УДК 512.64

Б. З. Шаваровський✉

НЕОСОБЛИВІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО КЛАСУ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ НАД КІЛЬЦЕМ ПОЛІНОМІВ

Розглянуто двочленні різнобічні однорідні матричні рівняння з двома невідомими, коефіцієнтами яких є поліноміальні матриці третього порядку простої структури. Для таких рівнянь вказано умови існування та метод знаходження розв'язку, який є парою неособливої числової та оборотної поліноміальної матриць.

Ключові слова: *матричне поліноміальне рівняння, розв'язок матричного рівняння, напівскалярна еквівалентність, матриця простої структури.*

Вступ. Матричні рівняння виникають у багатьох теоретичних та прикладних задачах. Такими є рівняння Сильвестра, Ляпунова, Стейна, Ріккаті та різні їх аналоги, які зустрічаються в дослідженнях з лінійної алгебри та диференціальних рівнянь, математичної статистики та математичного програмування, теорії оптимального керування, теорії стійкості тощо. В межах одного і того типу матричних рівнянь задачі різняться областями визначення їх коефіцієнтів, структурою та властивостями розв'язків, а також методами їх знаходження. Добре відомі числові алгоритми Бартелса − Стьюарта для розв'язування рівнянь Сильвестра [3]. Автори праці [8] вказали умови однозначної розв'язності рівнянь типу Стейна та алгоритм їх числового розв'язку. У працях [4] і [2] вивчена структура двосторонніх матричних рівнянь з двома невідомими над поліноміальними та квадратичними кільцями відповідно. У запропонованій статті вивчено двочленні різнобічні однорідні матричні рівняння з двома невідомими, коефіцієнтами яких є поліноміальні матриці третього порядку простої структури. Їх досліджено, щоб знайти деякі спеціальні неособливі розв'язки.

1. Формулювання задачі. Розглянемо матричне рівняння

$$SA(x) - B(x)R(x) = 0\,, \tag{1}$$

де $A(x), B(x) \in M(3, \mathbf{C}[x])$ − відомі неособливі матриці, що мають нижню трикутну форму та інваріантні множники на головних діагоналях; $S, R(x)$ − невідомі матриці. Необхідно знайти такі розв'язки $(S_0, R_0(x))$ цього рівняння, що $S_0 \in GL(3, \mathbf{C})$, $R_0(x) \in GL(3, \mathbf{C}[x])$. Очевидно, для існування цих розв'язків треба, щоб матриці $A(x), B(x)$ були напівскалярно еквівалентні (означення див. [1]). Обмежимось випадком, коли вони мають просту структуру, тобто коли їх елементарні дільники лінійні. Без обмеження загальності можемо вважати перші інваріантні множники цих матриць одиничними. За таких припущень рівняння (1) у розгорнутому вигляді можемо записати:

$$\left\| s_{ij} \right\|_1^3 \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1(x) & \varphi_1(x) & 0 \\ a_3(x) & a_2(x) & \varphi_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1(x) & \varphi_1(x) & 0 \\ b_3(x) & b_2(x) & \varphi_2(x) \end{Vmatrix} \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^3 . \tag{2}$$

Тут $\varphi_1(x)$ ділить націло $\varphi_2(x)$, $a_2(x)$ і $b_2(x)$. Також без звуження загальності можемо вважати, що $\deg a_1(x), \deg b_1(x) < \deg \varphi_1(x)$ і

$$\deg a_2(x), \deg a_3(x), \deg b_2(x), \deg b_3(x) < \deg \varphi_2(x).$$

✉ bshavarovskii@gmail.com

Розглядатимемо ситуацію, коли $\deg\varphi_1(x), \deg\varphi_2(x)-\deg\varphi_1(x)>1$. В іншому разі задача дещо спрощується. А випадок $\deg\varphi_1(x)=\deg\varphi_2(x)=0$ є тривіальним.

2. Редукція рівняння. Через M_{φ_1} і M_{φ_2/φ_1} позначимо множини коренів полінома $\varphi_1(x)$ і частки $\varphi_2(x)/\varphi_1(x)$ відповідно. Згідно з нашими припущеннями очевидно, що $\left|M_{\varphi_1}\right|>1$, $\left|M_{\varphi_2/\varphi_1}\right|>1$. Зафіксуємо деякий корінь $\alpha_1\in M_{\varphi_1}$ і від (2) перейдемо до рівняння, в якому в матрицях-коефіцієнтах елементи в позиціях $(2,1)$ і $(3,1)$ обертаються в нуль при $x=\alpha_1$. Цього можна досягнути додаванням певних кратних (з числовими коефіцієнтами) перших рядків матриць $A(x), B(x)$ до інших їх рядків та відповідними змінами в невідомих матрицях $\left\|s_{ij}\right\|_1^2$, $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$. Щоб не вводити нових позначень, вважатимемо, що уже в (2) маємо $a_1(\alpha_1)=a_3(\alpha_1)=b_1(\alpha_1)=b_3(\alpha_1)=0$. З (2) отримуємо рівняння

$$s_{21}+s_{22}a_1(x)+s_{23}a_3(x)-b_1(x)r_{11}(x)-\varphi_1(x)r_{21}(x)=0, \tag{3}$$

$$s_{31}+s_{32}a_1(x)+s_{33}a_3(x)-b_3(x)r_{11}(x)-b_2(x)r_{21}(x)-\varphi_2(x)r_{31}(x)=0. \tag{4}$$

Підставляючи $x=\alpha_1$ у (3) і (4), дістанемо $s_{21}=s_{31}=0$. Тому необхідно, щоб $s_{11}\neq 0$. Для існування потрібних розв'язків необхідно і достатньо напівскалярної еквівалентності матриць $A(x), B(x)$. Тому складність розв'язання рівняння (2) у вказаному вище сенсі в тому, що напівскалярна еквівалентність матриць вище другого порядку вивчена недостатньо. Зокрема, досі в загальному випадку не побудовані канонічні форми, невідомі інваріанти, не знайдені умови напівскалярної еквівалентності матриць. Матриці другого і третього порядків розглянуто в працях автора [5–7]. Цитована там література стосується окремих матриць вищих порядків.

З рівняння (2) видно, що

$$r_{12}(x)=s_{12}\varphi_1(x)+s_{13}a_2(x), \qquad r_{13}(x)=s_{13}\varphi_2(x). \tag{5}$$

Враховуючи вимогу оборотності матриці $\left\|r_{ij}(x)\right\|_1^2$ та вигляд (5) її елементів $r_{12}(x)$ і $r_{13}(x)$, робимо висновок, що $(r_{11}(x),\varphi_1(x))=1$. Тому з (3) і (4) видно, що

$$(a_1(x), a_3(x), \varphi_1(x))=(b_1(x), b_3(x), \varphi_1(x)):=d(x).$$

Очевидно, що $d(\alpha_1)=0$. Якщо $d(x)=\varphi_1(x)$, то $a_1(x)=b_1(x)\equiv 0$. У цьому випадку задача трохи спрощується. Тут розглядаємо складніший випадок, коли $d(x)\neq\varphi_1(x)$. Фіксуємо такий корінь $\alpha_2\in M_{\varphi_1}$, що $d(\alpha_2)\neq 0$. Якщо $a_1(\alpha_2)=0$ або $b_1(\alpha_2)=0$ (зокрема, якщо $a_1(x)\equiv 0$ або $b_1(x)\equiv 0$), то застосуємо до матриць-коефіцієнтів рівняння (2) перетворення напівскалярної еквівалентності так, щоб перейти до матриць, в яких елементи в позиціях $(2,1)$ не оберталися в нуль при $x=\alpha_2$. Покажемо, як це можна зробити на прикладі матриці $A(x)$. Позначимо $a_2'(x):=a_2(x)/\varphi_1(x)$. Виберемо $p_{23}\in\mathbf{C}$, $p_{23}\neq 0$, так, щоб $1+p_{23}a_2'(\beta_i)\neq 0$ для кожного $\beta_i\in M_{\varphi_2/\varphi_1}$. Застосуємо до $A(x)$ напівскалярно еквівалентне перетворення

$$A(x)\to PA(x)Q(x)=C(x), \tag{6}$$

де

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Елементи матриці

$$C(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1(x) & \varphi_1(x) & 0 \\ c_3(x) & c_2(x) & \varphi_2(x) \end{Vmatrix}$$

знаходимо так. Визначимо $c_1(x)$ як остачу від ділення $a_1(x) + p_{23}a_3(x)$ на $\varphi_1(x)$, $\deg c_1(x) < \deg \varphi_1(x)$. При цьому частку позначимо через $q_{21}(x)$, тобто

$$a_1(x) + p_{23}a_3(x) = \varphi_1(x)q_{21}(x) + c_1(x).$$

Далі позначимо $c_2(x) = c_2'(x)\varphi_1(x)$ і $c_2'(x)$ визначимо так, щоб $\deg c_2'(x) < \deg \varphi_2(x)/\varphi_1(x)$ і

$$c_2'(\beta_i) = \frac{a_2'(\beta_i)}{1 + p_{23}a_2'(\beta_i)}$$

для кожного $\beta_i \in M_{\varphi_2/\varphi_1}$. Тоді

$$a_2'(x) - c_2'(x)(1 + p_{23}a_2'(x)) \equiv (\operatorname{mod} \varphi_2(x)/\varphi_1(x)).$$

Частку від ділення $a_2'(x) - c_2'(x)(1 + p_{23}a_2'(x))$ на $\varphi_2(x)/\varphi_1(x)$ позначимо через $q_{32}(x)$. Визначимо $c_3(x)$ як частку від ділення

$$a_3(x) - c_2'(x)(a_1(x) - c_1(x) + p_{23}a_3(x))$$

на $\varphi_2(x)$. Тут остачу позначимо через $q_{31}(x)$, тобто

$$a_3(x) - c_2'(x)(a_1(x) - c_1(x) + p_{23}a_3(x)) = \varphi_2(x)c_3(x) + q_{31}(x).$$

Переконуємося у рівності

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1(x) & \varphi_1(x) & 0 \\ a_3(x) & a_2(x) & \varphi_2(x) \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1(x) & \varphi_1(x) & 0 \\ c_3(x) & c_2(x) & \varphi_2(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_{21} & 1 + p_{23}a_2'(x) & p_{23}\,\varphi_2(x)/\varphi_1(x) \\ q_{31} & q_{32} & 1 - p_{23}c_2'(x) \end{Vmatrix}.$$

Тому в (6) права перетворювальна матриця $Q(x)$ є оберненою до правого множника у правій частині останньої рівності, причому $c_1(\alpha_2) \neq 0$.

Якщо у матриці $B(x)$ рівняння (2) $b_1(\alpha_2) = 0$, то аналогічне перетворення здійснюємо і над матрицею $B(x)$, тобто

$$B(x) \to P_1B(x)Q_1(x) = D(x),$$

де елемент у позиції (2, 1) матриці $D(x)$ не обертається в нуль при $x = \alpha_2$. Таким чином, від рівняння (2) можна перейти до рівняння

$$S_1C(x) - D(x)R_1(x) = 0, \tag{7}$$

де $S_1 = P_1SP^{-1}$, $R_1(x) = Q_1^{-1}(x)R(x)Q(x)$. Далі додаванням других рядків матриць $C(x)$ і $D(x)$, помножених на деякі числа k_1 і k_2 відповідно, до останніх їх рядків можемо перейти до матриць, в яких елемент у позиції $(3, 1)$ оберталися в нуль при $x = \alpha_2$. Так від рівняння (7) перейдемо до нового рівняння

$$S_2 C_1(x) - D_1(x) R_2(x) = 0 ,$$

де

$$S_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_2 & 1 \end{Vmatrix} S_1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k_1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad R_2(x) = R_1(x)$$

і в матрицях $C_1(x)$, $D_1(x)$ елементи в позиціях $(3, 1)$ оберталися в нуль при $x = \alpha_2$. Щоб не вводити нових позначень, вважатимемо, що уже матриці $A(x)$, $B(x)$ у рівнянні (2) мають потрібні властивості, тобто $a_1(\alpha_2), b_1(\alpha_2) \neq 0$, $a_3(\alpha_2) = b_3(\alpha_2) = 0$ і, як і раніше, $a_1(\alpha_1) = a_3(\alpha_1) = b_1(\alpha_1) = b_3(\alpha_1) = 0$. З рівняння (2) отримуємо:

$$s_{32} a_1(x) + s_{33} a_3(x) - b_3(x) r_{11}(x) - b_2(x) r_{21}(x) - \varphi_2 r_{31}(x) = 0 . \tag{8}$$

Підставляючи $x = \alpha_2$ у (8), дістанемо, що $s_{32} a_1(\alpha_2) = 0$, звідки $s_{32} = 0$. Таким чином, невідома матриця $\|s_{ij}\|_1^3$ у рівнянні (2) повинна бути трикутного вигляду:

$$\|s_{ij}\|_1^3 = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{Vmatrix} .$$

З (2) видно, що

$$r_{11}(x) = s_{11} + s_{12} a_1(x) + s_{13} a_3(x) , \tag{9}$$

$$r_{22}(x) = s_{22} + s_{23} a_2'(x) - b_1(x)(s_{12} + s_{13} a_2'(x)) , \tag{10}$$

$$s_{33} a_2(x) - b_3(x) r_{12}(x) - b_2(x) r_{22}(x) - \varphi_2(x) r_{32}(x) = 0 . \tag{11}$$

Враховуючи (9), перепишемо (3) так:

$$s_{22} a_1(x) + s_{23} a_3(x) - b_1(x)(s_{11} + s_{12} a_1(x) + s_{13} a_3(x)) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_1(x)) . \tag{12}$$

Також з (4) маємо:

$$s_{33} a_3(x) - b_3(x)(s_{11} + s_{12} a_1(x) + s_{13} a_3(x)) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_1(x)) . \tag{13}$$

З останньої конгруенції випливає, що для існування потрібного розв'язку рівняння (2) необхідно, щоб для будь-якого $\alpha_i \in M_{\varphi_1}$ значення $a_3(\alpha_i)$, $b_3(\alpha_i)$ були нульовими чи ненульовими одночасно, тобто $a_3(\alpha_i) = 0 \Leftrightarrow b_3(\alpha_i) = 0$.

З (12) і (13) одержуємо:

$$s_{22} a_1(x) b_3(x) + s_{23} a_3(x) b_3(x) - s_{33} a_3(x) b_1(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_1(x)) .$$

Тому для кожного такого $\alpha_{i_v} \in M_{\varphi_1}$, що $a_3(\alpha_i), b_3(\alpha_i) \neq 0$, з останньої конгруенції можна отримати:

$$s_{22} \frac{a_1(\alpha_{i_v})}{a_3(\alpha_{i_v})} + s_{23} - s_{33} \frac{b_1(\alpha_{i_v})}{b_3(\alpha_{i_v})} = 0 . \tag{14}$$

Для всіх решти $\alpha_j \in M_{\varphi_1}$ таких, що $a_3(\alpha_j) = b_3(\alpha_j) = 0$, з (12) маємо:

$$s_{22} a_1(\alpha_j) - s_{11} b_1(\alpha_j) - s_{12} a_1(\alpha_j) b_1(\alpha_j) = 0 .$$

Отже, значення $a_1(\alpha_j), b_1(\alpha_j)$ повинні бути нульовими чи ненульовими одночасно. Для ненульових $a_1(\alpha_{j_u}), b_1(\alpha_{j_u})$ можемо записати:

$$s_{11}\frac{1}{a_1(\alpha_{j_u})}+s_{12}-s_{33}\frac{1}{b_1(\alpha_{j_u})}=0. \tag{15}$$

Якщо ввести позначення $\delta_A(x)=\det\begin{Vmatrix}a_1(x) & 1\\ a_3(x) & a_2'(x)\end{Vmatrix}$, $\delta_B(x)=\det\begin{Vmatrix}b_1(x) & 1\\ b_3(x) & b_2'(x)\end{Vmatrix}$ і врахувати вигляд $r_{11}(x), r_{12}(x), r_{22}(x)$ з (9), (5), (10) та $r_{21}(x)$ з (3), то (4) і (11) можна подати так:

$$\begin{gathered}s_{33}a_3(x)+\delta_B(x)(s_{11}+s_{12}a_1(x)+s_{13}a_3(x))-\\ -b_2'(x)(s_{22}a_1(x)+s_{23}a_3(x))\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_1(x)),\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}s_{33}a_2'(x)+\delta_B(x)(s_{12}+s_{13}a_2'(x))-\\ -b_2'(x)(s_{22}+s_{23}a_2'(x))\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_2(x)/\varphi_1(x)).\end{gathered} \tag{17}$$

З (10) і (17) отримуємо:

$$\delta_A(x)(s_{33}+s_{13}\delta_B(x)-s_{23}b_2'(x))-s_{11}\delta_B(x)\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_2(x)/\varphi_1(x)), \tag{18}$$

$$s_{11}\delta_A(x)a_2'(x)+s_{12}\delta_A(x)\delta_B(x)-s_{22}\delta_B(x)b_2'(x)\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_2(x)/\varphi_1(x)). \tag{19}$$

З (18) видно, що $\delta_A(\beta_i)=0 \Leftrightarrow \delta_B(\beta_i)=0$, для кожного $\beta_i\in M_{\varphi_2/\varphi_1}$. Тому для тих $\beta_j\in M_{\varphi_2/\varphi_1}$, що $\delta_A(\beta_j)=\delta_B(\beta_j)=0$, з (17) маємо:

$$s_{33}a_2'(\beta_j)-s_{23}a_2'(\beta_j)b_2'(\beta_j)-s_{22}b_2'(\beta_j)=0.$$

Звідси $a_2'(\beta_j)=0 \Leftrightarrow b_2'(\beta_j)=0$. Для тих $\beta_{j_p}\in M_{\varphi_2/\varphi_1}$, що $\delta_A(\beta_{j_p})=\delta_B(\beta_{j_p})=0$ і $a_2'(\beta_{j_p})\neq 0$, з останньої рівності одержимо:

$$s_{22}\frac{1}{a_2'(\alpha_{j_p})}+s_{23}-s_{33}\frac{1}{b_2'(\alpha_{j_p})}=0. \tag{20}$$

А для всіх таких $\beta_{i_q}\in M_{\varphi_2/\varphi_1}$, що $\delta_A(\beta_{i_q})\neq 0$, з (19) одержимо:

$$s_{11}\frac{a_2'(\alpha_{i_q})}{\delta_A(\alpha_{i_q})}+s_{12}-s_{22}\frac{b_2'(\alpha_{i_q})}{\delta_B(\alpha_{i_q})}=0. \tag{21}$$

3. Основний результат. Введемо такі позначення: $M_1=\{\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_k}\}$ і $M_2=\{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_l}\}$ – множини тих коренів з M_{φ_1}, для яких $a_3(\alpha_{j_u})=b_3(\alpha_{j_u})=0$, $a_1(\alpha_{j_u}), b_1(\alpha_{j_u})\neq 0$, $u=1,\dots,k$, і $a_3(\alpha_{i_v}), b_3(\alpha_{i_v})\neq 0$, $v=1,\dots,\ell$, відповідно; $M_3=\{\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_m}\}$ і $M_4=\{\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_n}\}$ – множини тих коренів з M_{φ_2/φ_1}, для яких $\delta_A(\beta_{j_p})=\delta_B(\beta_{j_p})=0$, $a_2'(\beta_{j_p}), b_2'(\beta_{j_p})\neq 0$, $p=1,\dots,m$, і $\delta_A(\beta_{i_q}), \delta_B(\beta_{j_q})\neq 0$, $q=1,\dots,n$, відповідно. Позначимо також

$$N_1=\begin{Vmatrix}\dfrac{1}{a_1(\alpha_{j_1})} & -\dfrac{1}{b_1(\alpha_{j_1})} & 0 & 1 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{1}{a_1(\alpha_{j_k})} & -\dfrac{1}{b_1(\alpha_{j_k})} & 0 & 1 & 0 & 0\end{Vmatrix},$$

$$N_2=\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{a_1(\alpha_{i_1})}{a_3(\alpha_{i_1})} & -\dfrac{b_1(\alpha_{i_1})}{b_3(\alpha_{i_1})} & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dfrac{a_1(\alpha_{i_l})}{a_3(\alpha_{i_l})} & -\dfrac{b_1(\alpha_{i_l})}{b_3(\alpha_{i_l})} & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$N_3=\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{1}{a_2'(\beta_{j_1})} & -\dfrac{1}{b_2'(\beta_{j_1})} & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dfrac{1}{a_2'(\beta_{j_m})} & -\dfrac{1}{b_2'(\beta_{j_m})} & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$N_4=\begin{Vmatrix} \dfrac{a_2'(\beta_{i_1})}{\delta_A(\beta_{i_1})} & -\dfrac{b_2'(\beta_{i_1})}{\delta_B(\beta_{i_1})} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{a_2'(\beta_{i_n})}{\delta_A(\beta_{i_n})} & -\dfrac{b_2'(\beta_{i_n})}{\delta_B(\beta_{i_n})} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$N_5=\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{a_3(\alpha_{i_1})} & 0 & -\dfrac{1}{b_3(\alpha_{i_1})} & \dfrac{a_1(\alpha_{i_1})}{a_3(\alpha_{i_1})} & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{a_3(\alpha_{i_l})} & 0 & -\dfrac{1}{b_3(\alpha_{i_l})} & \dfrac{a_1(\alpha_{i_l})}{a_3(\alpha_{i_l})} & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$N_6=\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{\delta_A(\beta_{i_1})} & 0 & -\dfrac{1}{\delta_B(\beta_{i_1})} & 0 & \dfrac{b_2'(\beta_{i_1})}{\delta_B(\beta_{i_1})} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{\delta_A(\beta_{i_n})} & 0 & -\dfrac{1}{\delta_B(\beta_{i_n})} & 0 & \dfrac{b_2'(\beta_{i_n})}{\delta_B(\beta_{i_n})} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теорема. *Нехай у рівнянні* (2) *для деяких* $\alpha_1, \alpha_2 \in M_{\varphi_1}$ *виконуються умови* $a_1(\alpha_1)=a_3(\alpha_1)=b_1(\alpha_1)=b_3(\alpha_1)=a_3(\alpha_2)=b_3(\alpha_2)=0$, $a_1(\alpha_2), b_1(\alpha_2)\neq 0$. *Розв'язок* $(S_0, R_0(x))$ *цього рівняння такий, що* $S_0 \in GL(3, \mathbf{C})$, $R_0(x) \in GL(3, \mathbf{C}[x])$, *існує тоді і лише тоді, коли рівняння*

$$\begin{Vmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{22} & s_{33} & s_{12} & s_{23} & s_{13} \end{Vmatrix}^T = 0 \tag{22}$$

має розв'язок

$$\begin{Vmatrix} s_{110} & s_{220} & s_{330} & s_{120} & s_{230} & s_{130} \end{Vmatrix}^T \tag{23}$$

з ненульовими першими трьома компонентами $s_{110}, s_{220}, s_{330}$. *Якщо умова теореми виконана, то* S_0 *у розв'язку рівняння* (2) *є верхньою трикутною матрицею, елементи якої визначають за елементами розв'язку* (23) *так, що*

$$S_0 = \begin{Vmatrix} s_{110} & s_{120} & s_{130} \\ 0 & s_{220} & s_{230} \\ 0 & 0 & s_{330} \end{Vmatrix}.$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність*. Нехай $(S_0, R_0(x))$ − потрібний розв'язок рівняння (2) і $S_0 = \|s_{ij0}\|_1^2$. Тоді, як уже вказували, матриця S_0 є верхня трикутна і її діагональні та наддіагональні елементи задовольняють кожне з рівнянь (14), (15), (20) і (21) для $\alpha_{i_v} \in M_2$, $v = 1, \ldots, \ell$, $\alpha_{j_u} \in M_1$, $u = 1, \ldots, k$, $\beta_{j_p} \in M_3$, $p = 1, \ldots, m$, і для $\beta_{i_q} \in M_4$, $q = 1, \ldots, n$, відповідно. Ці елементи задовольняють також рівняння

$$s_{33}a_3(\alpha_{i_v}) - b_3(\alpha_{i_v})(s_{11} + s_{12}a_1(\alpha_{i_v}) + s_{13}a_3(\alpha_{i_v})) = 0,$$

і

$$\delta_A(\beta_{i_q})(s_{33} + s_{13}\delta_B(\beta_{i_q}) - s_{23}b_2'(\beta_{i_q})) - s_{11}\delta_B(\beta_{i_q}) = 0$$

для кожного $\alpha_{i_v} \in M_2$ і $\beta_{i_q} \in M_4$ відповідно (див. (13) та (18)).

Це означає, що виконується рівність

$$\begin{Vmatrix} N_1 \\ \ldots \\ N_6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{110} & s_{220} & s_{330} & s_{120} & s_{230} & s_{130} \end{Vmatrix}^T = 0,$$

де $s_{110}, s_{220}, s_{330} \neq 0$.

Достатність. Виконання рівності

$$\begin{Vmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{110} & s_{220} & s_{330} & s_{120} & s_{230} & s_{130} \end{Vmatrix}^T = 0$$

свідчить, що

$$\left.\begin{array}{r} s_{220}a_1(x) - s_{110}b_1(x) - s_{120}a_1(x)b_1(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ (a_3(x), \varphi_1(x))), \\ s_{220}a_1(x)b_3(x) - s_{330}a_3(x)b_1(x) + s_{230}a_3(x)b_3(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \dfrac{\varphi_1(x)}{(a_3(x), \varphi_1(x))}), \\ s_{330}a_3(x) - b_3(x)(s_{110} + s_{120}a_1(x) + s_{130}a_3(x)) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \dfrac{\varphi_1(x)}{(a_3(x), \varphi_1(x))}) \end{array}\right\}. \quad (25)$$

Вилучаючи з двох останніх рівностей доданок з s_{330}, одержимо:

$$b_3(x)(s_{230}a_3(x) + b_1(x)(s_{110} + s_{120}a_1(x) + s_{130}a_3(x))) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \frac{\varphi_1(x)}{(a_3(x), \varphi_1(x)}).$$

Оскільки $\left(b_3(x), \dfrac{\varphi_1(x)}{(a_3(x), \varphi_1(x)}\right) = 1$, то останню конгруенцію можна скоротити на $b_3(x)$. Якщо, крім того, взяти до уваги першу з конгруенцій (25), то одержимо

$$s_{230}a_3(x) + b_1(x)(s_{110} + s_{120}a_1(x) + s_{130}a_3(x)) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \varphi_1(x)). \quad (26)$$

Виконання рівності

$$\begin{Vmatrix} N_3 \\ N_4 \\ N_6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{110} & s_{220} & s_{330} & s_{120} & s_{230} & s_{130} \end{Vmatrix}^T = 0$$

означає, що

$$\left.\begin{aligned} s_{330}a_2'(x) - s_{330}b_2'(x) + s_{230}a_2'(x)b_2'(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ (\varphi_2(x)/\varphi_1(x),\ \delta_A(x))), \\ s_{110}a_2'(x)\delta_B(x) - s_{220}b_2'(x)\delta_A(x) + s_{120}\delta_A(x)\delta_B(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \frac{\varphi_2(x)/\varphi_1(x)}{(\varphi_2(x)/\varphi_1(x),\ \delta_A(x))}), \\ \delta_A(x)(s_{330} + s_{130}\delta_B(x) - s_{230}b_2'(x)) - s_{110}\delta_B(x)) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \frac{\varphi_2(x)/\varphi_1(x)}{(\varphi_2(x)/\varphi_1(x),\ \delta_A(x))}). \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Вилучаємо з останніх двох конгруенцій (27) доданок з s_{110}. В результаті одержимо:

$$\delta_A(x)(s_{330}a_2'(x) - s_{220}b_2'(x) + s_{120}\delta_B(x) + s_{130}a_2'(x)\delta_B(x) - \\ - s_{230}a_2'(x)b_2'(x)) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \frac{\varphi_2(x)/\varphi_1(x)}{(\varphi_2(x)/\varphi_1(x),\ \delta_A(x))}).$$

Оскільки $\left(\frac{\varphi_2(x)/\varphi_1(x)}{(\varphi_2(x)/\varphi_1(x),\ \delta_A(x))},\ \delta_A(x)\right) = 1$, то останню конгруенцію можна скоротити на $\delta_A(x)$. Якщо при цьому врахувати першу з конгруенцій (27), то одержимо

$$s_{330}a_2'(x) - s_{220}b_2'(x) + s_{120}\delta_B(x) + s_{130}a_2'(x)\delta_B(x) - \\ - s_{230}a_2'(x)b_2'(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_2(x)/\varphi_1(x)) \quad (28)$$

або

$$s_{330}a_2(x) - s_{220}b_2(x) + s_{120}\varphi_1(x)\delta_B(x) + s_{130}a_2(x)\delta_B(x) - \\ - s_{230}a_2(x)b_2'(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_2(x)). \quad (29)$$

Остання з конгруенцій (27) виконується, очевидно, за модулем $\varphi_2(x)/\varphi_1(x)$. Якщо її почленно додати до помноженої на $-a_1(x)$ конгруенції (28), то одержимо:

$$s_{330}a_3(x) - b_3(x)(s_{110} + s_{120}a_1(x) + s_{130}a_3(x)) - \\ - b_2'(x)\big(s_{220}a_1(x) + s_{230}a_3(x) - b_1(x)(s_{110} + s_{120}a_1(x) + \\ + s_{130}a_3(x))\big) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_2(x)/\varphi_1(x)). \quad (30)$$

На основі рівності

$$N_5 \begin{Vmatrix} s_{110} & s_{220} & s_{330} & s_{120} & s_{230} & s_{130} \end{Vmatrix}^T = 0$$

та конгруенції (26) робимо висновок про подільність лівої частини конгруенції (30) на $\varphi_1(x)$. Тому остання виконується за модулем $\varphi_2(x)$, оскільки $(\varphi_2(x)/\varphi_1(x),\ \varphi_1(x)) = 1$. Тобто

$$s_{330}a_3(x) - b_3(x)(s_{110} + s_{120}a_1(x) + s_{130}a_3(x)) - \\ - b_2'(x)\big(s_{220}a_1(x) + s_{230}a_3(x) - \\ - b_1(x)(s_{110} + s_{120}a_1(x) + s_{130}a_3(x))\big) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \varphi_2(x)). \quad (31)$$

За компонентами розв'язку (23) побудуємо поліноми

$$\left.\begin{aligned} r_{110}(x) &= s_{110} + s_{120}a_1(x) + s_{130}a_3(x), \\ r_{120}(x) &= s_{120}\varphi_1(x) + s_{130}a_2(x), \\ r_{130}(x) &= s_{130}\varphi_2(x), \\ r_{220}(x) &= s_{220} + s_{230}a_2'(x) - b_1(x)(s_{120} + s_{130}a_2'(x)), \\ r_{230}(x) &= s_{30}\,\varphi_2(x)/\varphi_1(x) - s_{130}b_1(x)\,\varphi_2(x)/\varphi_1(x) \end{aligned}\right\}.$$

Позначимо через $r_{210}(x)$ частку від ділення лівої частини конгруенції (26) на $\varphi_1(x)$, а через $r_{310}(x)$ і $r_{320}(x)$ – частки від ділення на $\varphi_2(x)$ лівих частин конгруенцій (29) і (31) відповідно. За елементами розв'язку (23) побудуємо матрицю S_0, $\det S_0 \ne 0$, як це показано у формулюванні теореми. Також побудуємо за вказаними вище $r_{ij0}(x)$, $i, j = 1, 2, 3$, матрицю $\left\| r_{ij0}(x) \right\|_1^3$. Переконуємося в її оборотності та в істинності рівності

$$S_0A(x) - B(x)\left\| r_{ij0}(x) \right\|_1^3 .$$

Це значить, що $(S_0, R_0(x))$, де $R_0(x)$ – обернена до матриці $\left\| r_{ij0}(x) \right\|_1^3$, є розв'язком рівняння (2). Теорема доведена.

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
2. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності та структура розв'язків матричних двобічних лінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 2. – С. 49–56.
3. *Bartels R. H., Stewart G. W.* Solution of the matrix equation $AX + XB = C[F4]$ // Commun. ACM. – 1972. – **15**, No. 9. – P. 820–826. https://doi.org/10.1145/361573.361582
4. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure // Algebra Discrete Math. – 2019. – **27**, No. 2. – P. 243–251.
5. *Shavarovskii B. Z.* Canonical form of reduced 3-by-3 matrix with one characteristic root and with some zero subdiagonal elements // J. Math. – 2019. – **2019**. – Article ID 7646132, 10 p., – https://doi.org/10.1155/2019/7646132
6. *Shavarovskii B. Z.* Reduced triangular form of polynomial 3-by-3 matrices with one characteristic root and its invariants // J. Math. – 2018. – **2018**. – Article ID 3127984, 6 p. – https://doi.org/10.1155/2018/3127984
7. *Shavarovskii B. Z.* Toeplitz matrices in the problem of semiscalar equivalence of second-order polynomial matrices // Hindawi Int. J. Analysis. – 2017. – **2017**. – Article ID 6701078, 14 p. – https://doi.org/10.1155/2017/6701078
8. *Zhou B., Lam J., Duan G.-R.* Toward solution of matrix equation $X = Af(X)B + C$ // Linear Algebra Appl. – 2011. – **435**, No. 6. – P. 1370–1398. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.03.003

НЕОСОБЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД КОЛЬЦОМ ПОЛИНОМОВ

Рассмотрены двучленные разносторонние однородные матричные уравнения с двумя неизвестными, коэффициенты которых являются полиномиальными матрицами третьего порядка простой структуры. Для этих уравнений указаны условия существования и метод нахождения решения, которое представляет собой пару неособой числовой и обратимой полиномиальной матриц.

Ключевые слова: *матричное полиномиальное уравнение, решение матричного уравнения, полускалярная эквивалентность, матрица простой структуры.*

NON-SINGULAR SOLUTIONS OF ONE CLASS OF MATRIX EQUATIONS OVER A POLYNOMIAL RING

Binomial two-sided homogeneous matrix equations with two unknowns are considered. The coefficients of the equations are third-order polynomial matrices of simple structure. For these equations, the conditions of existence and the method of finding a solution, which is a pair of a non-singular numerical matrix and a reversible polynomial matrix, are specified.

Key words: *matrix polynomial equation, solution of matrix equation, semiscalar equivalence, matrix of simple structure.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.09.19