\chi_1}u_2 d\chi_1 = -b(\mathbf{v},\mathbf{u}),$$

$$b_1\left(U_1^*,\tilde{U}_1\right) = \iint_{\Omega_1}\left(\mathrm{Pe}_{11}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1} + \mathrm{Pe}_{12}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\right)\tilde{U}_1 dX_1 dX_2 =$$

$$= -\iint_{\Omega_1}\left(\mathrm{Pe}_{11}\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_1} + \mathrm{Pe}_{12}\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_2}\right)U_1^* dX_1 dX_2 = -b_1\left(\tilde{U}_1,U_1^*\right),$$

$$b_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right) = \iint_{\Omega_2}\left(\mathrm{Pe}_{21}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1} + \mathrm{Pe}_{22}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\right)\tilde{U}_2 dX_1 dX_2 =$$

$$= -\iint_{\Omega_2}\left(\mathrm{Pe}_{21}\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_1} + \mathrm{Pe}_{22}\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_2}\right)U_2^* dX_1 dX_2 = -b_2\left(\tilde{U}_2,U_2^*\right).$$

Звідси отримаємо:

$$b(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\mathrm{Pe}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial\chi_1}u_1\right)d\chi_1 + \frac{1}{3}\int_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\mathrm{Pe}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\chi_1}v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial\chi_1}u_2\right)d\chi_1\right),$$

$$b_1\left(U_1^*,\tilde{U}_1\right) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega_1}\mathrm{Pe}_{11}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1}\tilde{U}_1 - \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_1}U_1^*\right)dX_1 dX_2 +$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{\Omega_1}\mathrm{Pe}_{12}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\tilde{U}_1 - \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial X_2}U_1^*\right)dX_1 dX_2,$$

$$b_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega_2}\mathrm{Pe}_{21}\left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1}\tilde{U}_2 - \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_1}U_2^*\right)dX_1 dX_2 +$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{\Omega_2}\mathrm{Pe}_{22}\left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\tilde{U}_2 - \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial X_2}U_2^*\right)dX_1 dX_2.$$

Отже, білінійні форми $b(\mathbf{u},\mathbf{v})$, $b_1\left(U_1^*,\tilde{U}_1\right)$, $b_2\left(U_2^*,\tilde{U}_2\right)$ кососиметричні і $b(\mathbf{u},\mathbf{u})=0$, $b_1\left(U_1^*,U_1^*\right)=0$, $b_2\left(U_2^*,U_2^*\right)=0$.

Запишемо функцію u_1 у вигляді $u_1(x)=\int\limits_{\chi_1^b}^{x}\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}d\chi_1$. Звідси, враховуючи нерівність Коші−Буняковського, дістанемо:

$$u_1^2(x)=\left(\int\limits_{\chi_1^b}^{x}\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\sqrt{A^*}\,\frac{1}{\sqrt{A^*}}\,d\chi_1\right)^2\le\int\limits_{\chi_1^b}^{x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2\frac{1}{A^*}\,d\chi_1\int\limits_{\chi_1^b}^{x}A^*d\chi_1\le$$

$$\le\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2\frac{1}{A^*}\,d\chi_1,$$

$$\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}u_1^2(x)A^*d\chi_1\le\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}A^*d\chi_1\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2\frac{1}{A^*}\,d\chi_1=\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2\frac{1}{A^*}\,d\chi_1.$$

Застосувавши вищенаведені результати та очевидну нерівність $2ab\ge-(a^2+b^2)$, одержимо:

$$a(\mathbf{u},\mathbf{u})+b(\mathbf{u},\mathbf{u})+c(\mathbf{u},\mathbf{u})\ge\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2d\chi_1-$$

$$-\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{\mu K^*}{3}\frac{1}{A^*}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial\chi_1}\right)^2\right)d\chi_1+$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\chi_1}\right)^2d\chi_1+\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{\mu^2}u_2^2A^*d\chi_1=$$

$$=\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{3}\left(1-\mu K^*\right)\frac{1}{A^*}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial\chi_1}\right)^2\right)d\chi_1+$$

$$+\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{A^*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2+\frac{1}{\mu^2}u_2^2A^*\right)d\chi_1\ge$$

$$\ge\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{1}{3}\left(1-\mu K^*\right)\frac{1}{A^*}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial\chi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial\chi_1}\right)^2\right)d\chi_1+$$

$$+\int\limits_{\chi_1^b}^{\chi_1^e}\frac{2}{3}u_1^2A^*+\frac{1}{\mu^2}u_2^2A^*d\chi_1\ge\eta\left\|\mathbf{u}\right\|_V^2,$$

$$a_1\left(U_1^*,U_1^*\right)+b_1\left(U_1^*,U_1^*\right)+c_1\left(U_1^*,U_1^*\right)\ge$$

$$\ge\iint\limits_{\Omega_1}\left(D_1^{*11}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1}\right)^2+D_1^{*22}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\right)^2\right)dX_1dX_2+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1}2\min_{(X_1,X_2)\in\Omega_1}\left\{D_1^{*12}(X_1,X_2),D_1^{*21}(X_1,X_2)\right\}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1}\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}dX_1dX_2+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_1}R_1\left(U_1^*\right)^2dX_1dX_2\ge\iint\limits_{\Omega_1}D_1^{*11}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1}\right)^2dX_1dX_2-$$

$$
\begin{aligned}
&-\iint\limits_{\Omega_1} \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_1} \left\{D^{*12}_1(X_1,X_2), D^{*21}_1(X_1,X_2)\right\}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_1}\right)^2 dX_1 dX_2 + \\
&+\iint\limits_{\Omega_1} D^{*22}_1 \left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\right)^2 dX_1 dX_2 - \\
&-\iint\limits_{\Omega_1} \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_1} \left\{D^{*12}_1(X_1,X_2), D^{*21}_1(X_1,X_2)\right\}\left(\frac{\partial U_1^*}{\partial X_2}\right)^2 dX_1 dX_2 + \\
&+\iint\limits_{\Omega_1} R_1 \left(U_1^*\right)^2 dX_1 dX_2 \ge \eta_1 \left\|U_1^*\right\|^2_{V_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2\left(U_2^*,U_2^*\right) + b_2\left(U_2^*,U_2^*\right) + c_2\left(U_2^*,U_2^*\right) \ge \\
&\ge \iint\limits_{\Omega_2} \left(D^{*11}_2 \left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1}\right)^2 + D^{*22}_2 \left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\right)^2\right) dX_1 dX_2 + \\
&+\iint\limits_{\Omega_2} 2 \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_2} \left\{D^{*12}_2(X_1,X_2), D^{*21}_2(X_1,X_2)\right\} \frac{\partial U_2^*}{\partial X_1}\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2} dX_1 dX_2 + \\
&+\iint\limits_{\Omega_2} R_2 \left(U_2^*\right)^2 dX_1 dX_2 \ge \iint\limits_{\Omega_2} D^{*11}_2 \left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1}\right)^2 dX_1 dX_2 - \\
&-\iint\limits_{\Omega_2} \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_2} \left\{D^{*12}_2(X_1,X_2), D^{*21}_2(X_1,X_2)\right\}\left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_1}\right)^2 dX_1 dX_2 + \\
&+\iint\limits_{\Omega_2} D^{*22}_2 \left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\right)^2 dX_1 dX_2 - \\
&-\iint\limits_{\Omega_2} \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_2} \left\{D^{*12}_2(X_1,X_2), D^{*21}_2(X_1,X_2)\right\}\left(\frac{\partial U_2^*}{\partial X_2}\right)^2 dX_1 dX_2 + \\
&+\iint\limits_{\Omega_2} R_2 \left(U_2^*\right)^2 dX_1 dX_2 \ge \eta_2 \left\|U_2^*\right\|^2_{V_2},
\end{aligned}
$$

де

$$
\eta = \mathrm{const} = \min\left\{ \frac{1}{3}\left(1 - \mu \max_{\chi_1\in\left[\chi_1^b,\chi_1^e\right]} \left|K^*\left(\chi_1\right)\right|\right), \frac{2}{3}, \frac{1}{\mu^2} \right\},
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_1 = \mathrm{const} = \min\Bigg\{ &\min_{(X_1,X_2)\in\Omega_1} D^{*11}_1(X_1,X_2) - \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_1} \{D^{*12}_1(X_1,X_2), D^{*21}_1(X_1,X_2)\}, \\
&\min_{(X_1,X_2)\in\Omega_1} D^{*22}_1(X_1,X_2) - \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_1} \{D^{*12}_1(X_1,X_2), D^{*21}_1(X_1,X_2)\}, R_1 \Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_2 = \mathrm{const} = \min\Bigg\{ &\min_{(X_1,X_2)\in\Omega_2} D^{*11}_2(X_1,X_2) - \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_2} \{D^{*12}_2(X_1,X_2), D^{*21}_2(X_1,X_2)\}, \\
&\min_{(X_1,X_2)\in\Omega_1} D^{*22}_2(X_1,X_2) - \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_2} \{D^{*12}_2(X_1,X_2), D^{*21}_2(X_1,X_2)\}, R_2 \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

З умов леми випливає, що $\eta > 0$, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$. Це й доводить V-еліптичність білінійних форм. ♦

Враховуючи отримані результати, можна стверджувати справедливість такої теореми.

Теорема. Нехай $u_j \in V$, $U_j^* \in V_j$, $j = 1,2$, функції $A^*(\chi_1)$, $K^*(\chi_1)$, $D^{*ij}_{\;k}(X_1, X_2)$, $i,j,k = 1,2$, – неперервні та обмежені, такі, що $\mu K^* < 1$, а для матриць $\mathbf{D}_1^* = \begin{pmatrix} D_1^{*11} & D_1^{*12} \\ D_1^{*21} & D_1^{*22} \end{pmatrix}$ і $\mathbf{D}_2^* = \begin{pmatrix} D_2^{*11} & D_2^{*12} \\ D_2^{*21} & D_2^{*22} \end{pmatrix}$ виконуються умови

$$D^{*ii}_{\;i} > \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_i} \left\{ D^{*ij}_{\;i}(X_1,X_2), D^{*ji}_{\;i}(X_1,X_2) \right\},$$

$$D^{*jj}_{\;i} > \min_{(X_1,X_2)\in\Omega_i} \left\{ D^{*ij}_{\;i}(X_1,X_2), D^{*ji}_{\;i}(X_1,X_2) \right\},$$

де $i,j = 1,2$. Крім цього, нехай границі областей Ω, Ω_i, $i = 1,2$, задовольняють умову Ліпшиця. Тоді існує єдиний розв’язок задачі (8)–(10) для довільних $v_j \in V$, $\tilde{U}_j \in V_j$, $j = 1,2$.

Д о в е д е н н я. Випливає з теореми Лакса–Мільграма з урахуванням наведених властивостей лінійних та білінійних форм. ♦

Висновки. Розглянуто стаціонарну задачу адвекції–дифузії–реакції та побудовано відповідну математичну модель для неоднорідного середовища з тонким криволінійним каналом. Отримано варіаційне формулювання задачі у безрозмірних змінних. Доведено існування єдиного розв’язку задачі за певних умов. Результати досліджень сформульовано у вигляді лем та теореми.

1. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.
2. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – Москва: Мир, 1985. – 590 с.
3. *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 222 с.
4. *Mazuriak N., Savula Ya.* Numerical analysis of the advection-diffusion problems in thin curvilinear channel based on multiscale finite element method // Mathematical Modeling and Computing. – 2017. – **4**, No. 1. – P. 59–68.
5. *Savula Ya. H., Koukharskyi V. M., Chaplia Ye. Ya.* Numerical analysis of advection-diffusion in the continuum with thin canal // Numer. Heat Transfer. A-Appl. – 1998. – **33**, No. 3. – P. 341–351. – https://doi.org/10.1080/10407789808913942

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ АДВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ–РЕАКЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ТОНКИМ КРИВОЛИНЕЙНЫМ КАНАЛОМ

Рассмотрена математическая модель задачи адвекции–диффузии–реакции в неоднородной среде с тонким криволинейным каналом. Получена вариационная формулировка задачи в безразмерных переменных. Исследованы и найдены условия существования и единственности ее решения.

Ключевые слова: *адвекция–диффузия–реакция, неоднородная среда, тонкий криволинейный канал, существование и единственность решения.*

INVESTIGATION OF THE ADVECTION–DIFFUSION–REACTION PROBLEM IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM WITH A THIN CURVILINEAR CHANNEL

The mathematical model of the advection–diffusion–reaction problem in an inhomogeneous medium with a thin curvilinear channel is considered. The variational formulation of the problem in dimensionless variables is obtained. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the formulated problem are investigated and found.

Key words: *advection–diffusion–reaction, inhomogeneous medium, thin curvilinear channel, existence and uniqueness of the solution.*

Львів. нац. ун-т
ім. Івана Франка, Львів

Одержано
05.12.19